1

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

2
ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

3
ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

4
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

5
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

6
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

И. И. Ляшко,
А. К. Боярчук,
Я. Г. Гай,
А. Ф. Калайда

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 1

Допущено
Министерством
высшего и среднего
специального
образования СССР
в качестве учебника
для студентов
математических
специальностей
университетов

КИЕВ
ГОЛОВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
«ВИЩА ШКОЛА»
1983

22.16я73
М34

УДК 517 (075.8)

Математический анализ. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Калайда А. Ф. В 3-х ч.— Киев : Вища школа. Головное изд-во, 1983.— ч. 1.— 495 с.

Изложение материала нетрадиционное: сначала рассматривается теория множеств, вводится аксиоматическая теория важнейших математических структур (тело, поле, векторные и метрические пространства) и их метрические характеристики, а затем исследуется теория пределов для конечномерных объектов (скаляров, конечномерных векторов и матриц), теория числовых рядов (в том числе и кратных) и бесконечных произведений, свойства функций и отображений. Для тех же объектов дается систематическое изложение дифференциального и интегрального исчисления.

Теоретический материал иллюстрируется многими примерами и задачами.

Для студентов математических специальностей университетов. Учебником могут пользоваться студенты технических вузов.

Ил. 33 Табл. 3 Библиогр.: 15 назв.

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, проф. *Н. М. Матвеев* (ЛГПИ им. А. И. Герцена), доктор физ.-мат. наук, проф. *В. П. Петренко* (ХГУ им. А. М. Горького)

Редакция литературы по математике и физике
Зав. редакцией *Е. Л. Корженевич*

М $\frac{1702050000-109}{М211(04)-83}$ 102—82

© Издательское объединение «Вища школа», 1983

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

1. Элементы теории множеств. Математические структуры. Действительные числа

§ 1. Элементы теории множеств 7
§ 2. Функция. Отображение 11
§ 3. Бинарные отношения 13
§ 4. Бинарные операции 14
§ 5. Изоморфизм 17
§ 6. Математические структуры 17
§ 7. Действительные числа 18
§ 8. Абсолютная величина 29
§ 9. Метод математической индукции 30
§ 10. Комплексные числа 34
§ 11. Позиционное представление действительного числа 39
§ 12. Изоморфизм полных упорядоченных полей 42
§ 13. Счетные множества. Множества мощности континуума 46

2. Предел и непрерывность

§ 1. Векторные пространства 51
§ 2. Метрические пространства 61
§ 3. Линейные отображения 65
§ 4. Предел последовательности 72
§ 5. Множества точек в метрическом пространстве 107
§ 6. Предел функции 118
§ 7. Непрерывные функции и их свойства 142
§ 8. Функциональные пространства 169

3. Числовые ряды

§ 1. Признаки сходимости числовых рядов 179
§ 2. Признаки сходимости рядов с произвольными членами 194
§ 3. Умножение числовых рядов 203
§ 4. Двойные и кратные ряды 205
§ 5. Бесконечные произведения 213
§ 6. Методы суммирования рядов 218

4. Дифференциальное исчисление

§ 1. Дифференцируемые функции. Дифференциал и производная функции 227
§ 2. Производные и дифференциалы высших порядков 239
§ 3. Основные теоремы дифференциального исчисления 244
§ 4. Точки разрыва производной 249
§ 5. Обобщение следствия 1 из теоремы Лагранжа 252
§ 6. Раскрытие неопределенностей (правила Лопиталя) 256
§ 7. Формула Тейлора 261
§ 8. Исследование функций с помощью производных 271

§ 9. Асимптоты графика функции 287
§ 10. Построение графиков функций 290
§ 11. Некоторые важные неравенства 293
§ 12. Дифференцирование вектор-функций 295
§ 13. Дифференцируемые числовые функции векторного аргумента 303
§ 14. Дифференцируемые отображения 323
§ 15. Принцип неподвижной точки 331
§ 16. Неявные функции 332
§ 17. Локальные экстремумы функции нескольких переменных 346
§ 18. Условные и абсолютные экстремумы числовой функции векторного аргумента 352

5. Неопределенный интеграл

§ 1. Первообразные и интегралы 358
§ 2. Основные методы интегрирования 365
§ 3. Интегрирование рациональных выражений 375
§ 4. Интегрирование иррациональных функций методом рационализации 384

6. Определенный интеграл

§ 1. Интеграл Римана 401
§ 2. Свойства интегрируемых функций 414
§ 3. Важнейшие теоремы и формулы интегрального исчисления 417
§ 4. Интегрирование вектор-функций, комплекснозначных функций и функциональных матриц 425
§ 5. Интегрирование на некомпактном промежутке 429
§ 6. Функции ограниченной вариации 442
§ 7. Приложение определенного интеграла к решению задач геометрии и механики 447
§ 8. Интеграл Стилтьеса 475
Список литературы 487
Предметный указатель 488

ПРЕДИСЛОВИЕ

В связи с научно-техническим прогрессом происходит интенсивная математизация различных отраслей знаний, возрастает прикладное значение математики, связанное с развитием вычислительной техники и ее методов исследования. Поэтому возникает необходимость начать изучение в ведущих университетах курса современного математического анализа, получившего дальнейшее развитие под влиянием новых открытий в области алгебры, геометрии и топологии. Это же, в свою очередь, приводит к необходимости создания такого учебника, в котором достаточно глубоко были бы изложены современные основы математического анализа, и который удовлетворял бы как внутренние требования самой математики, так и возрастающие потребности практики, способствовал развитию математического образования студентов.

Предмет математического анализа — это теория действительных чисел, теория пределов, теория функций, дифференциальное и интегральное исчисления и изучение объектов, получаемых в результате применения неограниченного числа арифметических операций к элементам различных пространств (ряды, бесконечные произведения).

Метод математического анализа как науки есть теория пределов.

Понятие предела переменной величины и методы его нахождения являются главным инструментом математического анализа. Это понятие положено в основу определения новых категорий (например, суммы ряда, бесконечного произведения, действительного числа, производной, меры интеграла и т. д.), а также разработки методов исследования и решения новых классов задач.

Современный математический анализ, по мнению авторов, является анализом функций в конечномерных пространствах. При таком подходе устраняется существовавший до настоящего времени в учебной литературе разрыв между математическим и функциональным анализом — естественным продолжением и обобщением математического анализа.

Учебник по современному математическому анализу содержит основные понятия и терминологию функционального анализа, что дает возможность студенту без особых затруднений перейти к овладению функциональным анализом. Кроме того в нем систематически используется современная символика и рассматриваются традиционные операции анализа над конечномерными объектами (векторами, матрицами) и их метрическими характеристиками, шире охватываются основные операции анализа: дифференцирование и интегрирование рассмотрено для таких объектов, как вектор-функции и функциональные матрицы, введение лебеговой меры нуль расширяет множество интегрируемых функций.

Излагаемый материал учебника иллюстрируется многими примерами и задачами, помещенными непосредственно после введенных понятий и доказательства

определенных утверждений. Задачи и примеры подобраны так, чтобы они способствовали более глубокому усвоению теоретического материала, приучали студентов к строгому мышлению, приобретению навыков практического применения анализа.

Избранная аксиоматическая теория действительных чисел соответствует стилю изложения основного учебного материала. Так, после введения полей действительных и комплексных чисел происходит постепенный переход к векторному пространству, а введение с помощью аксиом понятия нормы в векторном пространстве становится естественным обобщением рассмотренного ранее абсолютного значения в произвольном поле (теле), распространенном на поля действительных и комплексных чисел.

Хотя метрическое пространство введено в самом начале курса, используется оно в полной мере только после изучения пределов числовых последовательностей, когда полностью укрепились основные представления о пределах.

Метрическое пространство, с одной стороны, являясь абстрактным понятием, делает метод предельного перехода универсальным и способствует обобщению понятия предела, а с другой стороны, вплотную подводит читателя к еще более общему понятию, каким является топологическое пространство.

В качестве основной структуры избрано векторное нормированное полное пространство, т. е. пространство Банаха. Необходимость такого подхода обусловливается тем, что только в векторном пространстве над полем действительных чисел становится возможным построение разностного отношения, пределом которого, в случае его существования, является производная. И хотя для этого достаточно только нормированного векторного пространства, требование полноты необходимо для того, чтобы доказать существование предела, не зная его заранее.

Для построения интеграла также необходимо иметь возможность суммировать функции и умножать их на действительные числа. В этом случае становится возможным построение суммы, называемой интегральной. Поскольку эта сумма построена в векторном нормированном полном пространстве, то возможно определить условия, при которых будет существовать ее предел, называемый интегралом.

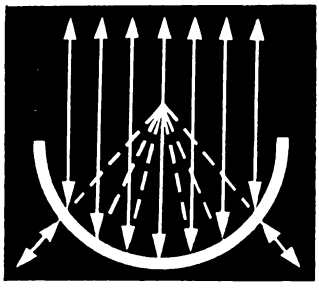
Кроме того, пользуясь такими категориями, как поле (тело), векторное пространство, абсолютное значение, норма, полнота, студент может заранее предвидеть, для каких математических объектов возможно построить сумму ряда, производную или интеграл. Наконец, все это вместе формирует у студентов современные взгляды на математику и повышает его математическую культуру.

В учебнике до естественных границ выделено множество интегрируемых функций. Проиллюстрировано на многих примерах применение интегрального и дифференциального исчисления. В заключение рассматривается интеграл Стилтьеса.

В учебнике учтена связь с программами по математике в средней школе, а отбор материала соответствует ныне действующим программам по математическому анализу для физико-математических специальностей университетов.

Авторы выражают благодарность доктору физ.-мат. наук проф. Н. П. Купцову, кандидату физ.-мат. наук доц. В. Ф. Емельянову, доктору физ.-мат. наук, проф. Н. М. Матвееву, доктору физ.-мат. наук проф. В. П. Петренко и кандидату физ.-мат. наук доц. Г. П. Головачу за ценные замечания и полезные советы, способствовавшие улучшению рукописи.

Все замечания и пожелания по улучшению содержания учебника просим направлять по адресу: *252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7, Головное издательство издательского объединения «Вища школа», редакция литературы по математике и физике.*



1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. Некоторые важнейшие логические символы. В математике часто некоторые словесные выражения заменяют посредством символов. Так, например, символом $\forall$ заменяют выражение «для произвольного», или «для любого», или «каково бы ни было», а символом $\exists$ — выражение «существует», или «найдется». Символы $\forall$ и $\exists$ называются *кванторами*.

Запись $A \Rightarrow B$ *(импликация)* означает, что из справедливости высказывания A вытекает справедливость высказывания B. Если, кроме того, из справедливости высказывания B вытекает справедливость A, то записываем $A \Leftrightarrow B$. Если $A \Leftrightarrow B$, то высказывание B является необходимым и достаточным условием для того, чтобы выполнялось высказывание A.

Если предложения A и B справедливы одновременно, то записываем $A \wedge B$. Если же справедливо хотя бы одно из предложений A или B, то записываем $A \vee B$.

1.2. Операции над множествами. Математическое понятие *множества* считается достаточно простым и интуитивно ясным. Множество задается правилом или признаком, согласно которому определяем, принадлежит ли данный элемент множеству или не принадлежит.

Для записи множества существуют различные формы. Например, $A = \{x\}$, где x — общее наименование элементов множества A. Часто множество записывают в виде $A = \{a, b, c, \ldots\}$, где в фигурных скобках указаны элементы множества A. Существует форма записи, которая одновременно указывает признак принадлежности элемента x к множеству A: $A = \{x :$ если x удовлетворяет условию $R\}$.

На протяжении всего курса будем пользоваться обозначениями:

$\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел;
$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел;
$\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел;
$\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел.

Запись $a \in A$ (или $A \ni a$) означает, что элемент a принадлежит множеству A.

Запись $a \notin A$ (или $A \not\ni a$) означает, что элемент a не принадлежит множеству A.

Множество B, все элементы которого принадлежат множеству A, называют *подмножеством* множества A или *частью множества* A и записывают $B \subset A$ (или $A \supset B$).

С целью формального удобства вводим *пустое* множество, т. е. множество, не содержащее ни одного элемента. Пустое множество обозначим символом $\varnothing$. Любое множество содержит пустое множество в качестве своего подмножества. Всегда $A \subset A$, так как каждый элемент множества A, естественно, принадлежит A.

Если $A \subset B \wedge B \subset A$, то A и B называются *равными множествами*, при этом записывают $A = B$.

Если $A \subset \mathcal{T}$, то множество элементов множества $\mathcal{T}$, не принадлежащих A, называют *дополнением* множества A к множеству $\mathcal{T}$ и обозначают $C_{\mathcal{T}}A$, или CA, если известно, к какому множеству берется дополнение. Таким образом, $C_{\mathcal{T}}A = \{x : x \in \mathcal{T} \wedge x \notin A\}$. Если $A \subset \mathcal{T}$, $B \subset \mathcal{T}$, то иногда дополнение множества B к множеству A называют *разностью множеств* A и B и обозначают $A \setminus B$, т. е. $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Пусть A и B части множества $\mathcal{T}$.

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$. Аналогично, если A_j, $j = 1, 2, \ldots, n$,— части множества $\mathcal{T}$, то их объединением будет множество

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \{x : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\}.$$

Пересечением частей A и B множества $\mathcal{T}$ называется множество $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$. Аналогично, символом $\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ записывают пересечение частей A_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, множества $\mathcal{T}$, т. е. множество

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = \{x : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\}.$$

Если каждому элементу $\mu \in M$ сопоставлено некоторое множество A_μ, то говорят, что задано *семейство множеств* $\{A_\mu\}$, $\mu \in M$. В этом случае множество $\bigcup_{\mu \in M} A_\mu = \{x :$ все x такие, что $x \in A_\mu$ хотя бы для одного $\mu \in M\}$ называется *объединением семейств* множеств $\{A_\mu\}$, $\mu \in M$, а множество $\bigcap_{\mu \in M} A_\mu = \{x : x \in A_\mu \quad \forall \mu \in M\}$ — *пересечением* этого семейства.

Пусть A, B и C — произвольные части множества $\mathcal{T}$. Тогда непосредственно из определений объединения, пересечения и дополнения вытекают следующие предложения:

1) $A \cup B \subset \mathcal{T}$, $A \cap B \subset \mathcal{T}$;
2) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
5) $A \cup A = A \cap A = A$;
6) $(A \cup B = B) \Leftrightarrow (A \cap B = A)$;
7) $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \mathcal{J} = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup \mathcal{J} = \mathcal{J}$;
8) $A \cup CA = \mathcal{J}$, $A \cap CA = \varnothing$.

Если для элементов множества $\sigma = \{A, B, C, \ldots\}$ определено объединение $\cup$ и пересечение $\cap$, для которых выполняются отношения 1) — 8), то тройка $(\sigma, \cup, \cap)$ называется *булевой алгеброй*. Таким образом, если σ — семейство всех частей множества $\mathcal{J}$, то $(\sigma, \cup, \cap)$ — булева алгебра.

В булевой алгебре частично просматривается некоторая аналогия с действительными числами, если $\cup$ интерпретировать как сложение, а $\cap$ — как умножение действительных чисел. Тогда равенства 1) — 3) и первое из равенств 4) выполняются. Однако, например, второе из равенств 4) или равенство 5) уже не выполняются, поскольку для действительных чисел $A + (B \cdot C) \neq (A + B)(A + C)$ и в общем случае $A + A \neq A$, $AA \neq A$.

Для произвольных частей множества $\mathcal{J}$ справедливы равенства:

$$A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A, \tag{1}$$

$$C(A \cup B) = CA \cap CB, \quad C(A \cap B) = CA \cup CB, \tag{2}$$

$$CCA = A, \quad C\mathcal{J} = \varnothing, \quad C\varnothing = \mathcal{J}. \tag{3}$$

Равенства (1) — (3) справедливы для произвольной булевой алгебры.

В самом деле, пользуясь свойствами 4) и 5), получаем первое из равенств (1):

$$A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B) = A \cup (A \cap B).$$

Докажем второе из равенств (1). Пусть $a \in (A \cup (A \cap B))$, тогда $(a \in A) \vee (a \in (A \cap B))$. Если $a \in (A \cap B)$, то $(a \in A) \wedge (a \in B)$. Следовательно, в обоих случаях $a \in A$, поэтому

$$(A \cup (A \cap B)) \subset A. \tag{4}$$

Если же $b \in A$, то $b \in (A \cup (A \cap B))$, следовательно,

$$A \subset (A \cup (A \cap B)). \tag{5}$$

Из включений (4) и (5) вытекает второе из равенств (1).

Докажем первое из равенств (2) (второе доказывается аналогично).

Пусть $a \in C(A \cup B)$, тогда $a \notin A \cup B$, поэтому $a \notin A \wedge a \notin B$. Тогда $a \in CA \wedge a \in CB$, и, следовательно, $a \in (CA \cap CB)$. Итак,

$$C(A \cup B) \subset (CA \cap CB). \tag{6}$$

Пусть теперь $b \in (CA \cap CB)$, тогда $(b \in CA) \wedge (b \in CB)$, т. е. $b \notin A \wedge b \notin B$, $b \notin (A \cup B)$, следовательно, $b \in C(A \cup B)$, так что

$$CA \cap CB \subset C(A \cup B). \tag{7}$$

Отношения (6) и (7) эквивалентны первому из равенств (2).

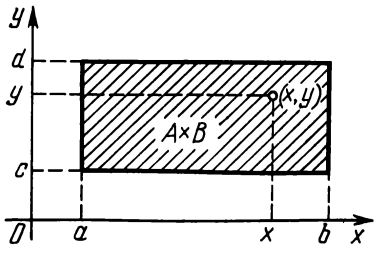


Рис. 1

Пусть
$D = \{(x, x): x \in A\}$.
Привести пример $A \times B$, чтобы:
а) $D \subset A \times B$,
б) D — не принадлежит $A \times B$.

Докажем теперь первое из равенств (3).

Если $a \in \mathrm{C}\mathrm{C}A$, то $a \notin \mathrm{C}A$, а поэтому $a \in A$. Наоборот, если $a \in A$, то $a \notin \mathrm{C}A$, а поэтому $a \in \mathrm{C}\mathrm{C}A$; отсюда $\mathrm{C}\mathrm{C}A = A$. Равенства $\mathrm{C}\mathcal{I} = \varnothing$ и $\mathrm{C}\varnothing = \mathcal{I}$ доказываются аналогично.

Свойства, записанные равенствами (2), называются *принципом двойственности;* их можно прочитать следующим образом: дополнение к объединению множеств равно пересечению их дополнений, а дополнение к пересечению множеств равно объединению их дополнений. Без труда принцип двойственности переносится на произвольное число подмножеств A_μ, при этом записывают

$$\mathrm{C} \bigcup_\mu A_\mu = \bigcap_\mu \mathrm{C}A_\mu, \quad \mathrm{C} \bigcap_\mu A_\mu = \bigcup_\mu \mathrm{C}A_\mu. \tag{8}$$

В этом случае символ дополнения C можно менять местом со знаком $\cup$ или $\cap$, при этом один из этих знаков переходит в другой

Симметрической разностью двух множеств A и B называется множество, определяемое как объединение разностей $A \setminus B$ и $B \setminus A$. Симметрическую разность обозначим $A \triangle B$.

Для симметрической разности справедливо равенство

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B),$$

которое предлагаем доказать самостоятельно в качестве упражнения.

Два элемента a и b называют *упорядоченной парой* и обозначают (a, b), если указано какой из них первый, какой второй. При этом $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$. Аналогично определяется *упорядоченная система* из n элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, которую обозначают $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называют *координатами* упорядоченной системы $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Пусть $A \subset \mathcal{I}$, $B \subset \mathcal{I}$. Совокупность всевозможных упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$, называют *произведением* множеств A и B и обозначают $A \times B$. Аналогично запись $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ обозначает произведение множеств $A_j \subset \mathcal{I}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, т. е. совокупность всевозможных упорядоченных систем $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_j \in A_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Приведем примеры.

1. Пусть $A = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$, $B = \{y : c \leqslant y \leqslant d\}$, тогда произведение $A \times B$ взаимно-однозначно множеству точек (x, y), заполняющих прямоугольник (рис. 1).

2. Если $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, то $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ является натуральной решеткой на плоскости.

§ 2. ФУНКЦИЯ. ОТОБРАЖЕНИЕ

2.1. Функция.

Определение. *Отображением множества E в множество F или функцией, определенной на множестве E со значениями в F, называется правило, или закон f, который каждому элементу $x \in E$ ставит в соответствие определенный элемент $f(x) \in F$.*

Элемент $x \in E$ называют переменным, или аргументом функции f, элемент $f(x) \in F$ называют значением функции f, или образом; при этом элемент $x \in E$ называется прообразом элемента $f(x) \in F$

Следует четко различать переменное x, которое является элементом множества E, значение функции $f(x)$, которое является элементом множества F и отображение f, которое представляет собой закон соответствия между элементами $x \in E$ и $f(x) \in F$.

Отображение (функцию) обычно обозначают буквой f и записывают $f : E \to F$, указывая тем самым, что f отображает множество E в F. Употребляется также обозначение $x \mapsto f(x)$, указывающее, что элементу x соответствует элемент $f(x)$. Иногда функцию удобно задавать посредством равенства, в котором содержится закон соответствия Например, можно говорить, что «функция определена равенством $f(x) = x^2$, $x \in \mathcal{J}$, $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$». Если «$y$» — общее наименование элементов множества F, т. е. $F = \{y\}$, то отображение $f : E \to F$ можно записать, допустив некоторую неточность, при помощи равенства $y = f(x)$.

2.2. Образ и прообраз подмножества при заданном отображении. Пусть $f : E \to F$ и $D \subset E$. Множество элементов из F, каждый из которых является образом хотя бы одного элемента из D при отображении f, называется *образом* множества D и обозначается $f(D)$. Очевидно,

$$f(D) = \{f(x) \in F : x \in D\}.$$

Если $f(E) = F$, то f отображает E на F. Если же $f(E) \subset F$, то f отображает E в F.

Пусть $Y \subset F$, тогда множество элементов $x \in E$ таких, что $f(x) \in Y$, называется *прообразом* множества Y при отображении f и обозначается $f^{-1}(Y)$. Ясно, что $f^{-1}(Y) = \{x \in E : f(x) \in Y\}$. Если $y \in F$, то $f^{-1}(y) = \{x \in E : f(x) = y\}$. Если при каждом $y \in F$ множество $f^{-1}(y)$ состоит не более чем из одного элемента $x \in E$, то f называется *взаимно-однозначным отображением* E в F. Впрочем, можно определить взаимно-однозначное отображение f множества E на F.

Определение. *Отображение $f : E \to F$ называется:*

инъективным (или инъекцией, или взаимно-однозначным отображением множества E в F), если $(x \neq x') \Rightarrow (f(x) \neq f(x'))$, или если $\forall\, y \in F$ уравнение $f(x) = y$ имеет не более одного решения;

сюръективным (или сюръекцией, или отображением множества E на F), если $f(E) = F$, или если $\forall\, y \in F$ уравнение $f(x) = y$ имеет по крайней мере одно решение;

биективным (или биекцией, или взаимно-однозначным отображением множества E на F), если оно инъективно

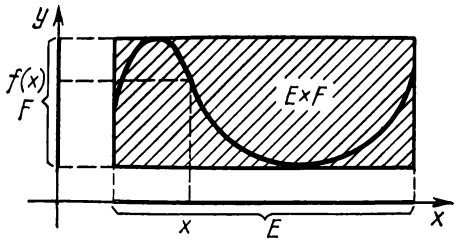


Рис. 2

Если $G = \{(x, f(x)): x \in E \wedge f(x) \in F\}$, то $G \subset E \times F$. Возможно ли, чтобы $G = E \times F$?

и сюръективно, или если $\forall\, y \in F$ уравнение $f(x) = y$ имеет одно и только одно решение.

Инъективное отображение f множества E в F является биективным отображением множества E на $f(E)$.

2.3. Суперпозиция отображений. Обратное, параметрическое и неявное отображения.

Определение 1. *Пусть $f : E \to F$, а $g : F \to G$. Поскольку $f(E) \subset F$, то отображение g каждому элементу $f(x) \in f(E)$ относит определенный элемент $g(f(x)) \in G$.*

Таким образом, каждому $x \in E$ посредством правила $g \circ f$ поставлено в соответствие элемент $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $g(f(x)) \in G$. Тем самым определено новое отображение (или новую функцию), которое назовем *композицией* отображений, или *суперпозицией* отображений, или *сложным отображением*.

Определение 2. *Пусть f — некоторое биективное отображение множества E на F и $F = \{y\}$. В силу биективности f каждому $y \in F$ соответствует единственный образ x, который обозначим через $f^{-1}(y)$, и такой, что $f(x) = y$.*

Таким образом, определено отображение $f^{-1}: F \to E$, которое называется *обратным* отображению f, или *обратной функцией* функции f. Очевидно, отображение f обратное отображению f^{-1} Поэтому отображения f и f^{-1} называют *взаимно-обратными;* для них справедливы соотношения

$$f(f^{-1}(y)) = y \qquad \forall\, y \in F, \qquad f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall\, x \in E.$$

Определение 3. *Пусть $\varphi : \Omega \to X$, $\psi : \Omega \to Y$, причем хотя бы одно из этих отображений, например, φ, биективно. Тогда существует обратное отображение $\varphi^{-1}: X \to \Omega$, а значит, $\psi \circ \varphi^{-1}: X \to Y$.*

О так определенном отображении говорят, что оно задано *параметрически* при помощи отображений $\varphi : \Omega \to X$, $\psi : \Omega \to Y$, причем переменное из Ω называется *параметром*.

Определение 4. *Пусть на множестве $G = X \times Y$ определено отображение $\mathcal{F} : G \to \Delta$, где множество Δ содержит нулевой элемент. Предположим, что существуют множества $E \subset X$, $B \subset Y$ такие, что при каждом фиксированном $x \in E$ уравнение $\mathcal{F}(x, y) = 0$ имеет единственное решение $y \in B$. Тогда на множестве E можно определить отображение $f : E \to B$, которое каждому $x \in E$ ставит в соот-*

ветствие значение $y \in B$, которое при таком x является решением уравнения $\mathcal{F}(x, y) = 0$.

Относительно так определенного отображения $y = f(x)$, $x \in E$, $y \in B$, говорят, что оно задано неявно посредством уравнения $\mathcal{F}(x, y) = 0$.

Например, пусть $\mathcal{F}(x, y) \equiv y^2 - x^2 - y + x$, $X = \{x \in \mathbb{R}: -\infty < x < +\infty\}$, $Y = \{y \in \mathbb{R}: -\infty < y < +\infty\}$. Поскольку $\forall x \in E$, $E \subset X$, $E = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{2} \leqslant x < +\infty\right\}$, уравнение $\mathcal{F}(x, y) \equiv y^2 - x^2 - y + x = 0$ имеет единственное решение $y = x$, $x \in B$, $B \subset Y$, $B = \left\{y \in \mathbb{R}: \frac{1}{2} \leqslant y < +\infty\right\}$, то это уравнение на множестве E определяет неявное отображение $y = x$, значения которого расположены в множестве B.

Определение 5. *Отображение $f: E \to F$ называется продолжением отображения $g: D \to F$, а g — сужением отображения f, если $E \supset D$ и $f(x) = g(x)$ $\forall x \in D$.*

Сужение отображения $f: E \to F$ на множество D иногда обозначают так: $f \mid D$.

Определение 6. *График отображения $f: E \to F$ называется множество упорядоченных пар $(x, f(x))$, где $x \in E$, $f(x) \in F$.*

Ясно, что график есть подмножество произведения $E \times F$ (рис. 2).

§ 3. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

3.1. Отношения порядка. Из элементарного курса математики известно правило сравнения действительных чисел, которое дает возможность указать, каким из трех знаков $>$, $<$ или $=$ связана любая упорядоченная пара действительных чисел. Это одно из фундаментальных правил, которое вместе с правилами сложения и умножения лежит в основе построения определяющих математических понятий. Для сравнения двух действительных чисел между ними вводится *отношение порядка* и *отношение эквивалентности*. Ниже изложим основные определения и свойства этих отношений.

Определение 1. *Бинарным отношением* в *множестве E называется всякое подмножество B из произведения $E \times E$.*

Если упорядоченная пара (a, b), где $a \in E$, $b \in E$, принадлежит B, то говорят, что элементы a и b связаны отношением B.

Определение 2. *Бинарное отношение Ω называется отношением порядка в множестве E, если оно:*

а) *рефлексивно:* $(a, a) \in \Omega$ $\forall a \in E$;

б) *транзитивно:* $((a, b) \in \Omega \wedge (b, c) \in \Omega) \Rightarrow ((a, c) \in \Omega)$;

в) *антисимметрично:* $((a, b) \in \Omega \wedge (b, a) \in \Omega) \Rightarrow (a = b)$.

При этом говорят, что отношение Ω упорядочивает E, или что Ω является отношением порядка в E.

Вместо того чтобы писать $(a, b) \in \Omega$, используем обозначения $a \leqslant b$. В этом случае $b \geqslant a$ означает $a \leqslant b$. Символ $\leqslant$ используем, если элементами E являются действительные числа. Тогда *бинарное отношение называется отношением порядка, если оно:*

а) *рефлексивно:* $a \leqslant b$;

б) *транзитивно:* $(a \leqslant b) \wedge (b \leqslant c) \Rightarrow a \leqslant c$;
в) *антисимметрично:* $(a \leqslant b) \wedge (b \leqslant a) \Rightarrow a = b$.

В общем случае отношение порядка не может упорядочить все пары. Если $\forall\, a,\ b \in E$ всегда $(a,\ b) \in \Omega$ или $(b,\ a) \in \Omega$, то говорят, что множество E *вполне упорядочено*. Например, множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел вполне упорядочено посредством символа $\leqslant$. Если только для некоторых $a,\ b \in E$ $(a, b) \in \Omega$, то множество E частично упорядочено.

3.2. Отношение эквивалентности.

Определение. *Бинарное отношение $\mathcal{R}$ называется отношением эквивалентности в множестве E, если подмножество $\mathcal{R}$:*

а) *рефлексивно:* $(a,\ a) \in \mathcal{R}$;
б) *симметрично:* $((a,\ b) \in \mathcal{R}) \Rightarrow ((b,\ a) \in \mathcal{R})$;
в) *транзитивно:* $((a,\ b) \in \mathcal{R}) \wedge ((b,\ c) \in \mathcal{R}) \Rightarrow ((a,\ c) \in \mathcal{R})$.

Вместо того чтобы писать $(a,\ b) \in \mathcal{R}$, обычно пишут $a \sim b$. Тогда *бинарное отношение называется отношением эквивалентности, если оно:*

а) *рефлексивно:* $a \sim b$;
б) *симметрично:* $(a \sim b) \Rightarrow (b \sim a)$;
в) *транзитивно:* $((a \sim b) \wedge (b \sim c)) \Rightarrow (a \sim c)$.

Если в E определено отношение эквивалентности, то подмножество $A \subset E$, состоящее из элементов, эквивалентных некоторому заданному элементу, называется *классом эквивалентности*. При этом множество всех классов эквивалентности называется *фактор-множеством*. Класс эквивалентности определяется любым из своих членов. Например, между рациональными числами установим отношение эквивалентности следующим образом: будем считать, что $\frac{p}{q} \sim \frac{p'}{q'}$, если $pq' = qp'$. Соответствующий класс эквивалентности называется *рациональным числом*. Так что отождествим числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{km}{kn}$, где m и n — целые, а k — натуральное число.

§ 4. БИНАРНЫЕ ОПЕРАЦИИ

4.1. Внутренние и внешние бинарные операции. В математике вводятся различные правила вычислений, например, сложение, умножение, возведение в степень и др. Эти операции связывают два числа с третьим числом, называемым соответственно суммой, произведением и степенью. Дадим общее определение таких операций.

Определение 1. *Внутренней бинарной операцией, или внутренним законом композиции, на множестве E называется отображение $f : E \times E \to E$.*

Примером внутренней бинарной операции может служить сложение или умножение чисел.

Пусть теперь заданы два множества E и F.

Определение 2. *Внешней бинарной операцией, или внешним законом композиции, на множестве E называется отображение $f : E \times F \to E$.*

Например, пусть $E = \{g\}$, где $g : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$, а $F = \mathbb{R}$. Тогда произведение ag есть внешняя бинарная операция.

Хотя бинарная операция является функцией, для ее записи вместо функционального обозначения $f(a, b) = c$ употребляют специальные обозначения, например, «+» для сложения: $a + b = c$; знак «·» для умножения: $a \cdot b = c$; для возведения в степень употребляют обозначение $a^b = c$ и т. д. Для изучения общих свойств бинарных операций используем символ $\top$ (или $\perp$) и записываем $a \top b = c$.

4.2. Свойства бинарных операций.

Определение 1. *Внутренняя бинарная операция* $\top$ *называется коммутативной, если*

$$a \top b = b \top a \qquad \forall a, b \in E.$$

Например, операции сложения и умножения действительных чисел коммутативны, а возведения в степень — не коммутативны: $2^5 = 32$, $5^2 = 25$.

Определение 2. *Внутренняя бинарная операция* $\top$ *называется ассоциативной, если*

$$(a \top b) \top c = a \top (b \top c) \qquad \forall a, b, c \in E.$$

Операции сложения и умножения действительных чисел ассоциативны, а возведения в степень — не ассоциативна: $(2^2)^3 = 64$, $2^{(2^3)} = 256$. Ассоциативными будут также операции объединения $\cup$ и пересечения $\cap$ множеств.

Определение 3. *Элемент* $a \in E$ *называется регулярным относительно внутренней бинарной операции* $\top$, *если* $\forall x, y \in E$

$$((a \top x = a \top y) \wedge (x \top a = y \top a)) \Rightarrow (x = y).$$

Пусть операция $\top$ не коммутативна. Тогда, если $(a \top x = a \top y) \Rightarrow (x = y)$, то элемент a называется *левым регулярным* элементом; если же $(x \top a = y \top a) \Rightarrow (x = y)$, то элемент a называется *правым регулярным* элементом. В этих случаях говорят, что можно *сократить* на a.

Приведем примеры.

1. Пусть $\Sigma = \{A, B, D, \ldots\}$ — семейство всех частей множества $\mathcal{J}$. Тогда, если $A \subset D$, $B \subset D$, то имеем

$$(A \cap D = B \cap D) \Rightarrow (A = B),$$

а поскольку операция $\cap$ коммутативна, то D является регулярным элементом относительно пересечения.

Если же $F \subset A$, $F \subset B$, тогда

$$(F \cup A = F \cup B) \Rightarrow (A = B),$$

а так как операция $\cup$ коммутативна, то F — регулярный элемент относительно объединения.

2. Поскольку для любого целого a, отличного от нуля и единицы,

$$(a^x = a^y) \Rightarrow (x = y),$$

то любое целое a, отличное от нуля и единицы, является левым регулярным элементом относительно операции возведения в степень.

Определение 4. *Если существует элемент* $e \in E$ *такой, что*

$$e \top a = a \qquad (a \top e = a) \qquad \forall a \in E,$$

то e *называется* *левым* *(правым)* *нейтральным элементом.*

Если бинарная операция $\top$ *внутренняя и* $e \top a = a \top e = a$ $\forall a \in E$, *то* e *называется* *нейтральным элементом.*

Так, в примере 1 все множество $\mathcal{J}$ является нейтральным элементом относительно операции $\cap$, так как $\forall A \in \Sigma$ имеем

$$A \cap \mathcal{J} = \mathcal{J} \cap A = A;$$

пустое множество $\varnothing$ является нейтральным элементом относительно операции $\cup$, поскольку $\forall A \in \Sigma$ справедливо равенство

$$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A.$$

Определение 5. *Пусть множество* E *обладает внутренней бинарной операцией* $\top$ *и* e *— нейтральный элемент. Тогда элемент* $\bar{a} \in E$ *называется* *симметричным элементом к элементу* a, *если*

$$a \top \bar{a} = e.$$

Например, если a действительное число, то $-a$ симметричный ему элемент относительно сложения, который обычно называют *противоположным* элементом; число a^{-1} является симметричным элементом числа a относительно умножения и называется *обратным* элементом.

Теорема 1. *Если нейтральный элемент существует, то он единственный.*

◀ Если предположить существование двух нейтральных элементов e и e_1, то

$$e = e \top e_1 = e_1 \top e = e_1. \blacktriangleright$$

Теорема 2. *Пусть закон* $\top$ *ассоциативен, но не обязательно коммутативен, а элемент* a *регулярен. Тогда, если* a *обладает симметричным элементом* $\bar{a}$, *то этот элемент будет единственным.*

◀ Имеем

$$a \top (\bar{a} \top a) = (a \top \bar{a}) \top a = e \top a = a.$$

Поскольку e — нейтральный элемент, то $a = a \top e$ и $a \top (\bar{a} \top a) = a \top e$, а так как a регулярен, то $\bar{a} \top a = e$.

Следовательно, если закон $\top$ ассоциативен, а элемент a регулярен, то

$$(a \top \bar{a} = e) \Rightarrow (\bar{a} \top a = e). \tag{1}$$

Далее, если предположить существование еще одного симметричного элемента $\bar{a}_1$, т. е. такого элемента $\bar{a}_1$, что $a \top \bar{a}_1 = e$, то, пользуясь законом ассоциативности и отношением (1), получаем

$$\bar{a} = \bar{a} \top e = \bar{a} \top (a \top \bar{a}_1) = (\bar{a} \top a) \top \bar{a}_1 = e \top \bar{a}_1 = \bar{a}_1. \blacktriangleright$$

Определение 6. *Пусть на множестве E определены две бинарные операции $\top$ и $\perp$. Тогда операция $\top$ называется дистрибутивной относительно операции $\perp$, если*

$$a \top (b \perp c) = (a \top b) \perp (a \top c) \qquad \forall a,\ b,\ c \in E.$$

Так, например, операция объединения и пересечения множеств дистрибутивна одна относительно другой:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

§ 5. ИЗОМОРФИЗМ

Пусть множество E обладает внутренней бинарной операцией $\top$, а множество F внутренней бинарной операцией $\perp$.

Определение. *Изоморфизмом множества E на F называется взаимно-однозначное отображение $f : E \to F$ такое, что*

$$f(a \top b) = f(a) \perp f(b) \qquad \forall a,\ b \in E;$$

при этом говорят, что множества E и F изоморфны относительно операций $\top$ и $\perp$.

Например, пусть $E = \{n\}$, $n \in \mathbb{N}$, операция $\top$ — сложение; $F = \{2^n\}$, операция $\perp$ — умножение. Отображение $f : n \mapsto 2^n$ является изоморфизмом, поскольку $n + m \mapsto 2^{n+m} = 2^n \cdot 2^m$, т. е. $f(n + m) = f(n) \cdot f(m)$. Отображение f взаимно-однозначно, так как $(2^p = 2^q) \Rightarrow (p = q)$.

Если множество E, обладающее внутренними бинарными операциями $\top^{(1)}, \top^{(2)}, \ldots, \top^{(n)}$, изоморфно множеству F с соответствующими бинарными операциями, т. е. если существует взаимно-однозначное отображение $f : E \to F$ такое, что $f(a \top^{(i)} b) = f(a) \perp^{(i)} f(b)$, $i = \overline{1, n}$, $\forall a,\ b \in E$, то часто эти множества отождествляются. Их элементы и внутренние бинарные операции, соответствующие друг другу при изоморфизме, обозначаются одними и теми же символами.

§ 6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Определение. *Математической структурой называется множество объектов или несколько множеств объектов различной природы, обладающее системой бинарных отношений и бинарных операций, подчиненных определенным аксиомам.*

Рассмотрим примеры математических структур.

Группа. Множество E, обладающее внутренней бинарной операцией $\top$, называется *группой*, если операция $\top$ удовлетворяет следующим аксиомам:

1) операция ассоциативна;
2) имеется нейтральный элемент;
3) всякий элемент имеет симметричный.

Если, кроме того,

4) операция $\top$ коммутативна, то группа называется *коммутативной, или абелевой.*

Группа является математической структурой, которую обозначают символом $(E, \top, =)$.

Если в группе бинарная операция $\top$ имеет аддитивное (мультипликативное) обозначение «$+$» («$\cdot$»), то группу называют *аддитивной (мультипликативной)*, а нейтральный элемент *нулевым (единичным)* и обозначают символом 0 (для мультипликативной группы — символом 1, или e, или I и т. д.).

Кольцо. *Кольцом* называется абелева группа, обладающая второй бинарной операцией $\perp$, которая ассоциативна и дистрибутивна относительно первой бинарной операции $\top$.

Если вторая внутренняя бинарная операция $\perp$ коммутативна, то кольцо называется *коммутативным.*

Если кольцо содержит нейтральный элемент относительно второй бинарной операции, то оно называется *унитарным.*

Например, множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел образует унитарное кольцо, которое можно обозначить символом $(\mathbb{Q}, +, \cdot, =)$.

Если вторая бинарная операция паре элементов a и b, отличных от нейтрального элемента 0 относительно первой бинарной операции, ставит в соответствие нейтральный элемент 0, то эти два элемента называются *делителями нуля.*

Например, если $\top$ сложение, а $\perp$ умножение, то кольцо $(E, +, \cdot, =)$ имеет делители нуля, если равенство $a \cdot b = 0$ возможно при $a \neq 0$ и $b \neq 0$, $a, b \in E$.

Тело. Если кольцо, лишенное нейтрального элемента относительно первой бинарной операции, образует группу относительно второй бинарной операции, то такое кольцо называется *телом.*

Поле. Тело, в котором вторая внутренняя бинарная операция коммутативна, называется *полем.*

Если элементы поля вполне упорядочены посредством отношения $\leqslant$, то поле называется *упорядоченным.* Упорядоченное поле является математической структурой, которую обозначают символом $(E, +, \cdot, \leqslant)$.

Ниже рассмотрим более сложные математические структуры.

§ 7. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

7.1. Аксиомы действительных чисел. Рассмотрим одно из основных понятий математики — понятие числа.

Целые положительные числа появились в результате счета, а рациональные положительные числа, т. е. числа, которые можно записать в виде отношения $\frac{m}{n}$ двух натуральных чисел,— в результате измерений.

Потребности в практической деятельности человека привели к необходимости рассматривать и отрицательные числа. Это расширило класс чисел, которые в современной терминологии называют *рациональными числами.*

Уже в Древней Греции было известно существование несоизмеримых отрезков. Стремление отыскать точное числовое значение этих отрезков привело к понятию *иррационального* числа, т. е. числа, которое не является рациональным. Обосновать теорию действительных чисел пытались ученые всех времен. С развитием анализа в XVII и XVIII вв. действительные числа становились основным объектом исследования. Однако теория действительного числа была построена рядом математиков (Дедекинд, Кантор, Вейерштрасс) лишь во второй половине XIX в.

В литературе теория действительного числа достаточно полно изложена в отечественных и зарубежных изданиях. Наша задача — описать основные аксиомы действительных чисел и вывести из них все дальнейшие основные свойства действительных чисел.

Определение 1. *Множество* $\mathbb{R}$ *элементов* $a, b, c, \ldots$ *называется множеством действительных (или вещественных) чисел, если для этих элементов установлены операции сложения, умножения и отношения порядка, которые подчинены указанным ниже аксиомам (свойствам).*

Аксиомы сложения

С.0. В множестве $\mathbb{R}$ определена внутренняя бинарная операция — сложение

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (a, b) \to a + b,$$

которая каждой паре элементов $a, b \in \mathbb{R}$ однозначно ставит в соответствие некоторый элемент множества $\mathbb{R}$, называемый их *суммой* и обозначаемый $a + b$. При этом выполняются следующие аксиомы:

С.1. $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (ассоциативный закон).

С.2. В $\mathbb{R}$ существует число, называемое нулем и обозначаемое символом 0, такое, что

$$a + 0 = a,$$

т. е. в $\mathbb{R}$ существует нейтральный элемент операции сложения.

С.3. $\forall a \in \mathbb{R}$ существует такое число $-a \in \mathbb{R}$, что выполнено равенство

$$a + (-a) = 0.$$

Число $-a$ называется противоположным числу a.

С.4. $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$a + b = b + a.$$

Таким образом, множество $\mathbb{R}$ является *аддитивной абелевой группой.*

Аксиомы умножения

У.0. В множестве $\mathbb{R}$ определена внутренняя бинарная операция — умножение

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (a, b) \to a \cdot b,$$

которая каждой паре элементов $a, b \in \mathbb{R}$ однозначно ставит в соответствие некоторый элемент множества $\mathbb{R}$, называемый их *произведе-*

нием и обозначаемый $a \cdot b$. При этом выполняются следующие аксиомы:

У.1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (ассоциативный закон).

У.2. В $\mathbb{R}$ существует элемент, называемый *единицей* и обозначаемый 1, такой, что для всех ненулевых элементов множества $\mathbb{R}$ выполняется равенство

$$a \cdot 1 = a.$$

У.3. Для каждого $a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$ существует элемент $a^{-1} \in \mathbb{R}$, называемый обратным числу a и такой, что

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

У.4. $a \cdot b = b \cdot a \qquad \forall a,\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Следовательно, множество ненулевых элементов $\mathbb{R}$ является *мультипликативной абелевой группой.*

Д.1. Операция умножения дистрибутивна относительно сложения, т. е.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$$

Множество элементов a, b, c, ..., удовлетворяющее аксиомам С, У и Д, называется числовым полем, или просто полем. Это же множество без аксиомы У.4 является телом.

Аксиомы порядка

П.0. В множестве $\mathbb{R}$ задано отношение $\leqslant$, т. е. для любой пары элементов $a,\ b \in \mathbb{R}$ установлено, выполняется $a \leqslant b$ или нет. Причем отношение $\leqslant$ удовлетворяет следующим аксиомам:

П.1. $a \leqslant a$ для всех $a \in \mathbb{R}$ (рефлексивность).

П.2. Если $a \leqslant b \wedge b \leqslant a$, то $a = b$ (антисимметричность).

П.3. Из $a \leqslant b \wedge b \leqslant c$ следует $a \leqslant c$ (транзитивность).

П.4. Если $a,\ b \in \mathbb{R}$, то $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$ или то и другое.

ПП.1. Если $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ и $a \leqslant b$, то $a + c \leqslant b + c$.

ПП.2. Из $0 \leqslant a$ и $0 \leqslant b$ следует $0 \leqslant ab$, $a,\ b \in \mathbb{R}$.

Числовое поле, для которого выполняются аксиомы порядка, называется *упорядоченным числовым полем.*

Аксиома о верхней грани

Прежде чем сформулировать аксиому о верхней грани, дадим несколько определений.

Определение 2. *Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если существует такой элемент $M \in \mathbb{R}$, что $a \leqslant M \quad \forall a \in \mathbb{R}$, при этом число M называется верхней гранью множества A.*

Определение 3. *Верхняя грань M^* множества A называется точной верхней гранью множества A, если всякая другая верхняя грань M множества A не меньше числа M^*.*

Точная верхняя грань множества A обозначается символом $\sup A$ [1]. Сформулируем теперь аксиому о верхней грани.

В.0. Всякое непустое, ограниченное сверху множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань.

7.2. Основные групповые свойства. Приводимые ниже утверждения (кроме теорем 9 и 10) сформулированы для произвольных групп $(E, \top)$. При их доказательстве нельзя пользоваться свойством коммутативности. Естественно, что они остаются справедливыми для случая, когда $E = \mathbb{R}$.

Теорема 1. *В произвольной группе нейтральный элемент единственный. В частности, в множестве* $\mathbb{R}$ *числа нуль и единица единственны.*

◀ Нейтральный элемент группы единственный согласно теореме 1, п. 4.2. ▶

Теорема 2. *Если e — нейтральный элемент группы и $\bar{a}$ — симметричный элемент к элементу a, то $\bar{a} \top a = e$. В частности, в множестве* $\mathbb{R}$ *справедливы равенства* $(-a) + a = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$, $a^{-1}a = 1 \ \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

◀ В силу свойства ассоциативности, имеем

$$\bar{a} \top a = (\bar{a} \top a) \top e = (\bar{a} \top a) \top (\bar{a} \top \bar{\bar{a}}) = ((\bar{a} \top a) \top \bar{a}) \top \bar{\bar{a}} =$$
$$= (\bar{a} \top (a \top \bar{a})) \top \bar{\bar{a}} = (\bar{a} \top e) \top \bar{\bar{a}} = \bar{a} \top \bar{\bar{a}} = e. \ \blacktriangleright$$

Теорема 3. *В произвольной группе справедливо равенство $\bar{\bar{a}} = a$. В частности, если $E = \mathbb{R}$, то:*

1) $(-(-a)) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$; 2) $(a^{-1})^{-1} = a \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

◀ Имеем

$$\bar{\bar{a}} = e \top \bar{\bar{a}} = (a \top \bar{a}) \top \bar{\bar{a}} = a \top (\bar{a} \top \bar{\bar{a}}) = a \top e = a. \ \blacktriangleright$$

Теорема 4. *Если $a \in E$, $x \in E$ и $a \top x = e$, то $x = \bar{a}$. В частности, если $E = \mathbb{R}$, то:*

1) *из $a + x = 0$ следует $x = -a$;*
2) *из $ax = 1$, $a \neq 0$, следует $x = a^{-1}$.*

◀ Пользуясь законом ассоциативности и теоремой 2, находим

$$\bar{a} = \bar{a} \top e = \bar{a} \top (a \top x) = (\bar{a} \top a) \top x = e \top x = x. \ \blacktriangleright$$

Теорема 5. *В произвольной группе $\bar{e} = e$. Если $E = \mathbb{R}$, то:*

1) $-0 = 0$; 2) $1^{-1} = 1$.

◀ Согласно предыдущей теореме, из $e \top e = e$ следует $e = \bar{e}$. ▶

Теорема 6. *Если a и b элементы группы E, то уравнение $a \top x = b$ имеет в E единственное решение $x = \bar{a} \top b$. В частности, если $E = \mathbb{R}$, то:*

1) *уравнение $a + x = b$ имеет в $\mathbb{R}$ единственное решение $x = -a + b$;*

---

[1] От латинского слова supremum — высший.

2) *уравнение* $ax = b$, *где* $a \neq 0$, $b \neq 0$, *имеет в* $\mathbb{R}$ *единственное решение* $x = a^{-1}b$.

◀ Элемент $\bar{a} \top b$ удовлетворяет уравнению $a \top x = b$. Действительно

$$a \top (\bar{a} \top b) = (a \top \bar{a}) \top b = e \top b = (b \top \bar{b}) \top b = b \top (\bar{b} \top b) = b \top e = b.$$

Других решений нет, так как из предположения, что $x \in E$ является еще одним решением уравнения $a \top x = b$, получаем

$$\bar{a} \top b = \bar{a} \top b,$$
$$\bar{a} \top (a \top x) = \bar{a} \top b,$$
$$(\bar{a} \top a) \top x = \bar{a} \top b,$$
$$e \top x = \bar{a} \top b,$$
$$x = \bar{a} \top b. \ \blacktriangleright$$

Определение. 1) *Пусть* b *и* a *— действительные числа. Сумма* $b + (-a)$ *называется разностью чисел* b *и* a *и обозначается* $b - a$.

2) *Пусть* a *и* b *— действительные числа, причем* $a \neq 0$, $b \neq 0$. *Произведение* $a^{-1}b$ *называется частным чисел* b *и* a *и обозначается* $\frac{b}{a}$.

Пользуясь этим определением и коммутативным законом, решения уравнений $a + x = b$ и $ax = b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, можно записать в обычной форме $x = b - a \ \ \forall a \in \mathbb{R}$; $x = \frac{b}{a} \ \ \forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Теорема 7. *Всякий элемент* $c \in E$ *регулярен относительно операции* $\top$, *т. е.*

$$(a \top c = b \top c) \wedge (c \top a = c \top b) \Rightarrow a = b.$$

В частности, в множестве $\mathbb{R}$ *всякий элемент регулярен относительно сложения, а всякий ненулевой элемент регулярен относительно умножения.*

◀ На основании теоремы 6 и ассоциативного закона имеем

$$a = (b \top c) \top \bar{c} = b \top (c \top \bar{c}) = b \top e = b,$$
$$a = \bar{c} \top (c \top b) = (\bar{c} \top c) \top b = e \top b = b. \ \blacktriangleright$$

Теорема 8. *Для произвольного* $a \in E$ *симметричный ему элемент* $\bar{a}$ *единственный. В частности, для произвольного действительного числа противоположное ему единственно, а для всякого отличного от нуля числа обратное ему единственно.*

◀ В силу ассоциативности всякий элемент группы регулярен, поэтому в силу теоремы 2, п. 4.2, симметричный ему элемент единственный. ▶

Теорема 9. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R}$.

◀ Имеем

$$a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0.$$

В силу теоремы 5.1)

$$a \cdot 0 = a \cdot 0 - a \cdot 0 = 0.$$

Аналогично доказывается, что $0 \cdot a = 0$. ▶

Из теоремы вытекает, что число 0 не имеет обратного, ибо $\forall r \in \mathbb{R}$ выполнено условие $0 \cdot r = 0$, а $0 \neq 1$, поскольку $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Из теоремы 9 следует также, что умножение, которое определено на всем $\mathbb{R}$, является коммутативным и ассоциативным на всем $\mathbb{R}$, а не только на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, как это утверждалось в У.4 и У.1.

Например, коммутативный закон для ненулевых элементов следует из У.4; если же $a = 0$ или $b = 0$, то $a \cdot b = b \cdot a = 0$ в силу теоремы 9. Таким образом, коммутативный закон умножения выполняется для любых $a, b \in \mathbb{R}$. Аналогично показывается, что ассоциативный закон умножения выполняется для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Из определения частного и коммутативности умножения следует

$$a^{-1} \cdot b = b \cdot a^{-1} = \frac{b}{a}.$$

Покажем, что

$$\frac{b \cdot c}{a \cdot c} = \frac{b}{a} \qquad \forall a,\ c \neq 0,\quad a,\ c \in \mathbb{R}.$$

Пусть $a \cdot c \neq 0$ и $ax = b$. Значит, $(a \cdot c) \cdot x = b \cdot c$. Из этих уравнений, согласно теореме 6.2), следует

$$x = \frac{b}{a}, \quad x = \frac{b \cdot c}{a \cdot c}.$$

Отсюда $\frac{b}{a} = \frac{b \cdot c}{a \cdot c}$. Множество $\left\{\frac{b \cdot c}{a \cdot c}\right\}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, образует класс эквивалентности, который определяется числом $\frac{b}{a}$.

Теорема 10. $-a = (-1) \cdot a$.

◀ Применим сначала теорему 9:

$$a(1 + (-1)) = a \cdot 0 = 0;$$

затем используем аксиому Д.1:

$$a \cdot 1 + a \cdot (-1) = 0.$$

Из У.2 и У.4 следует, что

$$a + (-1) \cdot a = 0,$$

а из теоремы 4.1) окончательно получаем утверждение теоремы. ▶

Следствие. *Справедливы равенства:*

$$(-1)^2 = 1, \quad a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b).$$

Эти равенства вытекают из доказанной теоремы следующим образом:

$$(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1,$$

$$a \cdot (-b) = a \cdot (-1) \cdot b = (-1) \cdot a \cdot b = -(a \cdot b),$$
$$a \cdot (-b) = a \cdot (-1) \cdot b = ((-1) \cdot a) \cdot b = (-a) \cdot b.$$

Аксиомы С, У, Д и аксиомы отношения эквивалентности:

$$a = a \qquad \forall a \in \mathbb{R} \quad \text{(рефлексивность)},$$
$$(a = b) \Rightarrow (b = a) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \text{(симметричность)},$$
$$(a = b) \wedge (b = c) \Rightarrow (a = c) \quad \text{(транзитивность)},$$

вместе взятые, называются *аксиомами числового поля*, или просто *поля*: $(\mathbb{R}, +, \cdot, =)$. Например, множество всех рациональных чисел образует поле, а значит, и тело.

7.3. Следствия из аксиом порядка. Аксиомы П.0—П.3 обращают поле в частично упорядоченное поле, а аксиомы П.0—П.4 — во вполне упорядоченное поле. Наконец, аксиомы ПП.1—ПП.2 связывают отношение порядка и операции поля $\mathbb{R}$.

Определение 1. *а) Отношение $a \geqslant b$ означает, что $b \leqslant a$;*

б) отношение $a < b$ означает, что $(a \leqslant b) \wedge (a \neq b)$;

в) отношение $a > b$ означает, что $b < a$;

г) высказывание вида $a \leqslant b$ называется неравенством, а вида $a < b$ — строгим неравенством.

Теорема 1. *Если $a, b \in \mathbb{R}$, то выполняется только одно из отношений:*

1) $a < b$; 2) $a = b$; 3) $a > b$.

◀ Очевидно,

$$(a < b) \Rightarrow (a \neq b), \quad (a > b) \Rightarrow (a \neq b),$$

поэтому 2) несовместимо с 1) и 3). Пусть выполняется 1). Если бы, кроме того, выполнялось также и неравенство $a > b$, то тем более было бы $a \geqslant b$, а из 1) вытекало бы, что $a \leqslant b$. Тогда в силу П.2 $a = b$, что невозможно.

Итак, доказали, что из трех отношений может выполняться не более, чем одно. Докажем теперь, что из трех отношений 1)—3) одно выполняется непременно. Именно, в силу аксиомы П.4 или $a \leqslant b$, или $b \leqslant a$, т. е. $a \geqslant b$ или то и другое. Пусть, например,

$$a \leqslant b.$$

Если $a \neq b$, то справедливо неравенство 1), а если $a = b$, то — равенство 2). Случай $b \leqslant a$ рассматривается аналогично. ▶

Теорема 2. *Для любых a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ справедливы следующие утверждения:*

1. а) *если $a < b < c$, то $a < c$;*
   б) *из $a \leqslant b < c$ следует $a < c$;*
2. а) *из $a > b \geqslant c$ следует $a > c$;*
   б) *из $a \geqslant b > c$ следует $a > c$;*
3. а) *если $(a \leqslant b) \wedge (c \leqslant d)$, то $a + c \leqslant b + d$;*
   б) *если $(a \leqslant b) \wedge (c < d)$, то $a + c < b + d$.*

◀ 1. а) Пусть выполняется отношение $a < b$, следовательно, $a \leqslant b$. Отсюда, согласно аксиоме П.3, вытекает, что $a \leqslant c$. Теперь либо $a < c$, либо $a = c$. Если $a = c$, то $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$ и, следовательно, на

основании аксиомы П.2, $a = b$. Но так как $a < b$, то, кроме того, и $a \neq b$. Предположение, что $a = c$ приводит таким образом к двум противоречивым высказываниям: $a = b$ и $a \neq b$, а поэтому неверно. Таким образом, $a < c$.

Докажем пункт 3.б). Из неравенства $a \leqslant b$, согласно аксиоме ПП.1, следует неравенство $a + c \leqslant b + c$. Из строгого неравенства $c < d$ следует $c \leqslant d$; отсюда и из ПП.1 получаем $b + c \leqslant b + d$. Поэтому, на основании аксиомы П.3, $a + c \leqslant b + d$. Если бы было $a + c = b + d$, то выполнялись бы отношения

$$b + d = a + c \leqslant b + c \leqslant b + d.$$

Следовательно, согласно аксиоме П.2, $b + d = b + c$, и поэтому $c = d$. Но, по предположению $c < d$, а поэтому $c \neq d$. Таким образом, высказывание $a + c = b + d$ неверно. Итак, $a + c < b + d$.

Доказательство остальных пунктов предлагаем провести самостоятельно. ▶

Определение 2. *Элемент* $a \in \mathbb{R}$ *называется положительным, если* $a > 0$, *и отрицательным, если* $a < 0$. *Элемент* $a \in \mathbb{R}$ *называется неотрицательным, если* $a \geqslant 0$, *и неположительным, если* $a \leqslant 0$.

Теорема 3. 1) *Элемент a является положительным (отрицательным) тогда и только тогда, когда элемент* $-a$ *отрицателен (положителен);*

2) *произведение двух положительных (отрицательных) чисел положительно;*

3) *если a положительно, а b отрицательно, то* $a \cdot b$ *отрицательно;*

4) *из* $a < b$ *и* $0 < c$ *следует* $a \cdot c < b \cdot c$;

5) *из* $a < b$ *и* $c < 0$ *следует* $a \cdot c > b \cdot c$;

6) *из* $0 < a < b$ *следует* $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

◀ 1) Если $a > 0$, то, согласно условию 3, б) теоремы 2, $a - a > 0 - a$, так что $0 > -a$, т. е. $-a$ отрицательно.

Если $-a$ отрицательно, т. е. $-a < 0$, то $a - a < a + 0$, так что $0 < a$, т. е. a — положительно.

Доказательство остальных пунктов предлагаем провести самостоятельно. ▶

7.4. Следствия из аксиомы о верхней грани.

Определение 1. *Множество* $A \subset \mathbb{R}$ *называется ограниченным снизу, если существует число* $m \in \mathbb{R}$ *такое, что* $\forall a \in A$ *выполняется неравенство* $m \leqslant a$.

При этом число m называют *нижней гранью* множества A.

Определение 2. *Нижняя грань* m^* *множества A называется точной нижней гранью множества A, если всякая другая нижняя грань m множества A не больше* m^*.

Точная нижняя грань множества A обозначается символом $\inf A$ [1].

Теорема. *Всякое ограниченное снизу множество A имеет точную нижнюю грань, причем* $\inf A = -\sup\{-A\}$, *где* $-A = \{-x\}$, $x \in A$, $A = \{x\}$.

[1] От латинского слова infimum — низкий.

◀ Пусть множество $A = \{x\}$ ограничено снизу, тогда $\exists m \in \mathbb{R}$, такое, что $\forall x \in A \quad m \leqslant x$; тогда $-x \leqslant -m$, т. е. множество $-A$ ограничено сверху. Согласно аксиоме В.0 $\exists \sup\{-A\} = M^*$. Имеем $-x \leqslant M^* \quad \forall x \in A$; следовательно, $-M^* \leqslant x \quad \forall x \in A$ и $-M^*$ — нижняя грань множества A. Если N любая другая нижняя грань этого множества, то $-N$ будет верхней гранью множества $-A$, а поэтому $-N \geqslant M^* = \sup\{-A\}$; отсюда $N \leqslant -M^*$, так что $-M^* = -\sup\{-A\}$ является точной нижней гранью множества A. ▶

Существует и другое определение точной верхней и точной нижней граней, эквивалентное, соответственно, определению 3, п. 7.1, и определению 2 настоящего пункта.

Определение 3. *Число M^* (m^*) называется точной верхней (нижней) гранью множества $A = \{x\}$, если $\forall x \in A$ выполняется неравенство $x \leqslant M^* \quad (x \geqslant m^*)$ и $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x' \in A$ ($\exists x'' \in A$), такое, что*

$$M^* - \varepsilon < x' \leqslant M^* \quad (m^* \leqslant x'' < m^* + \varepsilon).$$

Докажем, что это определение эквивалентно определению 3 из п. 7.1 и определению 2 настоящего пункта. Рассмотрим случай точной верхней грани; в случае точной нижней грани рассуждения аналогичны.

Пусть M^* — точная верхняя грань согласно определению 3. Тогда $\forall x \in A$ выполняется неравенство $x \leqslant M^*$ и, следовательно, M^* — верхняя грань. Из неравенства $M^* - \varepsilon < x' \leqslant M^*$ следует, что никакое число, меньшее M^*, не может быть верхней гранью и, следовательно, все другие верхние грани M больше M^*. Таким образом, и согласно определению 3, п. 7.1, M^* — точная верхняя грань.

Пусть теперь число M^* является точной верхней гранью согласно определению 3, п. 7.1. Поскольку M^* — верхняя грань, то $x \leqslant M^*$ $\forall x \in A$. Далее, $\forall \varepsilon > 0$ число $M^* - \varepsilon < M^*$ уже не будет верхней гранью множества A (ибо все другие верхние грани не меньше M^*), поэтому $\exists x' \in A$ такое, что $M^* - \varepsilon < x' \leqslant M^*$.

Остановимся на свойствах точной верхней грани.

1) Если множество A ограничено сверху (снизу) числом M (m), то $\sup A \leqslant M$ ($\inf A \geqslant m$).

В самом деле, число M (m) — верхняя (нижняя) грань множества A; поэтому оно является большим (меньшим) или равным $\sup A$ ($\inf A$).

2) Если множества A и B ограничены сверху (снизу) и $A \subset B$, то $\sup A \leqslant \sup B$ ($\inf A \geqslant \inf B$).

Действительно, число $\sup B$ ($\inf B$) является верхней (нижней) гранью для B, а поскольку $A \subset B$, то и для A, поэтому, согласно 1), $\sup A \leqslant \sup B$ ($\inf A \geqslant \inf B$).

Расширенная система действительных чисел

Определение 4. *Расширенной системой действительных чисел называется множество, состоящее из элементов множества* $\mathbb{R}$ *и двух символов* $-\infty$ *и* $+\infty$, *причем выполняются следующие условия:*

а) $-\infty < a < +\infty$, $a + \infty = +\infty$,

$$a - \infty = -\infty, \quad \frac{a}{-\infty} = \frac{a}{+\infty} = 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R};$$

б) *если* $a > 0$, *то*

$$a \cdot (+\infty) = +\infty, \quad a \cdot (-\infty) = -\infty;$$

в) *если* $a < 0$, *то*

$$a \cdot (+\infty) = -\infty, \quad a \cdot (-\infty) = +\infty.$$

Символ $-\infty$ ($+\infty$) называют *минус (плюс) бесконечностью.*

Расширенную систему действительных чисел обозначаем символом $\bar{\mathbb{R}}$, таким образом, $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty;\ +\infty\}$.

Будем считать, что если непустое множество A не ограничено сверху (снизу), т. е. содержит символ $+\infty$ ($-\infty$), то $\sup A = +\infty$ ($\inf A = -\infty$).

Таким образом, в расширенной системе действительных чисел $\bar{\mathbb{R}}$ всякое непустое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Определение 5. *Множество* $A \subset \mathbb{R}$, *ограниченное сверху и снизу, называется ограниченным с обеих сторон, или просто ограниченным.*

Всякое ограниченное в $\mathbb{R}$ и произвольное в $\bar{\mathbb{R}}$ множество имеет точную верхнюю и точную нижнюю грань.

Примером ограниченного в $\mathbb{R}$ множества может служить сегмент или интервал. *Сегментом* в $\mathbb{R}$ называется множество $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$; *интервалом* в $\mathbb{R}$ называется множество $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. *Полусегментом,* или *полуинтервалом,* называется множество $[a, b[< \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$ и множество $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$. Наконец, множество $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < +\infty\}$ или $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < b\}$ называется *бесконечным полуинтервалом,* а множество $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < +\infty\}$ или $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leqslant b\}$ *бесконечным полусегментом.*

Сегменты, интервалы и полуинтервалы являются ограниченными множествами, а поэтому имеют точную верхнюю и точную нижнюю грани, причем

$$\sup [a, b] = \sup]a, b[= b,$$
$$\inf [a, b] = \inf]a, b[= a.$$

Бесконечные полуинтервалы и полусегменты ограничены только с одной стороны, поэтому для них существует конечная точная верхняя или конечная точная нижняя грань. Например, $\sup]-\infty, b] = \sup]-\infty, b[= b$; $\inf [a, +\infty[= \inf]a, +\infty[= a$.

7.5. Теорема Архимеда и ее следствия.

Теорема 1 (Архимеда). *Если* $a > 0$, a b— *произвольное действительное число, то существует такое* $n \in \mathbb{Z}$, *что* $(n-1)\,a \leqslant b$, $na > b$.

◀ Докажем сначала, что $\exists\, n \in \mathbb{Z}$ такое, что $na > b$. Для доказательства предположим обратное, т. е. $ka \leqslant b \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$. Тогда множество $\{ka\}$ ограничено сверху и, согласно аксиоме B.0, имеет точную верхнюю грань $\sup\{ka\} = M^* \leqslant b$. Согласно определению 3, п. 7.4, $\exists\, pa \in \{ka\}$ такое, что $M^* - a < pa \leqslant M^*$; отсюда $(p+1) \times a > M^*$, $p+1 \in \mathbb{Z}$, что противоречит определению числа M^*. Таким образом, пришли к противоречию, источник которого в предположении, что $ka \leqslant b \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, существует число $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $ka > b$.

Аналогично доказывается, что существует число m, удовлетворяющее неравенству $ma < b$. В силу транзитивности знака $<$ имеем $ma < ka$, а поскольку $a^{-1} > 0$, то из теоремы 3, п. 7.3, следует неравенство $m < k$. Сегмент $[ma, ka]$, содержащий точку b, делится точками $(m+1)\,a$, $(m+2)\,a$, ..., $(k-1)\,a$ на $k-m$ сегментов; одному из них принадлежит точка b. Следовательно, существует $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $(n-1)\,a \leqslant b < na$. ▶

Следствие 1. *Пусть* $a > 1$, $b > 0$. *Тогда найдется такое целое число* n, *что*

$$a^{n-1} \leqslant b, \quad a^n > b.$$

Доказательство абсолютно аналогично доказательству теоремы, если заменить там сложение умножением.

Следствие 2. *Для каждого положительного числа* ε *существует такое натуральное число* m, *что* $\forall\, n > m$ *выполняется неравенство*

$$\frac{1}{n} < \varepsilon. \tag{1}$$

Это неравенство непосредственно следует из теоремы Архимеда, если положить там $a = 1$, $b = \frac{1}{\varepsilon}$, а затем применить теорему 3, п. 7.3.

Приведенное следствие показывает, что среди чисел

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

содержатся числа, меньшие любого, наперед заданного положительного числа ε. Потому $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N}$ такое, что

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \forall\, n > m,$$

т. е.

$$\inf\left\{\frac{1}{n}\right\} = 0.$$

Теорема 2. *Пусть* α *и* β *произвольно заданные действительные числа, причем* $\alpha < \beta$. *Тогда существует рациональное число* r, *заключенное между числами* α *и* β.

◀ Обозначим $h = \beta - \alpha$. Тогда, согласно следствию 2 теоремы 1, существует натуральное n такое, что

$$\frac{1}{n} < h. \tag{2}$$

Поскольку $\frac{1}{n} > 0$, то, согласно теореме Архимеда, существует целое число m, удовлетворяющее неравенствам

$$\frac{m}{n} \leqslant \alpha < \frac{m+1}{n}.$$

Отсюда и из неравенства (2) получаем

$$\alpha < \frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < \alpha + h = \alpha + \beta - \alpha = \beta.$$

Таким образом, $\alpha < \frac{m+1}{n} < \beta$. ▶

Из теоремы следует, что между действительными числами α и β содержится бесконечное множество рациональных чисел. Например, применяя теорему к числам α, r и r, β, заключаем, что существуют рациональные числа r_1 и r_2 такие, что $\alpha < r_1 < r$, $r < r_2 < \beta$ и т. д.

§ 8. АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА

Определение. *Абсолютным значением тела (поля)* $\mathbb{K}$ *называется отображение*

$$\mathbb{K} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto |x|,$$

удовлетворяющее следующим условиям:

1°. $|x| \geqslant 0 \wedge (|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$;
2°. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
3°. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Если на теле (поле) определено абсолютное значение, то тело (поле) называется *нормированным,* а абсолютное значение $|x|$ — *нормой* элемента $x \in \mathbb{K}$.

Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то абсолютное значение обычно называют *абсолютной величиной,* или *модулем* числа $a \in \mathbb{R}$, и определяют следующим образом:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Непосредственно из определения абсолютной величины вытекает, что условия 1° и 2° выполняются. Покажем, что выполняется также и условие 3°. Из определения следуют неравенства

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|, \quad -|b| \leqslant b \leqslant |b|.$$

Сложив эти неравенства, получим

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$$

или окончательно

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|. \tag{1}$$

Применяя неравенство (1) к сумме $(a-b)+b$, получим неравенство

$$|a| = |(a-b)+b| \leqslant |a-b| + |b|,$$

из которого следует

$$|a| - |b| \leqslant |a-b|. \tag{2}$$

Меняя здесь a и b местами и пользуясь условием 2°, находим

$$|b| - |a| \leqslant |b-a| = |(-1)(a-b)| = |-1| \cdot |a-b| = |a-b|,$$

откуда

$$-|a-b| < |a| - |b|. \tag{3}$$

Из (2) и (3) вытекает неравенство

$$||a| - |b|| \leqslant |a-b|. \tag{4}$$

Заметим, что отношение (4) справедливо для любого нормированного поля $\mathbb{K}$.

§ 9. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Для доказательства различных высказываний $\mathcal{A}(n)$, зависящих от натуральной переменной n, применяется метод математической индукции, суть которого в следующем: если высказывание $\mathcal{A}(1)$ справедливо и $\forall\, k > 1$ из предположения справедливости $\mathcal{A}(k)$ следует справедливость $\mathcal{A}(k+1)$, то высказывание $\mathcal{A}(n)$ справедливо при любом натуральном n.

Символическая формулировка метода математической индукции записывается так:

$$(\mathcal{A}(1) \wedge (\mathcal{A}(k) \Rightarrow \mathcal{A}(k+1) \quad \forall\, k > 1)) \Rightarrow (\mathcal{A}(n) \quad \forall\, n).$$

Иногда доказывается справедливость высказывания $\mathcal{A}(n)$, начиная с некоторого номера $m > 1$. Естественно, что тогда метод математической индукции запишется иначе, а именно:

$$(\mathcal{A}(m) \wedge (\mathcal{A}(k) \Rightarrow \mathcal{A}(k+1) \quad \forall\, k > m)) \Rightarrow (\mathcal{A}(n) \quad \forall\, n \geqslant m).$$

Лемма. *Если* $x_i > 0 \quad \forall\, i = \overline{1, n}$ *и* $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$ *(символом* $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i$ *обозначено произведение чисел* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*), то*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant n, \tag{1}$$

при этом

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i = n\right) \Leftrightarrow (x_i = 1 \quad \forall\, i = \overline{1, n}).$$

◀ Для доказательства применим принцип математической индукции. При $n = 1$ неравенство (1) справедливо и имеет место только знак равенства. Если $n = 2$ и $x_1 \cdot x_2 = 1$, то обязательно один множитель,

например, $x_1 > 1$, а $x_2 < 1$. Тогда из очевидного тождества

$$x_1 + x_2 = x_1x_2 + 1 + (x_1 - 1)(1 - x_2)$$

и условия $x_1x_2 = 1$ следует неравенство

$$x_1 + x_2 \geqslant 2$$

и условие

$$(x_1 + x_2 = 2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2 = 1).$$

Предположим теперь, что для произвольных k положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$, произведение которых равно единице, справедливо неравенство $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \geqslant k$, причем

$$\left(\sum_{i=1}^{k} x_i = k\right) \Leftrightarrow (x_i = 1 \quad \forall\, i = \overline{1, k}).$$

Рассмотрим произведение $k + 1$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$, для которых $\prod\limits_{i=1}^{k+1} x_i = 1$.

Если не все x_i равны единице, то найдутся числа как большие единицы, так и меньшие единицы. Не ограничивая общности, будем считать, что $x_1 > 1$, $x_2 < 1$. Тогда, по предположению, для k положительных чисел $(x_1x_2), x_3, \ldots, x_{k+1}$, произведение которых равно единице, справедливо неравенство

$$x_1x_2 + x_3 + \cdots + x_{k+1} \geqslant k, \tag{2}$$

причем

$$(x_1x_2 + x_3 + \cdots + x_{k+1} = k) \Leftrightarrow (x_1x_2 = x_3 = \cdots = x_{k+1} = 1). \tag{3}$$

Складывая тождество

$$x_1 + x_2 - x_1x_2 = 1 + (x_1 - 1)(1 - x_2)$$

с неравенством (2), получим неравенство

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} \geqslant k + 1 + (x_1 - 1)(1 - x_2) \geqslant k + 1$$

и условие

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} = k + 1 + (x_1 - 1)(1 - x_2)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x_1x_2 = x_3 = \cdots = x_{k+1} = 1),$$

из которого следует, что

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} x_i = k + 1\right) \Leftrightarrow (x_i = 1 \quad \forall\, i = \overline{1, k+1}). \blacktriangleright$$

Пример 1. Пусть $x_i > 0$, $x_i \in \mathbb{R}$, $\forall\, i = \overline{1, n}$, а

$$\gamma_n = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}} \qquad \textit{(среднее гармоническое)},$$

$$\eta_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \qquad \textit{(среднее геометрическое)},$$

$$\xi_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \qquad \textit{(среднее арифметическое)}.$$

Тогда

$$\gamma_n \leqslant \eta_n \leqslant \xi_n, \tag{4}$$

при этом $(\gamma_n = \eta_n = \xi_n) \Leftrightarrow (x_1 = x_2 = \ldots = x_n)$.

Произведение n положительных чисел

$$\frac{x_1}{\eta_n} \cdot \frac{x_2}{\eta_n} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{\eta_n} = \left(\frac{\eta_n}{\eta_n}\right)^n = 1,$$

поэтому, согласно лемме, их сумма

$$\frac{x_1}{\eta_n} + \frac{x_2}{\eta_n} + \cdots + \frac{x_n}{\eta_n} \geqslant n.$$

Отсюда $\eta_n \leqslant \xi_n$. При этом знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\frac{x_1}{\eta_n} = \frac{x_2}{\eta_n} = \cdots = \frac{x_n}{\eta_n} = 1$, т. е. когда $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

По только что установленному

$$\frac{1}{\eta_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} = \frac{1}{\gamma_n};$$

отсюда $\gamma_n \leqslant \eta_n$ и $\gamma_n = \eta_n$, если $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \cdots = \frac{1}{x_n}$, т. е. если $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Пример 2. Для произвольного положительного $x \in \mathbb{R}$ и рационального числа $r > 1$ справедливо неравенство

$$(1 + x)^r > 1 + rx,$$

называемое *неравенством Бернулли*.

Для доказательства этого неравенства положим $r = \frac{n}{m}$ $(m < n,\ n,\ m \in \mathbb{N})$ и к n положительным числам

$$x_i = 1 + rx, \quad i = \overline{1,\ m}, \quad x_j = 1, \quad j = \overline{1,\ (n - m)}$$

применим правую часть неравенства (4):

$$\sqrt[n]{(1 + rx)^m \cdot 1^{n-m}} < \frac{m + rmx + n - m}{n} < 1 + x.$$

Отсюда следует

$$(1 + x)^{\frac{n}{m}} = (1 + x)^r > 1 + rx.$$

Пример 3. Доказать формулу бинома Ньютона

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \tag{5}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ — число сочетаний из n элементов по k, $m! = 1 \cdot 2 \ldots m$ и полагают $0! = 1$.

Доказательство проведем, применив метод математической индукции. При $n = 1$ равенство (5) справедливо:

$$a + b = \sum_{k=0}^{1} C_1^k a^{1-k} b^k = C_1^0 a + C_1^1 b = a + b.$$

Предполагая равенство (5) справедливым, докажем, что

$$(a+b)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^{k}a^{n+1-k}b^{k}. \tag{6}$$

В силу высказанного предположения имеем

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n+1-k}b^k+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^{k+1}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n+1-k}b^k+\sum_{k=1}^{n+1}C_n^{k-1}a^{n+1-k}b^k=$$

$$=C_n^0 a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}(C_n^k+C_n^{k-1})\,a^{n+1-k}b^k+C_n^n b^{n+1}.$$

Поскольку $C_n^0=C_n^n=1 \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$ и $C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k$, то

$$(a+b)^{n+1}=C_{n+1}^0 a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}C_{n+1}^k a^{n+1-k}b^k+C_{n+1}^{n+1}b^{n+1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k a^{n+1-k}b^k.$$

Определение. *Корнем степени n положительного числа x называется действительное число z такое, что $z^n=x$.*

Корень обозначается символом $\sqrt[n]{x}$ или $x^{1/n}$.

Теорема 1. *Для всякого положительного действительного числа x существует корень степени n.*

◀ Обозначим $E=\{y\in\mathbb{R}^+ : y^n\leqslant x\}$. Множество E непустое; при $t=\frac{x}{1+x}$, $0<t<1$, имеем $t^n<t<x$, так что $t\in E$. Кроме того, оно ограничено числом 1, если $x\leqslant 1$, и числом x, если $x\geqslant 1$, так как в последнем случае из неравенства $x^n\geqslant x>y$, следует, что x — верхняя грань множества E.

Обозначим $z=\sup E$ и покажем, что $z^n=x$.

Если предположить, что $z^n<x$, то, выбирая h таким, что $0<h<1$ и $h<\frac{x-z^n}{(1+z)^n-z^n}$, получаем неравенство

$$(z+h)^n=z^n+C_n^1 z^{n-1}h+C_n^2 z^{n-2}h^2+\cdots+C_n^n h^n=$$

$$=z^n+h\,(C_n^1 z^{n-1}+C_n^2 z^{n-2}h+\cdots+C_n^n h^{n-1})<$$

$$<z^n+h\,(C_n^1 z^{n-1}+C_n^2 z^{n-2}+\cdots+C_n^n)=$$

$$=z^n+h\,((1+z)^n-z^n)<z^n+x-z^n=x,$$

которое противоречит определению числа z.

Если предположить, что $z^n>x$, то, выбирая h таким, что $0<h<1$, $h<z$ и $h<\frac{z^n-x}{(1+z)^n-z^n}$, приходим к неравенству

$$(z-h)^n = z^n - C_n^1 z^{n-1}h + C_n^2 z^{n-2}h^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n h^n =$$
$$= z^n - h(C_n^1 z^{n-1} - C_n^2 z^{n-2}h + \cdots - (-1)^n C_n^n h^{n-1}) \geqslant$$
$$\geqslant z^n - h(C_n^1 z^{n-1} + C_n^2 z^{n-2} + \cdots + C_n^n) =$$
$$= z^n - h((1+z)^n - z^n) > z^n - z^n + x = x,$$

которое противоречит определению числа z. Таким образом, $z^n = x$. Найденный корень единственный, так как если бы существовало два корня, например, $0 < z_1 < z_2$, то тогда непременно выполнялось бы неравенство $z_1^n < z_2^n$, что противоречит определению корня. ▶

Как известно, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ образует поле, а если в нем введено отношение порядка, то оно обращает множество $\mathbb{Q}$ в *упорядоченное поле*. Однако, как показывает следующая теорема, не во всяком упорядоченном поле выполняется аксиома о верхней грани.

Теорема 2. *Не существует рационального числа, квадрат которого равен 2.*

◀ Предположим обратное. Тогда существуют целые взаимно-простые положительные числа p и q такие, что

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Отсюда следует равенство

$$p^2 = 2q^2,$$

а также то, что число p^2, а с ним и p четное. Пусть $p = 2s$. Тогда

$$(4s^2 = 2q^2) \Rightarrow (2s^2 = q^2).$$

Число q^2, а значит и q четное. Таким образом, числа p и q имеют общий делитель число 2, а это противоречит предположению. ▶

В множестве $\mathbb{R}$ существует $\sqrt{2}$ согласно теореме 3 и, как это следует из доказательства, равен точной верхней грани множества $E = \{z \in \mathbb{R}^+ : z^2 \leqslant 2\}$. Поскольку $\sup E = \sqrt{2}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, то $\sup E$ отсутствует в множестве $\mathbb{Q}$, которое является упорядоченным полем.

Аксиома о верхней грани как бы заполняет «пробелы» множества рациональных чисел, дополняя их новыми объектами, которые называются *иррациональными числами*. Поэтому аксиому о верхней грани называют аксиомой о полноте множества действительных чисел, а упорядоченное поле, в котором выполняется аксиома о верхней грани,— *полным упорядоченным полем*.

§ 10. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

10.1. Комплексные числа и действия над ними. В предыдущем параграфе мы построили множество действительных чисел $\mathbb{R}$, сохранив при этом в множестве $\mathbb{R}$ все множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, так что $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Необходимость построения более широкого по сравнению с $\mathbb{Q}$ множества действительных чисел $\mathbb{R}$ диктовалась практической потребностью. Так, например, уравнение $x^2 = 2$ в множестве $\mathbb{Q}$ не имело решений, а в более широком множестве $\mathbb{R}$ это решение уже

существует. Уравнение $x^2 = -2$ не будет иметь решений даже в множестве $\mathbb{R}$. Таким образом, столкнулись с необходимостью построения множества $\mathbb{C}$ более широкого, чем $\mathbb{R}$, так чтобы $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. При этом необходимо, чтобы в множестве $\mathbb{C}$ уравнение $x^2 = -2$ уже имело решение.

Определение. *Комплексным числом z называется упорядоченная пара (x, y) действительных чисел x и y. При этом равенство, сумма, произведение и отождествление некоторых упорядоченных пар с действительными числами определяются следующим образом:*

1) *два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называются равными, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$;*

2) *суммой комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z вида*

$$z = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2); \tag{1}$$

3) *произведением комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число*

$$z = (x_1y_1 - x_2y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1); \tag{2}$$

4) *множество комплексных чисел $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, изоморфно множеству действительных чисел $x \in \mathbb{R}$.*

Число x называется *действительной частью,* а число y — *мнимой частью* комплексного числа z. Иногда будем обозначать

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Из определения комплексных чисел следует, что с точностью до изоморфизма можно положить

$$(x,\ 0) = x.$$

Отсюда следует, что комплексное число $z = (x, y)$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x = 0 \wedge y = 0$.

Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ образует поле, внутренними бинарными операциями которого являются определенные формулами (1) и (2) операции сложения и умножения. Для сложения и умножения комплексных чисел выполняются все аксиомы, определяющие поле:

С.1. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \forall z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$ (ассоциативность сложения).

С.2. $\forall z \in \mathbb{C}$ существует комплексное число $(0, 0) \in \mathbb{C}$ (нейтральный элемент относительно операции сложения) такое, что

$$z + (0,\ 0) = z.$$

С.3. $\forall z \in \mathbb{C}$ существует комплексное число $(-z) = (-x, -y)$, $(-z) \in \mathbb{C}$ (противоположный элемент относительно сложения) такое, что

$$z + (-z) = (0,\ 0).$$

С.4. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \forall z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ (коммутативность сложения).

С.5. $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \quad \forall z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$ (ассоциативность умножения).

С.6. $\forall z \in \mathbb{C}$ существует комплексное число $(1, 0) \in \mathbb{C}$ (нейтральный элемент относительно умножения) такое, что

$$z \cdot (1, 0) = z.$$

С.7. $\forall z \in \mathbb{C} \wedge (z \neq (0, 0))$ существует комплексное число z^{-1} (обратный элемент относительно умножения) такое, что

$$z \cdot z^{-1} = (1, 0).$$

С.8. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (коммутативность умножения).

С.9. $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

Комплексное число z^{-1} (обратное к числу z) можно найти следующим образом. Пусть $z = (x, y) \neq (0, 0)$. Обозначим $\frac{1}{z} = (x_0, y_0)$. Тогда, согласно С.7,

$$z \cdot z^{-1} = (1, 0) \text{ или } (xx_0 - yy_0, x_0y + xy_0) = (1, 0).$$

По определению равенства комплексных чисел, получим систему

$$xx_0 - yy_0 = 1, \quad x_0y + xy_0 = 0,$$

из которой находим $x_0 = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $y_0 = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, следовательно, $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$.

Вычитание в множестве $\mathbb{C}$ определяется как действие, обратное сложению.

Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z такое, что

$$z_2 + z = z_1.$$

Пользуясь свойствами С.1 — С.4 и прибавляя к обеим частям последнего равенства комплексное число $-z_2$, получим

$$z = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

Аналогично, деление в множестве $\mathbb{C}$ определяется как действие, обратное умножению: *частным* комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z такое, что

$$z_2 \cdot z = z_1.$$

Умножая это равенство на комплексное число

$$z_2^{-1} = \left(\frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{-y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)$$

и пользуясь аксиомами С.5 — С.8, получим

$$z = z_1 \cdot z_2^{-1} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right). \tag{3}$$

Комплексное число (0, 1) обозначим символом i. Тогда $(0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0)$, т. е. $i^2 = -1$. Произвольное комплексное число

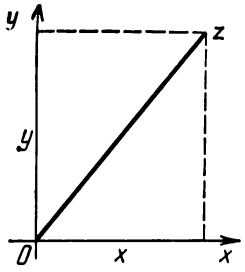


Рис. 3

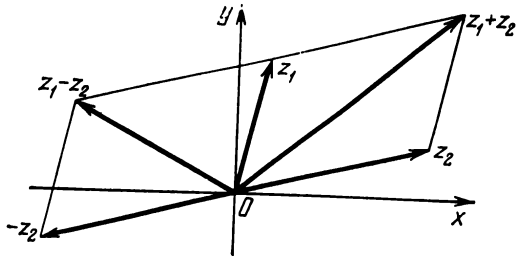


Рис. 4

$z \in \mathbb{C}$ можно представить в виде

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy.$$

Комплексное число $\bar{z} = (x, -y) = x - iy$ называется *сопряженным* по отношению к комплексному числу $z = (x, y) = x + iy$. Очевидно, $z\bar{z} = x^2 + y^2$.

10.2. Геометрическая интерпретация комплексного числа. Всякое комплексное число $z = (x, y)$ можно изобразить как точку на плоскости с координатами x и y (рис. 3). Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *координатной комплексной плоскостью*. При таком изображении комплексных чисел действительные числа изображаются точками оси Ox, а числа $(0, y)$ (которые называются *чисто мнимыми*) — точками оси Oy. Поэтому ось Ox называют *действительной* осью, а Oy — *мнимой*.

Комплексное число можно интерпретировать как вектор, начало которого находится в начале координат, а конец в точке z. При такой интерпретации комплексного числа его действительная x и мнимая y части являются проекциями изображающего вектора z на оси координат. Кроме того, при такой интерпретации сумма комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ изобразится вектором $z_1 + z_2$, координаты которого равны сумме соответствующих координат слагаемых векторов z_1 и z_2. Таким образом, комплексное число $z_1 + z_2$ изобразится диагональю параллелограмма, построенного на векторах, изображающих числа z_1 и z_2 (рис. 4), а для изображения разности $z_1 - z_2$ складываем по правилу параллелограмма векторы, изображающие числа z_1 и $-z_2$.

Расстояние r точки z от нулевой точки, т. е. число $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$, называется *модулем* комплексного числа z и обозначается символом $|z|$.

Положение точки z на комплексной плоскости можно определить заданием полярных координат точки z: расстояния $r = |z|$ и угла θ между положительным направлением оси абсцисс и направлением вектора, изображающего число z. Число θ называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\theta = \arg z$, где $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \varepsilon\pi$, $\varepsilon = 0$ при $x > 0$; $\varepsilon = 1$ при $x < 0$, $y \geqslant 0$; $\varepsilon = -1$,

при $x<0$, $y<0$; $\arg z=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y$, если $x=0$. По определению, аргумент комплексного числа может принимать любые как положительные, так и отрицательные значения, однако при заданном r углы, отличающиеся на $2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$, соответствуют одному и тому же числу. В этом случае вводят $\operatorname{Arg} z=\arg z+2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$. Аргумент для комплексного числа (0, 0) не определен.

Полярные координаты r и θ однозначно определяют комплексное число

$$z=(x,\ y)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

Последняя запись комплексного числа называется *тригонометрической формой* комплексного числа z.

Комплексные числа, записанные в полярных координатах, удобны для умножения и деления. Пусть заданы комплексные числа $z_1=(r_1\cos\theta_1,\ r_1\sin\theta_1)$ и $z_2=(r_2\cos\theta_2,\ r_2\sin\theta_2)$. Тогда по формуле (2), п. 10.1, имеем

$$z_1z_2=(r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2),\ r_1r_2(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2))=(r_1r_2\cos(\theta_1+\theta_2),\ r_1r_2\sin(\theta_1+\theta_2)). \quad (1)$$

Аналогично, предполагая, что $|z_2|\neq 0$ и пользуясь формулой (3), п. 10.1, находим

$$\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)}{r_2^2},\ \frac{r_1r_2(\cos\theta_2\sin\theta_1-\cos\theta_1\sin\theta_2)}{r_2^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{r_1}{r_2}\cos(\theta_1-\theta_2),\ \frac{r_1}{r_2}\sin(\theta_1-\theta_2)\right). \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) заключаем, что модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей, а аргумент — сумме аргументов множителей. Модуль частного комплексных чисел равен частному модулей, а аргумент — разности аргументов делимого и делителя.

Из формулы (1) при умножении комплексных чисел с одинаковыми множителями вытекает так называемая формула *Муавра:*

$$z^n=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)^n=(r^n\cos n\theta,\ r^n\sin n\theta). \quad (3)$$

Формула Муавра дает возможность извлекать корни произвольной степени из комплексного числа. Пусть задано комплексное число $z=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$, и необходимо найти комплексное число $z_1=(r_1\cos\theta_1,\ r_1\sin\theta_1)$, такое, что $z_1^n=z$. Тогда, согласно (3), имеем

$$(r_1^n\cos n\theta_1,\ r_1^n\sin n\theta_1)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta).$$

Сравнивая здесь модули и аргументы, получим

$$r_1^n=r,\quad n\theta_1=\theta+2k\pi.$$

Следовательно, $r_1=\sqrt[n]{r}$, $\theta_1=\frac{\theta+2k\pi}{n}$. При $k=0,\ 1,\ \ldots,\ (n-1)$

получим n различных значений:

$$\sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{r}\cos\frac{\theta+2k\pi}{n},\ \sqrt[n]{r}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=\overline{1,(n-1)}. \qquad (4)$$

В частности, корни уравнения $z^2 = -2$, упомянутого в начале параграфа, равны:

$$(\sqrt{-2})_{1,2} = \left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi+2k\pi}{2},\ \sqrt{2}\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}\right)$$

или

$$(\sqrt{-2})_1 = (0,\ \sqrt{2}) = +i\sqrt{2},\ (\sqrt{-2})_2 = (0,\ -\sqrt{2}) = -i\sqrt{2}.$$

10.3. Модуль комплексного числа. Покажем, что модуль комплексного числа является *абсолютным значением*, т. е. $|z|$ удовлетворяет следующим условиям:

1°. $|z| \geqslant 0$ и $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
2°. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
3°. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

В самом деле, условие 1° очевидно, а условие 2° доказано выше. Покажем, что выполняется условие 3°, т. е. что для произвольных комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ выполняется неравенство

$$\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2} \leqslant \sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2}. \qquad (1)$$

Для любых действительных чисел x_n, y_n $(n = 1, 2)$ имеем

$$(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) - (x_1x_2+y_1y_2)^2 = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geqslant 0,$$

поэтому

$$x_1x_2 + y_1y_2 \leqslant \sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2},$$

причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $x_1y_1 - x_2y_2 = 0$. Это означает, что выполняется одно из условий: $x_1 = y_1 = 0$ или $x_2 = y_2 = 0$, или $(x_1 = kx_2) \wedge (y_1 = ky_2)\ \forall k \in \mathbb{R}$. Умножая обе части неравенства на 2 и прибавляя $x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2$, получим неравенство

$$(x_1^2+y_1^2)^2 + (x_2+y_2)^2 \leqslant (\sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2})^2,$$

из которого непосредственно следует (1). При этом знак равенства достигается, если $(|z_1| = 0) \vee (|z_2| = 0) \vee (\arg z_1 = \arg z_2)$.

Таким образом доказали, что $|z|$ — абсолютная величина, а следовательно, множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ является нормированным полем. Поэтому, согласно (4), § 8, справедливо неравенство

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|. \qquad (2)$$

§ 11. ПОЗИЦИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

Пусть натуральное число $p \geqslant 2$. Покажем, что при помощи последовательности чисел 0, 1, 2, ..., $p-1$ можно записать любое действительное число.

Пусть $x > 0$. Согласно следствию 1, п. 7.5, существует целое число s, такое, что

$$p^s \leqslant x < p^{s+1}.$$

Число s единственно, поскольку при $s \neq t$

$$[p^s,\ p^{s+1}[\cap [p^t,\ p^{t+1}[= \varnothing$$

и, следовательно, никакое действительное число не может принадлежать одновременно двум непересекающимся полуинтервалам. Если s уже определено, то среди чисел $1, 2, \ldots, p-1$ найдется число a_0 такое, что

$$a_0 p^s \leqslant x < (a_0 + 1)\, p^s.$$

Число a_0 определяется однозначно, поскольку при $a \neq b$ полуинтервалы $[ap^s,\ (a+1)\,p^s[$, $[bp^s,\ (b+1)\,p^s[$ не имеют общих точек. Далее, если число a_0 найдено, укажем число $a_1 \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1\}$, такое, что

$$a_0 p^s + a_1 p^{s-1} \leqslant x < a_0 p^s + (a_1 + 1)\, p^{s-1}.$$

Неограниченно продолжая описанный процесс, найдем бесконечную последовательность символов

$$a_0 a_1 a_2 \ldots, \quad a_0 \neq 0, \tag{1}$$

где $a_j \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1\}$.

Для определения числа x поступаем следующим образом: если $s \geqslant 0$, ставим запятую между символами a_s и a_{s+1}; если же $s < 0$, то перед последовательностью записываем дополнительно $(-s)$ нулей и после первого из них ставим запятую.

Таким образом, каждому действительному числу x по описанному выше правилу ставим в соответствие символ вида (1). Этот символ называют *p-ичной* (для $p = 10$ — *десятичной*) *позиционной записью* числа x. При этом цифры $a_0, a_1, \ldots$ в их взаимных *положениях (позициях)* в (1) называются *p-ичными* (для $p = 10$ — *десятичными*) *знаками* числа x.

Например, числа $\frac{2161}{1024}$ и $\frac{5}{8}$ записываются соответственно в десятичной системе символами:

$$2{,}1103515625 \text{ и } 0{,}625;$$

эти же числа в двоичной системе записываются соответственно символами:

$$10{,}0001110001 \text{ и } 0{,}101.$$

Заметим, что в символе (1) не может, начиная с некоторого места, все время повторяться цифра $p-1$.

В самом деле, пусть после запятой, например, начиная с номера n, все цифры a_j, $j = n, n+1, \ldots$, равны $p-1$. Тогда число x принадлежало бы полуинтервалам вида

$$z + \frac{p-1}{p^n} \leqslant x < z + \frac{1}{p^{n-1}},$$

$$z+\frac{p-1}{p^n}+\frac{p-1}{p^{n+1}}\leqslant x<z+\frac{p-1}{p^n}+\frac{p}{p^{n+1}}=z+\frac{1}{p^{n-1}},$$

. . . . . .

$$z+\frac{p-1}{p^n}+\frac{p-1}{p^{n+1}}+\cdots+\frac{p-1}{p^{n+k}}\leqslant x<z+\frac{1}{p^{n-1}},$$

. . . . . .

Вычисляя сумму k членов геометрической прогрессии, находим, что число x заключено между числами

$$z+\frac{1}{p^{n-1}}-\frac{1}{p^{n+k}}\leqslant x<z+\frac{1}{p^{n-1}}.$$

Однако при $k\in\mathbb{N}$ все полуинтервалы

$$\left[z+\frac{1}{p^{n-1}}-\frac{1}{p^{n+k}},\ z+\frac{1}{p^{n-1}}\right[\supset\left[z+\frac{1}{p^{n-1}}-\frac{1}{p^{n+k+1}},\ z+\frac{1}{p^{n-1}}\right[$$

не имеют ни одной общей точки. Действительно, если предположить, что такая точка α существует, то тогда точка $\alpha-y-\frac{1}{p^{n-1}}$ (n — фиксировано) была бы общей точкой всех полуинтервалов

$$\left]-\frac{1}{p^{n+1}},\ 0\right[\supset\left]-\frac{1}{p^{n+2}},\ 0\right[\supset\cdots\supset\left]-\frac{1}{p^{n+k}},\ 0\right[\supset\ldots.$$

Но эта система полуинтервалов не может иметь общих отрицательных точек в силу равенства

$$\sup_k\left\{-\frac{1}{p^{n+k}}\right\}=0,\ 0\notin\left[-\frac{1}{p^{n+k}},\ 0\right[,$$

а положительные точки вообще не принадлежат ни одному из этих полуинтервалов.

Пусть теперь задана произвольная последовательность

$$b_1b_2\ldots, \tag{2}$$

образованная из цифр от 0 до $p-1$ с указанной запятой, и как угодно далеко имеются цифры, отличные от $p-1$.

Покажем, что существует число $x>0$, для которого (2) совпадает с записью этого числа посредством последовательности (1). Пусть b_m — первая, отличная от нуля, цифра в (2). Запятая находится или правее b_m на $q\geqslant 0$ цифр (не считая b_m) или левее b_m на $t\geqslant 1$ цифр (считая b_m); во втором случае обозначим $q=-t$. Положим

$$x=\sup_k\{p^qb_m+p^{q-1}b_{m+1}+p^{q-2}b_{m+2}+\cdots+p^{q-k}b_{m+k}\}$$

и покажем, что p-ичное разложение числа x совпадает с (2).

Фиксируем натуральное число τ, затем выбираем число $r>\tau$ так, чтобы $b_{m+r}\leqslant p-2$, и пусть $k>r$, k — произвольно.

Тогда, суммируя геометрическую прогрессию, приходим к неравенству

$$p^{q-(\tau+1)}b_{m+\tau+1}+\cdots+p^{q-r}b_{m+r}+\cdots+p^{q-k}b_{m+k}\leqslant$$

$$\leqslant (p-1)\,p^{q-(\tau+1)} + \cdots + (p-1)\,p^{q-r} + \cdots + (p-1)\,p^{q-k} - p^{q-r} =$$

$$= (p-1)\,\frac{p^{q-(\tau+1)} - p^{q-(k+1)}}{1-p^{-1}} - p^{q-r} < p^{q-\tau} - p^{q-r}.$$

Здесь воспользовались неравенством $b_{m+r}p^{q-r} \leqslant (p-1)\,p^{q-r} - p^{q-r}$, вытекающим из условия $b_{m+r} \leqslant p-2$.

Теперь для точной верхней грани имеем оценку

$$x = \sup_k \{p^q b_m + \cdots + p^{q-\tau}b_{m+\tau} + \cdots + p^{q-k}b_{m+k}\} \leqslant$$

$$\leqslant p^q b_m + \cdots + p^{q-\tau}b_{m+\tau} + p^{q-\tau} - p^{q-r} <$$

$$< p^q b_m + \cdots + p^{q-\tau}(b_{m+\tau}+1).$$

Таким образом, при любом $\tau \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеем

$$p^q b_m + \cdots + p^{q-\tau}b_{m+\tau} \leqslant x < p^q b_m + \cdots + p^{q-\tau}(b_{m+\tau}+1).$$

Пользуясь определением числа s и знаков $a_0, a_1, a_2, \ldots$ числа x, находим $s = q$, $a_0 = b_m$, $a_1 = b_{m+1}$, ... А отсюда следует совпадение p-ичного разложения числа x с записью (2).

Если $x < 0$, то $-x > 0$, поэтому по только что установленному

$$-x = b_1 b_2 \ldots .$$

Наконец, для $x = 0$ полагаем $x = 0, 00\ldots$, что завершает построение позиционной p-ичной системы.

§ 12. ИЗОМОРФИЗМ ПОЛНЫХ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛЕЙ

12.1. Плотность множества рациональных чисел. Пусть P — полное упорядоченное поле. Так как в любом поле P имеется 1 — нейтральный элемент операции умножения, то всегда существуют числа вида $1, 1+1=2, 2+1=3, \ldots$, называемые *натуральными числами* поля P. Их будем обозначать $\mathbb{N}(P)$.

Теорема 1. *В любом полном упорядоченном поле P множество натуральных чисел $\mathbb{N}(P)$ не ограничено сверху.*

◀ Предположим обратное. Тогда, согласно аксиоме B.0, существует $\sup \mathbb{N}(P) = \alpha$. По свойству точной верхней грани найдется натуральное число n такое, что $\alpha - 1 < n \leqslant \alpha$. Отсюда $n+1 > \alpha$, что противоречит определению числа α. ▶

В любом поле P имеется 0 — нейтральный элемент сложения и у каждой натуральной точки n имеется противоположный элемент $(-n)$. Множество $\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ называется множеством целых чисел поля P и обозначается $\mathbb{Z}(P)$. Из доказанной выше теоремы 1 и теоремы пункта 7.4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *В любом полном упорядоченном поле P множество целых чисел $\mathbb{Z}(P)$ не ограничено ни сверху, ни снизу.*

В любом поле P можно рассматривать частное от деления целых чисел на натуральные, называемое рациональным числом. Множество всех рациональных чисел поля P обозначается $\mathbb{Q}(P)$. Это множество в любом полном упорядоченном поле не ограничено ни сверху, ни снизу. Более важно и более интересно следующее свойство.

Теорема 3 (о плотности множества рациональных чисел). *Для любого числа x полного упорядоченного поля P справедливы равенства*

$$x = \sup \{r : r \in \mathbb{Q}(P) \wedge r < x\} = \inf \{r : r \in \mathbb{Q}(P) \wedge r > x\}.$$

◀ Докажем первое равенство (второе равенство следует из первого, записанного для числа $-x$). Прежде всего заметим, что точная верхняя грань существует (аксиома B.0). Обозначим ее через α. Ясно, что $\alpha \leqslant x$. Если $\alpha \neq x$, то $\alpha < x$ и $x - \alpha > 0$. По теореме Архимеда, существует натуральное число n такое, что $n > \frac{1}{x-\alpha}$. Из этого неравенства следует $x - \alpha > \frac{1}{n}$ или $x > \alpha + \frac{1}{n}$. По свойству точной верхней грани, найдется рациональное число r такое, что $\alpha - \frac{1}{n} < r \leqslant \alpha$. Число $r + \frac{1}{n}$ является рациональным и $\alpha < r + \frac{1}{n} \leqslant \alpha + \frac{1}{n} < x$. Последнее неравенство противоречит определению числа α. Источник противоречия в предположении, что $\alpha < x$. Следовательно, $\alpha = x$. ▶

12.2. Изоморфизм упорядоченных полей.

Определение. *Упорядоченное поле P называется изоморфным упорядоченному полю P', если существует биективное отображение $\varphi : P \to P'$, удовлетворяющее для любых чисел x_1 и x_2 из поля P условиям:*

1) $x_1 < x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ (возрастание отображения φ);
2) $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$ (аддитивность отображения φ);
3) $\varphi(x_1 x_2) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)$ (мультипликативность отображения φ).

Отображение φ называется *изоморфизмом* полей P и P'.

Отметим простейшие свойства изоморфизма упорядоченных полей.

Теорема 1. *Пусть 1 и 1′ — единицы упорядоченных полей P и P' соответственно, а 0 и 0′ — нули этих полей. Тогда* 1) $\varphi(0) = 0'$, 2) $\varphi(1) = 1'$.

◀ 1) По свойству аддитивности отображения φ

$$\varphi(0) = \varphi(0 + 0) = \varphi(0) + \varphi(0),$$

откуда следует, что $\varphi(0)$ — нейтральный элемент относительно сложения, т. е. $\varphi(0) = 0'$.

2) По свойству мультипликативности отображения φ

$$\varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1) = \varphi(1)\varphi(1).$$

Так как $0 < 1$, то в силу возрастания отображения φ

$$\varphi(0) = 0' < \varphi(1).$$

Из предыдущего равенства следует, что $\varphi(1)$ — нейтральный элемент относительно умножения, т. е. $\varphi(1) = 1'$. ▶

Теорема 2. *Для всех чисел $x \in P$*

1) $\varphi(-x) = -\varphi(x)$; 2) $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\varphi(x)}$, *(если $x \neq 0$).*

◀ 1) Согласно аддитивности отображения φ и того, что $0 = x + (-x)$, имеем

$$0' = \varphi(x + (-x)) = \varphi(x) + \varphi(-x),$$

откуда $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.

2) Поскольку для $\forall x \in P \wedge x \neq 0$ справедливо равенство $1 = x \times \frac{1}{x}$, то по свойству мультипликативности

$$1' = \varphi(1) = \varphi\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \varphi(x)\,\varphi\left(\frac{1}{x}\right).$$

Если $x \neq 0$, то $\varphi(x) \neq 0$. Поэтому из последнего равенства следует, что

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\varphi(x)}. \blacktriangleright$$

Поле P называется *рациональным*, если все его числа рациональные.

Теорема 3 (о изоморфизме рациональных полей). *Любые два упорядоченных рациональных поля P и P' изоморфны.*

◀ Положим $\varphi(1) = 1'$. Если $\varphi(n) = n'$, то по определению будем считать $\varphi(n + 1) = n' + 1'$. Этим мы установили соответствие между натуральными точками полей P и P'. Продолжим отображение φ на множество целых чисел поля P с помощью равенства $\varphi(-n) = -\varphi(n)$ для любого натурального числа n из поля P, а для точки нуль $\varphi(0) = 0'$.

Если рациональное число $r = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}(P)$, $n \in \mathbb{N}(P)$, то определим $\varphi(r) = \frac{m'}{n'}$, где $m' = \varphi(m)$, $n' = \varphi(n)$.

Построенное отображение является изоморфизмом полей P и P'. Действительно, по индукции устанавливается, что для всех натуральных чисел n_1 и n_2 из поля P справедливы равенства

$$\varphi(n_1 + n_2) = \varphi(n_1) + \varphi(n_2), \quad \varphi(n_1 n_2) = \varphi(n_1)\,\varphi(n_2).$$

Эти свойства с помощью равенства $\varphi(-n) = -\varphi(n)$ распространяются на множество целых чисел поля P. Наконец, если $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$, $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$, то $r_1 + r_2 = \frac{m_1 n_2 + n_1 m_2}{n_1 n_2}$, $r_1 r_2 = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}$. По определению

$$\varphi(r_1 + r_2) = \frac{\varphi(m_1 n_2 + n_1 m_2)}{\varphi(n_1 n_2)} = \frac{\varphi(m_1)\,\varphi(n_2) + \varphi(n_1)\,\varphi(m_2)}{\varphi(n_1)\,\varphi(n_2)} =$$

$$= \frac{m_1' n_2' + n_1' m_2'}{n_1' n_2'} = \frac{m_1'}{n_1'} + \frac{m_2'}{n_2'} = r_1' + r_2' = \varphi(r_1) + \varphi(r_2),$$

$$\varphi(r_1 r_2) = \frac{\varphi(m_1 m_2)}{\varphi(n_1 n_2)} = \frac{\varphi(m_1)\,\varphi(m_2)}{\varphi(n_1)\,\varphi(n_2)} = \frac{m_1'}{n_1'} \cdot \frac{m_2'}{n_2'} = r_1' r_2' = \varphi(r_1)\,\varphi(r_2).$$

Далее, из определения отображения φ очевидно, что если $r > 0$, то $\varphi(r) > 0'$. Поэтому, если $r_1 < r_2$, то $r_2 - r_1 > 0$ и $\varphi(r_2 - r_1) =$

$= \varphi(r_2) - \varphi(r_1) > 0'$, т. е. $\varphi(r_1) < \varphi(r_2)$. Если $r_2 - r_1 = 0$, то $\varphi(r_2 - r_1) = \varphi(r_2) - \varphi(r_1) = 0'$ и $\varphi(r_2) = \varphi(r_1)$. Таким образом, отображение $\varphi : P \to P'$ является изоморфизмом упорядоченных рациональных полей P и P' относительно сложения, умножения и отношения порядка. ▶

Изоморфные упорядоченные поля можно не различать. Поэтому теорема 4 дает право говорить об упорядоченном поле рациональных чисел, определенном однозначно с точностью до изоморфизма.

12.3. Изоморфизм полных упорядоченных полей. Докажем теорему, которая дает право говорить об упорядоченном поле действительных чисел, как о полном упорядоченном поле, определенном однозначно с точностью до изоморфизма.

Теорема (об изоморфизме полных упорядоченных полей). *Любые два полных упорядоченных поля изоморфны между собой.*

◀ Рациональные точки P и P' вместе с операциями сложения, умножения и отношения порядка образуют изоморфные между собой упорядоченные рациональные поля. Обозначим через φ изоморфизм полей $\mathbb{Q}(P)$ и $\mathbb{Q}(P')$. Продолжим отображение φ с множества $\mathbb{Q}(P)$ на множество всех чисел поля P по правилу

$$\varphi(x) = \sup\{\varphi(r) : r \in \mathbb{Q}(P) \wedge r < x\}. \tag{1}$$

Покажем, что $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ для всех чисел $x_1 < x_2$ из поля P. Действительно, согласно теореме 2, п. 7.5, существуют рациональные числа r_1 и r_2 такие, что $x_1 < r_1 < r_2 < x_2$. Из равенства (1) следует, что $\varphi(r_2) \leqslant \varphi(x_2)$. Для любого числа $r \in \mathbb{Q}(P)$ из неравенства $r < x_1$ следует $r < r_1$ и, в силу возрастания отображения φ на множестве $\mathbb{Q}(P)$, справедливо неравенство $\varphi(r) < \varphi(r_1)$. А из неравенства (1) следует $\varphi(x_1) \leqslant \varphi(r_1)$. Наконец, $\varphi(r_1) < \varphi(r_2)$. Поэтому $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \{r' : r' \in \mathbb{Q}(P') \wedge r' < \varphi(x)\} &= \{\varphi(r) : r \in \mathbb{Q}(P) \wedge r < x\}, \\ \{r' : r' \in \mathbb{Q}(P') \wedge r' > \varphi(x)\} &= \{\varphi(r) : r \in \mathbb{Q}(P) \wedge r > x\}. \end{aligned} \tag{2}$$

В силу теоремы 3, п. 12.1,

$$\begin{aligned} \varphi(x) = x' &= \sup\{\varphi(r) : r \in \mathbb{Q}(P) \wedge r < x\} = \\ &= \inf\{\varphi(r) : r \in \mathbb{Q}(P) \wedge r > x\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Докажем аддитивность отображения φ. Пусть $r_1 < x_1$ и $r_2 < x_2$. Тогда $r_1 + r_2 < x_1 + x_2$ и поэтому $\varphi(r_1) + \varphi(r_2) = \varphi(r_1 + r_2) \leqslant \varphi(x_1 + x_2)$. Переходя к верхней грани сначала по всем $r_1 < x_1$, затем по всем $r_2 < x_2$, получим $\varphi(x_1) + \varphi(x_2) \leqslant \varphi(x_1 + x_2)$. Аналогично, считая, что $r_1 > x_1$ и $r_2 > x_2$, имеем $r_1 + r_2 > x_1 + x_2$, $\varphi(r_1) + \varphi(r_2) = \varphi(r_1 + r_2) \geqslant \varphi(x_1 + x_2)$. Переходя к нижней грани по значениям $r_1 > x_1$, затем по значениям $r_2 > x_2$, получим $\varphi(x_1) + \varphi(x_2) \geqslant \varphi(x_1 + x_2)$. Из сравнения неравенств имеем равенство $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$.

Заметим теперь, что из равенства (3) следует свойство

$$\varphi(-x) = -\varphi(x) \text{ для всех чисел поля } P.$$

Убедимся теперь в мультипликативности отображения φ. Докажем сначала равенство $\varphi(x_1)\varphi(x_2) = \varphi(x_1x_2)$ для всех $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

Пусть $0 < r_1 < x_1$, $0 < r_2 < x_2$. Тогда $r_1r_2 < x_1x_2$ и $\varphi(r_1)\varphi(r_2) = \varphi(r_1r_2) \leqslant \varphi(x_1)\varphi(x_2)$. Так как $\varphi(r_1) > 0$, $\varphi(r_2) > 0$, то после перехода к верхней грани по r_1 и r_2 получим $\varphi(x_1)\varphi(x_2) \leqslant \varphi(x_1x_2)$. Аналогично, считая $r_1 > x_1 > 0$, $r_2 > x_2 > 0$, имеем $\varphi(r_1)\varphi(r_2) \geqslant \varphi(x_1x_2)$. Переходя к нижней грани по значениям r_1 и r_2, получим $\varphi(x_1)\varphi(x_2) \geqslant \varphi(x_1x_2)$. Поэтому $\varphi(x_1x_2) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)$.

Если $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, то $\varphi(x_1x_2) = -\varphi(x_1(-x_2)) = -\varphi(x_1) \times \times \varphi(-x_2) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)$. Аналогично поступаем в случаях, когда $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ или $x_1 < 0$, $x_2 > 0$.

Осталось убедиться, что каждое число поля P' является значением отображения φ. Пусть x' — число поля P'. Положим

$$x = \sup\{r : r \in \mathbb{Q}(P) \wedge \varphi(r) < x'\}.$$

Тогда можно проверить, что $\varphi(x) = x'$. Пусть равенство не верно. Тогда $\varphi(x) < x'$ или $x' < \varphi(x)$. Рассмотрим случай, когда $\varphi(x) < x'$. Согласно теореме 2, п. 7.5, найдется число $r' \in \mathbb{Q}(P')$ такое, что $\varphi(x) < r' < x'$. Пусть $r' = \varphi(r)$. Тогда из неравенства $\varphi(x) < \varphi(r)$ следует, что $x < r$. Из неравенства $\varphi(r) < x'$ и свойства $r \in \mathbb{Q}(P)$ по определению числа x следует, что $r \leqslant x$. Получили противоречие с неравенством $x < r$. Рассмотрим случай, когда $x' < \varphi(x)$. Аналогично, выбираем $r' = \varphi(r)$ такое, что $x' < r' = \varphi(r) < \varphi(x)$. Из неравенства $\varphi(r) < \varphi(x)$ следует, что $r < x$. В силу определения числа x найдется число $r_1 \in \mathbb{Q}(P)$ такое, что $r < r_1 < x$ и $\varphi(r_1) < x'$. Поэтому $\varphi(r) < \varphi(r_1) \leqslant x'$. Получили противоречие с неравенством $x' < \varphi(r)$. ▶

§ 13. СЧЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА. МНОЖЕСТВА МОЩНОСТИ КОНТИНУУМА

13.1. Эквивалентные множества. Пусть A и B—два множества произвольной природы и необходимо выяснить, одинаково ли количество элементов в этих множествах.

Чтобы ответить на этот вопрос, сосчитаем элементы каждого из множеств, а затем сравним числа, полученные в результате счета. Этот способ, очевидно, пригоден лишь для конечных множеств.

Эту задачу можно решать и другим способом. Пусть, например, множество A есть множество студентов в данной аудитории, а B — множество парт в этой же аудитории. Если предложим каждому студенту сесть за парту и если за каждой партой будет сидеть один студент, то все парты будут заняты и все студенты будут сидеть, поэтому без всяких подсчетов можем сказать, что количество студентов равно количеству парт. В этом примере каждому элементу множества A поставлен в соответствие один и только один элемент множества B. Именно такое соответствие позволяет заключить, что эти множества имеют одинаковое количество элементов.

Следует отметить, что второй способ сравнения множеств можно использовать и в случае бесконечных множеств.

Ввести систему координат и построить аналитическое взаимно-однозначное соответствие между точками интервала $]a, b[$ и множеством $\mathbb{R}$.

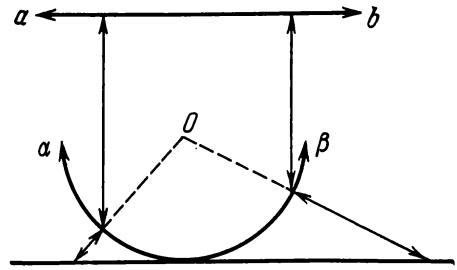


Рис. 5

Так, множества

$$A = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\},$$

$$B = \left\{1, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots\right\}$$

имеют одинаковое «количество» элементов, поскольку произвольному натуральному числу $n \in A$ можно поставить в соответствие один и только один элемент $\frac{1}{n^2}$ из множества B. Таким образом, между этими множествами существует взаимно-однозначное соответствие, задаваемое отображением $n \mapsto \frac{1}{n^2}$.

Определение. *Множества A и B называются эквивалентными, или равномощными, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие, т. е. если существует отображение множества A на множество B такое, что разным прообразам соответствуют разные образы; при этом пишут*

$$A \sim B.$$

Из этого определения вытекают следующие свойства отношения эквивалентности:

1) $A \sim A$ (рефлексивность);

2) если $A \sim B$, то $B \sim A$ (симметричность).

3) если $A \sim B \wedge B \sim C$, то $A \sim C$ (транзитивность).

Пусть n — любое натуральное число, $\mathcal{J}_n$ — множество, состоящее из чисел 1, 2, ..., n. Множество A называется *конечным,* если $A \sim \mathcal{J}_n$ при некотором n. Множество A *бесконечно,* если оно не является конечным.

Приведем несколько примеров эквивалентных множеств.

1. Произвольное множество $\{x_n\}$ действительных чисел, если

$$\forall n \in \mathbb{N} \wedge \forall m \in \mathbb{N} : (x_n \neq x_m) \Rightarrow (n \neq m).$$

Здесь взаимно-однозначное соответствие устанавливается посредством отображения $f : n \mapsto x_n$.

2. Множество точек сегмента $U = \{y \in \mathbb{R} : 0 \leqslant y \leqslant 2\}$ эквивалентно множеству точек сегмента $\Delta = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$. Между точками этих сегментов устанавливается взаимно-однозначное соответствие отображением $f : y \mapsto 2x$.

3. Из свойств эквивалентности вытекает, что множество точек произвольного интервала $]a, b[$ эквивалентно множеству точек числовой прямой $\mathbb{R}$. Взаимно-однозначное соответствие указано на рис. 5. Множество точек интервала $]a, b[$ эквивалентно множеству точек дуги $\alpha\beta$, а множество точек дуги $\alpha\beta$ — множеству точек числовой прямой $\mathbb{R}$. В силу транзитивности отношения эквивалентности заключаем, что $]a, b[\sim \mathbb{R}$.

13.2. Счетные множества.

Определение 1. *Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называется счетным множеством.*

О счетном множестве говорят, что оно имеет *мощность* a.

Например, произвольная последовательность различных элементов является счетным множеством. Как уже указывалось, взаимно-однозначное соответствие между элементами последовательности и натуральными числами задается отображением $f : n \mapsto a_n$.

В общем случае, множество A является счетным, если его элементы можно занумеровать.

Определение 2. *Если множество A не конечно и не счетно, то оно называется несчетным.*

Если же A конечно или счетно, то оно называется не более чем счетным.

Теорема 1. *Всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно.*

◀ Пусть A счетное множество, а B его бесконечное подмножество. Так как A счетное множество, то его элементы можно расположить в виде последовательности

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots .$$

Ясно, что элементы множества B также входят в эту последовательность. Через n_1 обозначим наименьший из индексов такой, что $a_{n_1} \in B$. Через n_2 обозначим наименьший из индексов, больших n_1 и такой, что $a_{n_2} \in B$, и т. д. В результате такого процесса все элементы множества B будут расположены в последовательность $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ и получим взаимно-однозначное соответствие между числами $\mathbb{N}$ и элементами множества $B : k \mapsto a_{n_k}$. Следовательно, B — счетное множество. ▶

Из этой теоремы следует, что никакое несчетное множество не может быть подмножеством счетного множества.

Теорема 2. *Пусть элементами последовательности являются счетные множества $A_k = \{a_{kn}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда объединение*

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \tag{1}$$

счетно.

◀ Расположим элементы объединения $S = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{a_{kn}\}$ в порядке возрастания суммы индексов, а при равной сумме в порядке воз-

растания второго индекса:

$$a_{11},\ a_{21},\ a_{12},\ a_{31},\ a_{22},\ a_{13},\ a_{41},\ a_{32},\ a_{23},\ a_{14},\ a_{51},$$
$$a_{42},\ a_{33},\ a_{24},\ a_{15},\ \ldots\ . \qquad (2)$$

Если некоторые из множеств A_k имеют общие элементы, то они в (2) будут встречаться более одного раза. Теперь элементы (2) заново перенумеруем в порядке следования их в строке, причем элементам, которые в (2) встречаются более одного раза, будем приписывать номер только при первой встрече, а все последующие пропускаем. В результате каждый элемент из S получит свой номер. Отсюда следует, что элементы множества S будут расположены в последовательность. Эта последовательность бесконечна, так как она содержит бесконечное множество A_1, поэтому множество S является счетным. ▶

Теорема 3. *Множество всех рациональных чисел счетно.*

◀ Множество всех рациональных чисел представляет собой объединение счетной совокупности множеств

$$A_1 = \{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots\},$$
$$A_2 = \left\{\frac{0}{2},\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 2}{2},\ \frac{\pm 3}{2},\ \ldots\right\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_k = \left\{\frac{0}{k},\ \frac{\pm 1}{k},\ \frac{\pm 2}{k},\ \frac{\pm 3}{k},\ \ldots\right\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Каждое из этих множеств счетно. Например, при любом фиксированном k существует взаимно-однозначное отображение

$$\mathbb{N} \to A_k : n \mapsto \frac{1}{k}\left(\frac{(-1)^n n}{2} + \frac{1-(-1)^n}{4}\right).$$

Поэтому, согласно предыдущей теореме, объединение множеств A_k, $k \in \mathbb{N}$, счетно. ▶

Теорема 4. *Множество всех многочленов*

$$P : x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

с рациональными коэффициентами счетно.

◀ Множество всех многочленов с рациональными коэффициентами является объединением $n+1$ множеств A_n, где A_n — множество всех многочленов степени не выше n с рациональными коэффициентами. Докажем сначала, что каждое из множеств A_n счетно.

При $n = 0$ множество A_0 представляет собой множество рациональных чисел, которое является счетным согласно теореме 3. Предположим теперь, что множество A_k счетно и докажем, что множество A_{k+1} также является счетным множеством. Действительно, каждый из элементов множества A_{k+1} можно записать в виде

$$x \mapsto Q(x) + a_{k+1}x^{k+1},$$

где Q — многочлен степени не выше k с рациональными коэффициентами, т. е. элемент множества A_k, a_{k+1} — рациональное число. Согласно предположению, множество A_k счетно, а коэффициент a_{k+1}

принимает счетное множество значений, т. е.

$$a_{k+1} = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}.$$

Таким образом, множество A_{k+1} является счетной совокупностью счетных множеств $Q(x) + r_j x^{k+1}$, $j \in \mathbb{N}$, а поэтому счетно. А тогда, согласно индукции, каждое из множеств A_n счетно и, следовательно, счетно их объединение. ▶

13.3. Мощность континуума. В предыдущем пункте рассмотрели примеры счетных множеств. Однако далеко не все множества счетные. Следующая теорема приводит пример несчетного множества.

Теорема. *Множество точек сегмента* $[0, 1]$ *несчетно.*

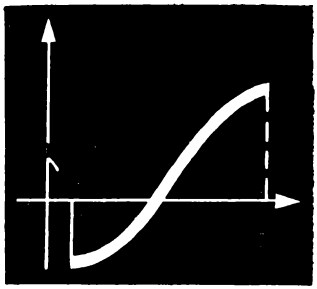
◀ Предположим, что множество точек сегмента $[0, 1]$ счетно. Тогда все точки этого сегмента могут быть расположены в виде попарно различных элементов последовательности:

$$x_1 = 0, a_{11}a_{12} \ldots a_{1n} \ldots,$$
$$x_2 = 0, a_{21}a_{22} \ldots a_{2n} \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = 0, a_{n1}a_{n2} \ldots a_{nn} \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Рассмотрим действительное число ξ, определяющееся следующим образом: перед запятой поставим цифру 0, далее в качестве j-го десятичного знака выберем произвольное целое число, отличное от 0 и 9, а также от j-го десятичного знака числа x_j. Таким способом образуем бесконечную десятичную дробь, определяющую некоторое число ξ. Поскольку десятичные знаки числа ξ выбраны отличными от 0 и 9, то тем самым избежали возможности получения числа x, имеющего двойную запись, например, $x = 0{,}134000\ldots = 0{,}133999\ldots$. А поскольку n-й десятичный знак числа ξ отличен от n-го десятичного знака числа x_n, то число ξ отлично от всех чисел множества $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, что противоречит предположению. ▶

Определение. *Множество* A, *эквивалентное множеству точек сегмента* $[0, 1]$, *называется множеством мощности континуума.*

Например, произвольный сегмент $[a, b]$ имеет мощность континуума, так как существует взаимно-однозначное отображение сегмента $[0, 1]$ на сегмент $[a, b]$: $y = a + (b - a)x$.



2

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

§ 1. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1.1. Поле. Основными понятиями математического анализа являются числа, функции, пределы, производные и интегралы. С общей точки зрения, связь между понятиями описывается теорией множеств или, точнее, определенными математическими структурами. Поэтому современный математический анализ имеет своими объектами изучения определенные математические структуры.

Одной из основополагающих математических структур является поле $\mathbb{K}$. Поле мы определили как множество $\mathbb{K} = \{\lambda, \mu, \gamma, \ldots\}$, обладающее двумя внутренними бинарными операциями: сложением и умножением. При этом элементы поля образуют абелеву группу по сложению, а ненулевые элементы — по умножению. Кроме того, умножение дистрибутивно относительно сложения.

В дальнейшем под полем $\mathbb{K}$ всегда будем понимать или поле действительных чисел $\mathbb{R}$ или поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

1.2. Определение векторного пространства. При изучении таких объектов, как функция $f : E \to F$, необходимо оперировать как с элементами $x \in E$, так и с элементами $y \in F$. Если E и F не являются частями одного более широкого множества, то возникает необходимость иметь дело с объектами различной природы, подчиненными различным аксиомам. При этом сталкиваемся с более сложными, чем поле, математическими структурами.

Первой из таких структур является *векторное пространство.*

Определение 1. *Векторным пространством над полем* $\mathbb{K} = \{\lambda, \mu, \gamma, \ldots\}$ *называется множество* $E = \{x, y, z, \ldots\}$, *в котором определены:*

I. *Внутренняя бинарная операция*

$$E \times E \to E : (x, y) \mapsto x + y,$$

относительно которой E *является абелевой группой:*

1) $x + (y + z) = (x + y) + z$; 2) $x + \theta = x$;

3) $x + (-x) = \theta$; 4) $x + y = y + x$

(здесь θ *— нулевой элемент группы).*

II. *Внешняя бинарная операция*

$$\mathbb{K} \times E \to E : (\lambda, x) \mapsto \lambda x,$$

удовлетворяющая следующим аксиомам:

5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$; 6) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$;

7) $(\lambda\mu) x = \lambda(\mu x)$; 8) $1 \cdot x = x$.

Следовательно, векторное пространство является структурой $(E, \mathbb{K}, +, \cdot, =)$.

Элементы векторного пространства называются *векторами* (или *точками*), а элементы поля $\mathbb{K}$ — *скалярами*.

Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то E называется *действительным* векторным пространством $(E, \mathbb{R}, +, \cdot, =)$, а если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то E называется *комплексным* векторным пространством $(E, \mathbb{C}, +, \cdot, =)$.

Определение 2. *Пусть E — векторное пространство над полем $\mathbb{K}$. Всякое множество $E' \subset E$, обладающее двумя бинарными операциями пространства E и являющееся векторным пространством над полем $\mathbb{K}$, называется* векторным подпространством *пространства E.*

1.3. Общие свойства векторных пространств. В произвольном векторном пространстве выполняются следующие свойства:

1) $\lambda\theta = \theta$; 2) $0 \cdot x = \theta$; 3) $(-1) \cdot x = -x$.

◀ Действительно, из аксиомы 6), п. 1.2, при $\mu = 0$ вытекает равенство $\lambda x = \lambda x + 0 \cdot x$, из которого следует $0 \cdot x = \theta$ (поскольку произвольный элемент группы регулярный).

Из аксиомы 6), при $\mu = -\lambda$, где $-\lambda$ — противоположный элемент для λ, вытекает

$$((\lambda + (-\lambda)) x = \lambda x + (-\lambda) x) \Rightarrow (0x = \lambda x + (-\lambda) x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda x + (-\lambda) x = \theta) \Rightarrow (-\lambda x = (-\lambda) x).$$

Полагая в последнем равенстве $\lambda = 1$, получим третье свойство векторного пространства.

Наконец, из аксиомы 5) при $y = -x$, где $-x$ — противоположный элемент для элемента x, получим

$$\lambda(x + (-x)) = \lambda x + \lambda(-x).$$

Отсюда и из аксиом 3) и 7) следует

$$\lambda\theta = \lambda x - \lambda x$$

или

$$\lambda\theta = \theta. \blacktriangleright$$

1.4. Нормированные векторные пространства. Понятие абсолютного значения может быть распространено на векторное пространство над нормированным полем $\mathbb{K}$.

Определение. *Нормой в векторном нормированном пространстве E называется отображение $E \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \|x\|$, $\mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} : 0 \leqslant a < +\infty\}$, удовлетворяющее следующим аксиомам:*

1) $(\|x\| \geqslant 0) \wedge (\|x\| = 0) \Leftrightarrow (x = \theta)$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in E$;

3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad \forall x,\ y \in E$ (неравенство треугольника).

1.5. Важнейшие векторные пространства. а) Очевидно, поле $\mathbb{R}$ является векторным пространством над самим собой. Кроме того, поле $\mathbb{R}$ является нормированным векторным пространством, норма любого элемента которого совпадает с абсолютной величиной этого элемента $\|x\| = |x|$.

б) Пусть $E = \mathbb{R}^m$, где $\mathbb{R}^m$ — множество всевозможных упорядоченных систем m действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_m$, каждое из которых может принимать произвольное значение.

Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — произвольные элементы множества $\mathbb{R}^m$, а λ — произвольный элемент поля $\mathbb{K}$. Тогда внутреннюю бинарную операцию

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m : (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$$

и внешнюю бинарную операцию

$$\mathbb{K} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m : (\lambda,\ \boldsymbol{x}) \mapsto \lambda \boldsymbol{x}$$

определим, соответственно, посредством равенств

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \ldots,\ x_m + y_m),$$
$$\lambda \boldsymbol{x} = (\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \ldots,\ \lambda x_m).$$

Легко проверить, что для введенных операций все аксиомы векторного пространства выполняются. Нулевым элементом θ является вектор $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, а противоположным элементом к вектору $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — вектор $-\boldsymbol{x} = (-x_1, \ldots, -x_m)$.

Векторное пространство $\mathbb{R}^m$ превращается в нормированное векторное пространство, если для произвольного $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ положим

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = |\boldsymbol{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad (\textit{сферическая норма}). \tag{1}$$

◀ В самом деле, для функции $\boldsymbol{x} \mapsto |\boldsymbol{x}|$ выполнены условия 1), 2), п. 1.4. Остается убедиться, что выполняется условие 3):

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_1 \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1 + \|\boldsymbol{y}\|_1. \tag{2}$$

Запишем неравенство (2) в координатной форме

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i + y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} y_i^2}. \tag{3}$$

Обе части неравенства (3) возведем в квадрат, затем вычтем из них сумму $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 + \sum\limits_{i=1}^{m} y_i^2$ и разделим на 2. В результате получим неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} x_i y_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} y_i^2}, \tag{4}$$

эквивалентное неравенству (2). Неравенство (4) называется *неравенством Коши — Буняковского.* Справедливость последнего вытекает из того, что дискриминант неотрицательного квадратного трехчлена

$$\sum_{i=1}^{m}(tx_i+y_i)^2=t^2\sum_{i=1}^{m}x_i^2+2t\sum_{i=1}^{m}x_iy_i+\sum_{i=1}^{m}y_i^2$$

неположителен, т. е. справедливо неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{m}x_iy_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{m}y_i^2\right)\leqslant 0,$$

из которого непосредственно следует неравенство Коши — Буняковского. ▶

Норму в $\mathbb{R}^m$ можно ввести не единственным образом. Например, если положить

$$\|x\|_2=\sum_{i=1}^{m}|x_i| \quad (\textit{октаэдрическая} \text{ норма}) \tag{5}$$

или

$$\|x\|_3=\max_{1\leqslant i\leqslant m}|x_i| \quad (\textit{кубическая} \text{ норма}), \tag{6}$$

то каждое из этих выражений будет нормой в $\mathbb{R}^m$.

◀ Действительно, в обоих случаях выполнение условий 1), 2), п. 1.4, очевидно. Выполнение неравенства треугольника для $\|x\|_2$ проверяется непосредственно:

$$\|x+y\|_2=\sum_{i=1}^{m}|x_i+y_i|\leqslant\sum_{i=1}^{m}|x_i|+\sum_{i=1}^{m}|y_i|=\|x\|_2+\|y\|_2.$$

Наконец, из неравенства

$$|x_i+y_i|\leqslant|x_i|+|y_i|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant m}|x_i|+\max_{1\leqslant i\leqslant m}|y_i|=\|x\|_3+\|y\|_3$$

и свойства точной верхней грани вытекает

$$\|x+y\|_3=\max_{1\leqslant i\leqslant m}|x_i+y_i|\leqslant\|x\|_3+\|y\|_3. \quad ▶$$

В дальнейшем три нормы $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ и $\|x\|_3$, введенные в векторном пространстве $\mathbb{R}^m$, обозначим соответственно символами $|x|_1$, $|x|_2$, $|x|_3$; при этом, если некоторое соотношение окажется справедливым для любой из этих норм, то индекс при норме будем опускать. Индекс опускается и в том случае, когда ясно, о какой из трех норм идет речь.

Отметим еще одно полезное неравенство для нормы

$$|\|x\|-\|y\||\leqslant\|x-y\|, \tag{7}$$

справедливое для произвольного нормированного векторного пространства.

◀ Действительно, согласно определению пункта 1.4,

$$\|x\|=\|(x-y)+y\|\leqslant\|x-y\|+\|y\|,$$

откуда

$$\|x\|-\|y\|\leqslant\|x-y\|. \tag{8}$$

Меняя местами x и y, получим

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| \leqslant$$
$$\leqslant |-1| \cdot \|x - y\| = \|x - y\|. \tag{9}$$

Из неравенств (8) и (9) вытекает неравенство (7). ▶

в) Пусть $\mathfrak{M} = \{A, B, C, \ldots\}$ — множество, элементами которого являются *матрицы* размера $m \times n$, т. е. таблицы, состоящие из m строк и n столбцов, вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}),$$

где a_{ij} — действительные числа.

Множество $\mathfrak{M}$ матриц $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ можно отождествить с пространством $\mathbb{R}^{mn}$ векторов $x = (a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn})$ при помощи взаимно-однозначного соответствия

$$(a_{ij}) \leftrightarrow (a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}).$$

Поэтому пространство $\mathfrak{M}$ изоморфно пространству $\mathbb{R}^{mn}$ относительно операций сложения элементов из $\mathfrak{M}$ и умножения на скаляры поля $\mathbb{K}$.

Тогда, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix} = (b_{ij})$$

— произвольные матрицы из множества $\mathfrak{M}$, а λ — скаляр поля $\mathbb{K}$, то

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \ldots & a_{2n} + b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \ldots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \ldots & \lambda a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \ldots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, множество $\mathfrak{M}$ является векторным пространством над полем $\mathbb{K}$.

Множество матриц $\mathfrak{M}$ превращается в нормированное векторное пространство, если норму в нем введем одним из равенств:

$$\|A\|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}, \tag{10}$$

$$\|A\|_2 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|, \tag{11}$$

$$\|A\|_3 = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{12}$$

Действительно, $\|A\|_1$ является евклидовой нормой пространства $\mathbb{R}^{mn}$, а следовательно, и пространства $\mathfrak{M}$.

Далее, для $\|A\|_2$ и $\|A\|_3$ выполнение первых двух аксиом нормы очевидно. Остается проверить выполнение неравенства треугольника. Из свойств абсолютной величины вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} |a_{ij} + b_{ij}| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| + \sum_{i=1}^{m} |b_{ij}| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| + \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{m} |b_{ij}| = \|A\|_2 + \|B\|_2,$$

из которого следует, что

$$\|A + B\|_2 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij} + b_{ij}| \leqslant \|A\|_2 + \|B\|_2.$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$\|A + B\|_3 \leqslant \|A\|_3 + \|B\|_3.$$

Таким образом, множество $\mathfrak{M}$, элементами которого являются матрицы размера $m \times n$, является нормированным векторным пространством, так как каждому элементу $A \in \mathfrak{M}$ поставлено в соответствие число $\|A\|$, где $\|A\|$ одно из трех значений (10) — (12).

Аналогично, как и в случае векторного нормированного пространства $\mathbb{R}^m$, если некоторое соотношение окажется справедливым для любой из трех норм, то индекс при норме будем опускать. Индекс при норме опускаем и в том случае, когда известно, о какой норме идет речь.

Определение. *Произведением матриц $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ и $B = (b_{ij})$ размера $n \times p$ называется матрица C, элементы которой c_{il} определяются равенствами*

$$c_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl}, \quad i = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, p}.$$

Произведение матриц определено только для случая, когда число столбцов множимого равно числу строк множителя. Следовательно, согласно определению, имеем

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j2} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jp} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j2} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} b_{2j}b_{jp} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j2} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}b_{jp} \end{pmatrix}.$$

Например, пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix},$$

тогда произведением матриц A и B является матрица

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1+4 & 0+6 & 1+10 & 2-2 \\ -1+6 & 0+9 & -1+15 & -2-3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 11 & 0 \\ 5 & 9 & 14 & -5 \end{pmatrix}.$$

Матрицы размера $n \times n$ называются *квадратными* матрицами.

Если множество $\mathfrak{M}$ состоит только из квадратных матриц, то тогда произведение определено для любых двух элементов множества $\mathfrak{M}$. Следует отметить, что произведение матриц не является коммутативным. Однако произведение квадратных матриц обладает свойствами ассоциативности: для любых квадратных матриц A, B и C справедливо равенство

$$(AB)C = A(BC).$$

В самом деле, пусть

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{jq}), \quad C = (c_{qp}), \quad i, j, q, p = \overline{1, n}.$$

Тогда, пользуясь определением произведения матриц и ассоциативностью действительных чисел, получим

$$(AB)C = ((a_{ij})(b_{jq}))(c_{qp}) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jq}\right)(c_{qp}) =$$

$$= \left(\sum_{q=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jq}c_{qp}\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\sum_{q=1}^{n} b_{iq}c_{qp}\right) =$$

$$= (a_{ij})\left(\sum_{q=1}^{n} b_{iq}c_{qp}\right) = (a_{ij})((b_{iq})(c_{qp})) = A(BC).$$

Ассоциативность произведения квадратных матриц установлена.

Кроме того, произведение квадратных матриц дистрибутивно относительно операции сложения. Это значит, что для любых квадратных матриц A, B и C выполняются равенства

$$(A + B)C = AC + BC,$$
$$C(A + B) = CA + CB.$$

Действительно, если $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{jq})$, $i, j, q = \overline{1, n}$, то

$$(A + B)C = ((a_{ij}) + (b_{ij}))(c_{jq}) = (a_{ij} + b_{ij})(c_{jq}) = \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) c_{jq}\right) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}c_{jq} + b_{ij}c_{jq})\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jq}\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}c_{jq}\right) =$$

$$= (a_{ij})(c_{jq}) + (b_{ij})(c_{jq}) = AC + BC.$$

Аналогично доказывается, что выполняется второе равенство дистрибутивности.

Таким образом, множество $\mathfrak{M}$, состоящее из квадратных матриц, образует *кольцо* $(\mathfrak{M}, +, \cdot, =)$. Это кольцо *унитарное,* поскольку оно содержит единичный элемент (единичную матрицу). Кроме того, кольцо квадратных матриц содержит *делители нуля.* Например, матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

являются делителями нуля, так как

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

г) Рассмотрим множество $\mathscr{G} = \{f, g, h, \ldots\}$, элементами которого являются отображения множества E в множество F. Предположим, что множество F является векторным пространством над полем $\mathbb{K}$. Тогда в множестве $\mathscr{G}$ можно ввести структуру векторного пространства над тем же полем $\mathbb{K}$. Пусть f и g произвольные отображения из множества $\mathscr{G}$, тогда $\forall x \in E$ соответствие f относит элемент $f(x) \in F$, а соответствие g — элемент $g(x) \in F$. Поскольку в F определена операция сложения $f(x) + g(x)$, то можно определить отображение, которое каждому $x \in E$ ставит в соответствие $(f(x) + g(x)) \in F$, положив

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in E.$$

Такое отображение называется суммой отображений f и g. Тем самым в множестве $\mathscr{G}$ определили внутреннюю бинарную операцию $\mathscr{G} \times \mathscr{G} \to \mathscr{G}$, которая превращает множество $\mathscr{G}$ в абелеву группу.

В самом деле, поскольку $\forall x \in E$ и $\forall f, g, h \in \mathscr{G}$, справедливы равенства

$$f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x),$$

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x),$$

то

$$f + (g + h) = (f + g) + h, \quad f + g = g + f.$$

Следовательно, внутренняя бинарная операция является ассоциативной и коммутативной.

Если символом o обозначим отображение, ставящее в соответствие каждому $x \in E$ нейтральный элемент сложения θ (нуль) векторного

пространства F, т. е. $o : x \mapsto \theta \quad \forall x \in E$, то

$$f(x) + o(x) = f(x) + \theta = f(x).$$

Отсюда $f + o = f$; следовательно, отображение o является нейтральным элементом введенной нами операции сложения в $\mathcal{C}$. Наконец, пусть f — произвольное отображение из $\mathcal{C}$. Если $g : x \mapsto -f(x)$ $\forall x \in E$, то $f + (-f) = o$, поскольку $f(x) + (-f(x)) = \theta$. Таким образом, каждый элемент $f \in \mathcal{C}$ имеет противоположный элемент $(-f) \in \mathcal{C}$.

Следовательно, множество $\mathcal{C}$ образует аддитивную абелеву группу.

Внешнюю бинарную операцию

$$\mathbb{K} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} : (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f,$$

где $\mathbb{K}$ — поле скаляров, определим следующим образом: для каждого $\lambda \in \mathbb{K}$ и $\forall f \in \mathcal{C}$ определим отображение $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x) \quad \forall x \in E$. Поскольку F векторное пространство, то $\forall x \in E$, $\forall f, g \in \mathcal{C}$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ получим

$$\lambda(f(x) + g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x),$$
$$(\lambda + \mu) f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x),$$
$$\lambda(\mu f(x)) = (\lambda\mu) f(x),$$
$$1 \cdot f(x) = f(x).$$

Следовательно,

$$\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g,$$
$$(\lambda + \mu) f = \lambda f + \mu f,$$
$$\lambda(\mu f) = (\lambda\mu) f,$$
$$1 \cdot f = f.$$

Таким образом, множество $\mathcal{C}$ является векторным пространством над полем $\mathbb{K}$.

Если множество F значений функций из $\mathcal{C}$ является кольцом, то в $\mathcal{C}$ можно определить вторую внутреннюю бинарную операцию $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. С этой целью $\forall f, g \in \mathcal{C}$ рассмотрим отображение, которое $\forall x \in E$ ставит в соответствие элемент $f(x) g(x)$ из F; такое отображение является элементом множества $\mathcal{C}$; обозначим его через $f \cdot g$ (сохраняя порядок функций). Эта операция является второй внутренней бинарной операцией в $\mathcal{C}$. В общем случае $f \cdot g \neq g \cdot f$.

Так как F — кольцо, то $\forall x \in E$ и $\forall f, g, h \in \mathcal{C}$ имеем $f(x)(g(x) h(x)) = (f(x) g(x)) h(x)$, следовательно, $f(gh) = (fg) h$. Аналогично $f(x)(g(x) + h(x)) = f(x) g(x) + f(x) h(x)$; $(f(x) + g(x)) h(x) = f(x) h(x) + g(x) h(x)$, т. е. $f(g + h) = fg + fh$; $(f + g) h = fh + gh$. А это означает, что множество $\mathcal{C}$ является кольцом.

Если, кроме того, множество F является коммутативным кольцом, т. е. $f(x) g(x) = g(x) f(x)$, то $fg = gf$ и, следовательно, $\mathcal{C}$ тоже будет коммутативным кольцом. Для коммутативного кольца два закона дистрибутивности сводятся к одному.

Наконец, если F — унитарное кольцо, то F содержит нейтральный элемент e относительно второй внутренней бинарной операции,

т. е. $\forall x \in E$, $\forall f \in \mathcal{C}$ $e(x) f(x) = f(x) e(x) = f(x)$, тогда $ef = fe = f$, где $e : x \mapsto e(x)$ $\forall x \in E$. Отсюда вытекает, что кольцо $\mathcal{C}$ — унитарно, причем отображение $e \in \mathcal{C}$ является нейтральным элементом второй внутренней бинарной операции, т. е. единичным элементом.

Если множество значений F является полем $\mathbb{R}$ действительных чисел или полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, то F является кольцом. Тогда предыдущие рассмотрения показывают, как можно определить сумму и произведение двух числовых функций, и доказывают, что множество $\mathcal{C}$ этих функций составляет коммутативное кольцо.

1.6. Евклидово пространство.

Определение 1. *Пусть E — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Отображение $E \times E \to \mathbb{R} : \varphi(x, y) = (x, y)$, которое каждым двум элементам x и y из E ставит в соответствие действительное число, обозначаемое символом (x, y), называется скалярным произведением, если $\forall x, y, z \in E$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ выполняются следующие аксиомы:*

1) $(x, y) = (y, x)$;
2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
3) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$;
4) $(x, x) \geqslant 0 \wedge ((x, x) = 0) \Leftrightarrow (x = \theta)$.

Определение 2. *Векторное пространство, в котором определено скалярное произведение, называется евклидовым пространством.*

В произвольном евклидовом пространстве из условия $x = \theta \vee y = \theta$ следует, что $(x, y) = 0$.

Действительно, из аксиом 1) — 3) вытекает, что $(\lambda x, \mu x) = \lambda\mu (x, y)$. Отсюда при $\lambda = 0$, используя равенство $0x = \theta$ (см. п. 1.3), получаем $(\theta, \mu y) = 0$. Аналогично находим $(\lambda x, \theta) = 0$.

Далее, в произвольном евклидовом пространстве справедливо неравенство

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y), \tag{1}$$

называемое *неравенством Коши — Буняковского.*

Действительно, если $x = \theta \vee y = \theta$, то правая часть неравенства (1) обращается в нуль согласно только что доказанному утверждению, а левая часть этого неравенства обращается в нуль согласно аксиоме 4), так что в этом случае неравенство (1) справедливо.

Если $x \neq \theta \wedge y \neq \theta$, то, согласно аксиомам 1) — 4),

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) \geqslant 0$$

и

$$\lambda^2 (x, x) - 2\lambda (x, y) + (y, y) \geqslant 0.$$

Отсюда вытекает неравенство (1).

С каждым скалярным произведением можно связать норму, положив

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

В самом деле,

$$(\|x\| \geqslant 0 \wedge \|x\| = 0) \Leftrightarrow (x = \theta),$$

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x,\ \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x,\ x)} = |\lambda| \sqrt{(x,\ x)} = |\lambda| \cdot \|x\|,$$

$$\|x + y\|^2 = \sqrt{(x + y,\ x + y)^2} = (x + y,\ x + y) =$$

$$= (x,\ x) + 2(x,\ y) + (y,\ y) \leqslant (x,\ x) + 2\sqrt{(x,\ x)}\sqrt{(y,\ y)} + (y,\ y) =$$

$$= \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2;$$

следовательно, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, т. е. все аксиомы для нормы выполнены.

Пространство $\mathbb{R}^m$ становится евклидовым, если в нем для произвольных элементов

$$x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m),\quad y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)$$

определим скалярное произведение при помощи равенства

$$(x,\ y) = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i.$$

Выполнение аксиом очевидно. Неравенство Коши — Буняковского запишется в виде

$$|(x,\ y)| \leqslant |x| \cdot |y|.$$

§ 2. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

2.1. Определение метрического пространства.

Определение. *Множество* $E = \{x, y, z, \ldots\}$ *называется* м е т р и ч е с к и м п р о с т р а н с т в о м, *если определено отображение*

$$E \times E \to \mathbb{R}^+ : (x,\ y) \mapsto \rho(x,\ y),$$

которое $\forall\, x,\ y \in E$ *ставит в соответствие неотрицательное действительное число* ρ, *удовлетворяющее следующим аксиомам:*

1) $(\rho(x,\ y) \geqslant 0) \wedge ((\rho(x,\ y) = 0) \Leftrightarrow (x = y))$;

2) $\rho(x,\ y) = \rho(y,\ x)\quad \forall\, x,\ y \in E$ (аксиома симметрии);

3) $\rho(x,\ y) \leqslant \rho(x,\ z) + \rho(z,\ y)\quad \forall\, x,\ y,\ z \in E$ (неравенство треугольника).

Элементы метрического пространства называются *точками*, а число $\rho(x,\ y)$ называется *расстоянием* между точками x и y, или *метрикой* пространства E.

Всякая часть F метрического пространства E, в которой определено отображение

$$F \times F \to \mathbb{R}^+,$$

являющееся сужением отображения $E \times E \to \mathbb{R}^+ : (x,\ y) \to \rho(x,\ y)$, называется *метрическим подпространством* F, а определенная в нем метрика — *индуцированной метрикой*. Очевидно, что метрическое подпространство само является метрическим пространством.

В произвольном метрическом пространстве справедливо неравенство

$$|\rho(x,\ y) - \rho(x,\ z)| \leqslant \rho(y,\ z). \qquad (1)$$

В самом деле, $\forall\, x, y, z \in E$ в силу неравенства треугольника имеем

$$\rho(x,\ y) - \rho(x,\ z) \leqslant \rho(z,\ y).$$

Меняя местами z и y, получим

$$\rho(x, z) - \rho(x, y) \leqslant \rho(y, z) = \rho(z, y).$$

Из двух последних неравенств следует (1). Из неравенства треугольника также следует, что для произвольных n точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ метрического пространства справедливо неравенство

$$\rho(x_1, x_n) \leqslant \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \cdots + \rho(x_{n-1}, x_n). \qquad (2)$$

2.2. **Важнейшие метрические пространства.** а) Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ или множество комплексных чисел $\mathbb{C}$, расстояние между точками которых определено равенством $\rho(x, y) = |x - y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ или $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, является метрическим пространством. Эту метрику принято называть *естественной метрикой* в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{C}$. Выполнение аксиом метрики следует из свойств абсолютного значения.

б) Нормированное векторное пространство $E = \{u, v, w, \ldots\}$ становится метрическим, если $\forall u, v \in E$ положить

$$\rho(u, v) = \|u - v\|. \qquad (1)$$

Для доказательства проверим выполнение аксиом 1) — 3) определения 1, п. 2.1. Из свойств нормы вытекает, что:

1) $\rho(u, v) = \|u - v\| \geqslant 0$, причем $(\rho(u, v) = 0) \Leftrightarrow (u = v)$;

2) $\rho(u, v) = \|u - v\| = \|(-1)(v - u)\| = |-1| \cdot \|v - u\| = \|v - u\| = \rho(v, u)$ $\forall u, v \in E$;

3) $\rho(u, v) = \|u - v\| = \|u - w + w - v\| \leqslant \|u - w\| + \|w - v\| = \rho(u, w) + \rho(w, v)$ $\forall u, v, w \in E$.

в) Пространство $\mathbb{R}^m$ становится метрическим, если метрику ввести одним из равенств

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}, \qquad (2)$$

или

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|, \qquad (3)$$

или

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - y_i|. \qquad (4)$$

Действительно, выполнение первых двух аксиом метрики очевидно. Остается проверить выполнение неравенства треугольника. Пусть

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_m)$.

— три произвольные точки из $\mathbb{R}^m$. Если функция ρ задана равенством (2), то неравенство треугольника в координатной форме запишется следующим образом:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (z_i - y_i)^2}.$$

Справедливость последнего неравенства непосредственно следует из неравенства (3), п. 1.5, если заменить там x_i на $x_i - z_i$, а y_i на $z_i - y_i$.

Для функции ρ, заданной равенством (3), использовав неравенство треугольника для абсолютного значения, получим

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{m} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{m} |z_i - y_i| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Наконец, если ρ задано равенством (4), имеем

$$|x_i - y_i| \leqslant |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - z_i| + \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |z_i - y_i| =$$

$$= \rho(x, z) + \rho(z, y),$$

откуда

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - y_i| \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

г) Легко убедиться в том, что пространство $\mathfrak{M}$, элементами которого являются матрицы размера $m \times n$, становится метрическим пространством, если для любых двух матриц из $\mathfrak{M}$ положить

$$\rho(A, B) = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - b_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

или

$$\rho(A, B) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij} - b_{ij}|,$$

или

$$\rho(A, B) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}|.$$

2.3. Окрестности в метрическом пространстве. Пусть E — метрическое пространство, $\rho : E \times E \to \mathbb{R}^+$ — метрика этого пространства, $x_0 \in E$, а δ — действительное число.

Определение 1. *Множество точек метрического пространства E, удовлетворяющее неравенству $\rho(x, x_0) < \delta$ ($\rho(x, x_0) \leqslant \delta$), называется открытым (замкнутым) шаром радиуса δ с центром в точке x_0 и обозначается $S(x_0, \delta)$ ($\overline{S}(x_0, \delta)$).*

Таким образом, открытый (замкнутый) шар представляет собой множество

$$S(x_0, \delta) = \{x \in E : \rho(x, x_0) < \delta\} \quad (\overline{S}(x_0, \delta) = \{x \in E : \rho(x, x_0) \leqslant \delta\}).$$

Например, открытый шар в $\mathbb{R}^m$ — это множество $S(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - x_0| < \delta\}$, причем $(x \in S(x_0, \delta)) \Leftrightarrow (|x - x_0| < \delta)$, где $|\cdot|$ — норма в $\mathbb{R}^m$, x_0 — центр шара, δ — радиус шара.

Определение 2. *Открытый шар $S(x_0, \delta)$ радиуса δ с центром в точке x_0 называется δ-окрестностью точки x_0.*

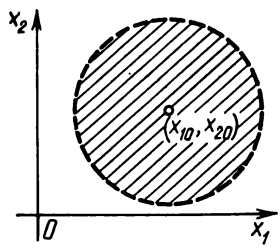


Рис. 6

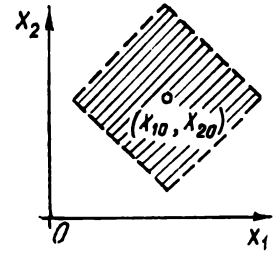


Рис. 7

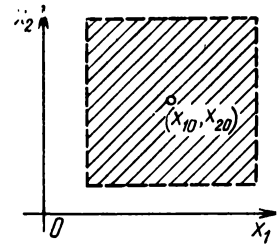


Рис. 8

Пусть $E = \mathbb{R}^m$ и расстояние между точками x и y определено одним из равенств (2) — (4), п. 2.2. Соответственно этому δ-окрестностью точки $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0})$ есть множество точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $x \in \mathbb{R}^m$, координаты которых удовлетворяют одному из неравенств:

$$|x - x_0| = \left(\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_{i0})^2\right)^{\frac{1}{2}} < \delta,$$

$$|x - x_0| = \sum_{i=1}^{m} |x_i - x_{i0}| < \delta, \qquad (1)$$

$$|x - x_0| = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_{i0}| < \delta.$$

Эти множества в $\mathbb{R}^2$ являются соответственно множествами:

а) точек круга радиуса δ с центром в точке (x_{10}, x_{20}) (рис. 6);

б) точек квадрата с центром в точке (x_{10}, x_{20}) и диагоналями длиной 2δ, параллельными осям координат (рис. 7);

в) точек квадрата с центром в точке (x_{10}, x_{20}) и стороной длины 2δ (рис. 8).

В пространстве $\mathbb{R}^3$ это, соответственно, множества:

а) точек шара радиуса δ с центром в точке (x_{10}, x_{20}, x_{30}) (рис. 9);

б) точек октаэдра с центром в точке (x_{10}, x_{20}, x_{30}) и диагональю, равной 2δ (рис. 10);

в) точек куба с центром в точке (x_{10}, x_{20}, x_{30}) и ребром длины 2δ (рис. 11).

Определение 3. *Множество A метрического пространства E называется ограниченным, если* $\exists x_0 \in E \wedge \exists \delta > 0$: $A \subset \bar{S}(x_0, \delta)$.

Определение 4. *Множество $A \subset \mathbb{R}^m$ называется выпуклым, если* $\forall x, y \in A$ *и* $\lambda \in]0, 1[$

$$(\lambda x + (1 - \lambda) y) \in A. \qquad (2)$$

Например, шар $S(x_0, \delta)$ выпуклый, так как $\forall x, y \in S(x_0, \delta)$ имеем

$$|\lambda x + (1 - \lambda) y - x_0| = |\lambda (x - x_0) + (1 - \lambda)(y - x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant \lambda |x - x_0| + (1 - \lambda) |y - x_0| < \lambda\delta + (1 - \lambda)\delta = \delta;$$

отсюда непосредственно следует включение (2).

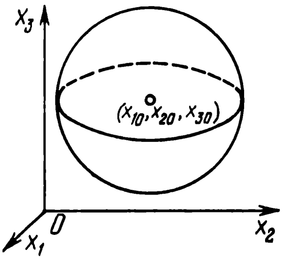


Рис. 9

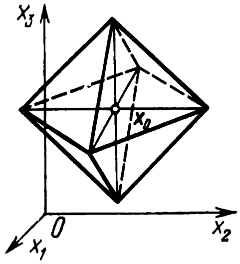


Рис. 10

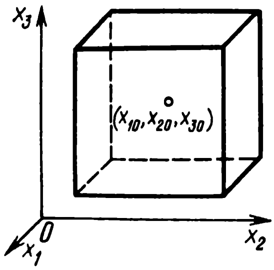


Рис. 11

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

3.1. Линейно-зависимая и линейно-независимая система векторов. Пусть E — векторное пространство над полем $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Если $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in E$, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, то вектор

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k$$

называется *линейной комбинацией* векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$.

Определение 1. *Система векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ называется линейно-независимой, если из соотношения*

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k = 0 \qquad (1)$$

следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

В противном случае, т. е. *если равенство* (1) *возможно при условии, что не все $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ равны нулю, то эта система векторов называется линейно-зависимой.*

Независимая система векторов не может содержать нулевого вектора.

Пусть система векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ представлена в координатной форме: $\boldsymbol{x}_1 = (x_{11}, \ldots, x_{1k})$, $\boldsymbol{x}_2 = (x_{21}, \ldots, x_{2k})$, $\ldots$, $\boldsymbol{x}_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kk})$, а совокупность чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ является координатами вектора $\boldsymbol{\lambda}$. В этом случае векторное равенство (1) эквивалентно системе k равенств

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{21} + \cdots + \lambda_k x_{k1} &= 0, \\ \lambda_1 x_{12} + \lambda_2 x_{22} + \cdots + \lambda_k x_{k2} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1 x_{1k} + \lambda_2 x_{2k} + \cdots + \lambda_k x_{kk} &= 0, \end{aligned}$$

которой соответствует матричная запись

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \ldots & x_{k2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1k} & x_{2k} & \ldots & x_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Наконец, если матрицу этой системы обозначить

$$T = (x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

то равенство (1) запишется следующим образом:

$$T\lambda = 0. \qquad (1')$$

Соответственно этому, система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ называется линейно-независимой, если уравнение (1) имеет нетривиальное решение. Если же уравнение (1) имеет только нулевое решение, то система векторов называется линейно-зависимой.

Теорема 1 (необходимое условие линейной зависимости). *Если система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ линейно-зависима, то матрица $T = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ вырождена.*

◀ Если система векторов линейно-зависима, то равенство (1) выполняется при некотором $\lambda \neq 0$. Отсюда следует, что определитель матрицы $T = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ равен нулю, т. е. матрица T вырождена. ▶

Теорема 2 (достаточное условие линейной независимости). *Если матрица $T = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ невырождена, то система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ линейно-независима.*

◀ Пусть матрица $T = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ невырождена; тогда ее определитель отличен от нуля. Из этого условия следует, что уравнение (1') имеет единственное решение $\lambda = 0$, т. е. система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ линейно-независима. ▶

Например, система векторов

$$x_1 = (1, -2, 3), \quad x_2 = (-5, 2, 7), \quad x_3 = (-7, 6, 1)$$

линейно-зависима, поскольку определитель матрицы

$$T = (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

равен нулю, т. е. матрица T вырождена и зависимость векторов следует из теоремы 1.

Напротив, система векторов

$$x_1 = (2, 3, 1), \quad x_2 = (-1, 2, 3), \quad x_3 = (1, -5, -2)$$

линейно-независима. Здесь определитель матрицы

$$T = (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

равен 28, т. е. матрица T невырождена и независимость векторов следует из теоремы 2.

Определение 2. *Если векторное пространство E содержит независимую систему, состоящую из r векторов, но не содержит никакой независимой системы, состоящей из $r + 1$ векторов, то говорят, что векторное пространство имеет размерность r и при этом пишут* $\dim E = r$.

Если же векторное пространство содержит независимую систему из

любого числа векторов, то такое векторное пространство называется бесконечномерным.

Пусть B — произвольное конечное или бесконечное множество векторов пространства E. Рассмотрим множество S, состоящее из всех векторов, являющихся линейной комбинацией всевозможных векторов, принадлежащих B.

Будем говорить, что множество S натянуто на B или что S является линейной оболочкой множества B.

Определение 3. *Независимое множество B пространства E называется базисом пространства E, а множество B, в свою очередь, называется множеством, порождающим пространство E.*

Если $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ — базис пространства E, то любой элемент $x \in E$ допускает единственное представление вида $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ называются координатами вектора x относительно базиса $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

В самом деле, поскольку в E не существует системы из $r+1$ независимых векторов, то система $y, x_1, x_2, \ldots, x_r$ зависима, поэтому

$$y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_r x_r.$$

Если $y = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \cdots + \mu_r x_r$ — какое-либо другое его представление, то

$$0 = (\lambda_1 - \mu_1) x_1 + (\lambda_2 - \mu_2) x_2 + \cdots + (\lambda_r - \mu_r) x_r.$$

Отсюда, в силу линейной независимости векторов, $\lambda_i - \mu_i = 0$, $i = \overline{1, r}$.

Определение 4. *Базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства $E = \mathbb{R}^n$, где векторы $e_i \in \mathbb{R}^n$ имеют i-ю координату, равную 1, а все остальные его координаты равны нулю, называется стандартным базисом этого пространства.*

В этом случае, если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, то

$$x = e_1 x_1 + e_2 x_2 + \cdots + e_n x_n.$$

3.2. Линейные отображения.

Определение 1. *Пусть E, F — векторные пространства над полем $\mathbb{R}$ (или произвольным полем $\mathbb{K}$). Отображение $A : E \to F$ называется линейным, если $\forall\, x, y \in E$ и $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$*

$$A(x + y) = A(x) + A(y) \quad \text{(свойство аддитивности)},$$

$$A(\lambda x) = \lambda A(x) \quad \text{(свойство однородности)}.$$

Из второго из этих условий следует, что $A(\theta) = \theta$.

Для линейного отображения часто пишут Ax вместо $A(x)$. Линейное отображение называют также *линейным оператором*.

Если линейный оператор (отображение) $A : E \to E$ обладает двумя свойствами: 1) инъективный (взаимно-однозначный из E в F), 2) сюръективный (отображает E на F), то его называют *обратимым* на E.

В этом случае $\forall\, y \in E$ в силу сюръективности оператора A существует элемент $x \in E$ такой, что $Ax = y$. Согласно инъективности, такой элемент единственный. Поэтому на E можно определить оператор

A^{-1}, который каждому $y \in E$ ставит в соответствие элемент $x \in E$, который является образом элемента y при отображении A, т. е. $\forall\, y \in E$ оператор A^{-1} ставит в соответствие элемент $x \in E$, для которого $y = Ax$. Ясно, что в этом случае $A^{-1}(y) = A^{-1}(Ax) = x$ $\forall\, x \in E$. О так определенном операторе будем говорить, что он является обратным по отношению к оператору A. Отсюда название — оператор A обратим. Очевидно, $A(A^{-1}(x)) = x \quad \forall\, x \in E$.

Теорема. *Оператор $A^{-1}: E \to E$ линейный.*

◀ Действительно, $\forall\, y, z \in E$ в силу инъективности оператора A существуют $x, t \in E$ такие, что

$$y = Ax, \quad z = At.$$

Тогда $A^{-1}y = x$, $A^{-1}z = t$ и $A^{-1}(y + z) = A^{-1}(Ax + At) = A^{-1}(A(x + t)) = x + t = A^{-1}y + A^{-1}z$. Далее, для $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

$$A^{-1}(\lambda y) = A^{-1}(\lambda Ax) = A^{-1}(A(\lambda x)) = \lambda x = \lambda A^{-1}y. \ \blacktriangleright$$

Множество всех линейных отображений векторного пространства E в векторное пространство F обозначим $L(E, F)$.

Множество $L(E, F)$ образует векторное пространство. В самом деле, $\forall\, A, B \in L(E, F)$ и $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $(\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K})$ имеем

$$(\lambda A + \mu B)x = \lambda Ax + \mu Bx \quad \forall\, x \in E.$$

Таким образом, $(\lambda A + \mu B) \in L(E, F)$.

Определение 2. *Пусть E, F и G — векторные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{R}$ и $A: E \to F$, $B: F \to G$. Тогда произведением отображений B и A называется отображение $BA: E \to G$, определяемое равенством*

$$(BA)x = B(Ax) \quad \forall\, x \in E.$$

Ясно, что $BA \in L(E, G)$. Заметим, что $BA \neq AB$ даже, когда $E = F = G$.

Пусть E и F векторные нормированные пространства.

Определение 3. *Оператор $A: E = F$ называется ограниченным, если существует постоянная $M \in \mathbb{R}$ такая, что*

$$\|Ax\| \leqslant M\|x\| \quad \forall\, x \in E, \tag{1}$$

где $\|x\|$ норма в смысле метрики пространства E, а $\|Ax\|$ норма в смысле метрики пространства F.

Определение 4. *Пусть оператор $A: E \to F$ ограниченный. Наименьшая из постоянных M, удовлетворяющая неравенству (1), называется нормой оператора A и обозначается $\|A\|$.*

Из определения нормы оператора $A: E \to F$ вытекает, что число $\|A\|$ обладает следующими двумя свойствами:

1) $\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall\, x \in E$;

2) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x_\varepsilon \in E: \|Ax_\varepsilon\| > (\|A\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|$.

Пользуясь этими свойствами, покажем, что для любого ограниченного оператора $A: E \to F$

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \tag{2}$$

◀ Действительно, если $\|x\| \leqslant 1$, то

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| \leqslant \|A\|$$

и, следовательно,

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \leqslant \|A\|. \tag{3}$$

Для произвольного положительного $\varepsilon > 0$ существует элемент $x_\varepsilon \in E$ такой, что

$$\|Ax_\varepsilon\| > (\|A\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|.$$

Если взять $y_\varepsilon = \dfrac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}$, то из неравенства

$$\|Ay_\varepsilon\| = \frac{1}{\|x_\varepsilon\|}\|Ax_\varepsilon\| > \frac{1}{\|x_\varepsilon\|}(\|A\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\| = \|A\| - \varepsilon,$$

в силу условия $\|y_\varepsilon\| = 1$, получим

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \geqslant \|Ay_\varepsilon\| > \|A\| - \varepsilon,$$

т. е.

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \geqslant \|A\|. \tag{4}$$

Из неравенств (3) и (4) следует (2). ▶

Заметим, что если $A : E \to F$, а $B : F \to G$, где E, F и G — векторные нормированные пространства, то $\forall x \in E$

$$\|(BA)x\| = \|B(Ax)\| \leqslant \|B\| \cdot \|Ax\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|.$$

3.3. Линейные и полилинейные формы. Рассмотрим частный случай линейного отображения $A : E \to F$, когда $F = \mathbb{R}$ (или произвольное поле $\mathbb{K}$). Итак, пусть E — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{K}$).

Определение 1. *Линейной формой на E называется линейное отображение*

$$\varphi : E \to \mathbb{R},$$

т. е. отображение, удовлетворяющее условиям

$$\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) \quad \forall x \in E \wedge \forall \lambda \in \mathbb{R};$$

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in E.$$

Эти условия можно заменить одним условием

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1\varphi(x_1) + \lambda_2\varphi(x_2),$$

из которого по индукции легко получить равенство

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = \lambda_1\varphi(x_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(x_n) \tag{1}$$

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in E \wedge \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Пусть $E = \mathbb{R}^m$, а $e_1, \ldots, e_m$ — произвольный базис в $\mathbb{R}^m$. Обозначим $\varphi(e_i) = a_i$, $i = \overline{1, m}$. Тогда для любого $x = x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m$,

согласно (1), получаем общий вид линейной формы:

$$\varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + \cdots + x_m\varphi(e_m) = a_1x_1 + \cdots + a_mx_m. \quad (2)$$

Поскольку линейная форма является линейным отображением векторного пространства E в поле $\mathbb{R}$, которое есть векторным пространством над самим собой, то множество всех линейных форм на E также образует векторное пространство, которое обозначим E^*.

Определение 2. *Пространство E^* линейных форм на E образует векторное пространство, называемое алгебраически сопряженным к E.*

Пусть теперь заданы два векторных пространства E и F над одним и тем же полем $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{K}$).

Определение 3. *Б и л и н е й н о й формой на $E \times F$ называется отображение*

$$\varphi : E \times F \to \mathbb{R},$$

которое при фиксированном $y \in F$ линейно по переменной x, а при фиксированном $x \in E$ линейно по y, т. е.

$$\varphi(\lambda x,\ y) = \lambda\varphi(x,\ y),$$

$$\varphi(x_1 + x_2,\ y) = \varphi(x_1,\ y) + \varphi(x_2,\ y),$$

$$\varphi(x,\ \mu y) = \mu\varphi(x,\ y),$$

$$\varphi(x,\ y_1 + y_2) = \varphi(x,\ y_1) + \varphi(x,\ y_2)$$

$$\forall\lambda,\ \mu \in \mathbb{R} \wedge \forall x,\ x_1,\ x_2 \in E \wedge \forall y,\ y_1,\ y_2 \in F.$$

Определение 4. *Билинейная форма $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ называется с и м м е т р и ч н о й, если $\varphi(x,\ y) = \varphi(y,\ x)$ $\forall x,\ y \in E$.*

Билинейная форма $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ называется а н т и с и м м е т р и ч н о й, если $\varphi(x,\ y) = -\varphi(y,\ x)$ $\forall x,\ y \in E$.

Например, скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$ является симметричной билинейной формой на $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, а билинейная форма

$$\varphi(x,\ y) = A(x_2y_3 - x_3y_2) + B(x_3y_1 - x_1y_3) + C(x_1y_2 - x_2y_1),$$

где $A,\ B,\ C \in \mathbb{R}$; $x = (x_1,\ x_2,\ x_3)$; $y = (y_1,\ y_2,\ y_3)$,— антисимметричной. Если билинейная форма φ — антисимметрична, то $\varphi(x,\ x) = -\varphi(x,\ x) = 0$.

Очевидно, если ψ произвольная билинейная форма, то $\varphi_1(x, y) = \psi(x,\ y) + \psi(y,\ x)$ — симметричная билинейная форма, а $\varphi_2(x, y) = \psi(x,\ y) - \psi(y,\ x)$ — антисимметричная билинейная форма.

Пусть $E = F = \mathbb{R}^m$, а $e_1, \ldots, e_m$ — базис в $\mathbb{R}^m$, так что $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$

$$x = x_1e_1 + \cdots + x_me_m,\ y = y_1e_1 + \cdots + y_me_m.$$

Тогда билинейная форма φ на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ запишется следующим образом:

$$\varphi(x,\ y) = \sum_{i=1}^{m} x_i\varphi(e_i,\ y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_iy_j\varphi(e_i,\ e_j).$$

Обозначив $\varphi(e_i,\ e_j) = a_{ij}$, получим общий вид билинейной формы φ

на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j \tag{3}$$

для $x = x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m$, $y = y_1 e_1 + \cdots + y_m e_m$.

Определение 5. *Отображение*

$$\omega : E \to \mathbb{R},$$

где ω *определено равенством* $\omega(x) = \varphi(x, x)$, φ — *симметричная билинейная форма, называется* к в а д р а т и ч н о й ф о р м о й *(соответствующей билинейной форме* φ*).*

Если $E = \mathbb{R}^m$, то билинейная форма (3) определяет квадратичную форму

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j. \tag{4}$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

называется матрицей квадратичной формы (4) (билинейной формы (3)).

Определение 6. *Пусть* E_1, E_2, ..., E_m — *векторные пространства над одним и тем же полем* $\mathbb{R}$ *(или* $\mathbb{K}$*). П о л и л и н е й н о й ф о р м о й порядка* m *на* $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_m$ *называется отображение*

$$\varphi : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_m \to \mathbb{R},$$

такое, что $\forall k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ *и для фиксированной системы элементов* $a_i \in E_i$, $i \neq k$, *функция*

$$x_k \mapsto \varphi(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_m)$$

удовлетворяет условиям

$$\varphi(a_1, \ldots, a_{k-1}, \lambda x_k, a_{k+1}, \ldots, a_m) =$$
$$= \lambda \varphi(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_m),$$
$$\varphi(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k' + x_k'', a_{k+1}, \ldots, a_m) =$$
$$= \varphi(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k', a_{k+1}, \ldots, a_m) +$$
$$+ \varphi(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k'', a_{k+1}, \ldots, a_m)$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \wedge x_k, x_k', x_k'' \in E_k.$$

Определение 7. *Полилинейная форма на* $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_m$ *называется* с и м м е т р и ч н о й, *если*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) = \varphi(x_{p_1}, \ldots, x_{p_m})$$

для любых перестановок p_1, ..., p_m *целых чисел* 1, ..., m.

Полилинейная форма на $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_m$ *называется антисимметричной, если она меняет знак при перестановке местами двух аргументов*

Такая форма обращается в нуль для любой точки $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ из $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_m$, если $x_i = x_j$ при $i \neq j$.

Пусть $E_1 = E_2 = \cdots = E_m = \mathbb{R}^n$, а $e_1, \ldots, e_n$ — базис в $\mathbb{R}^n$; тогда $x_i = x_{i_1}e_1 + \cdots + x_{i_n}e_n$, $i = \overline{1, m}$.

Вычислим значение $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ формы φ на m-кратном произведении $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$.

В силу линейности φ по x_1 имеем

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1 1}\varphi(e_{i_1}, x_2, \ldots, x_m).$$

Далее, в силу линейности φ по x_2 получаем

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} x_{i_1 1}x_{i_2 2}\varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, x_3, \ldots, x_m).$$

Продолжая описанный процесс, через m шагов получим

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n} x_{i_1 1}x_{i_2 2}\ldots x_{i_m m}\varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_m}).$$

Обозначая $\varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_m}) = a_{i_1 i_2 \ldots i_m}$, окончательно получаем значение полилинейной формы:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m = 1}^{n} a_{i_1 i_2 \ldots i_m} x_{i_1 1}x_{i_2 2}\ldots x_{i_m m}. \qquad (5)$$

§ 4. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

4.1. Последовательности и действия с ними.

Определение 1. *Последовательностью элементов множества* E *называется отображение множества* $\mathbb{N}$ *в* E:

$$\mathbb{N} \to E : n \mapsto x_n,$$

т. е. функция, которая каждому натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ *ставит в соответствие элемент* $x_n \in E$.

Последовательность элементов из E будем обозначать через $\{x_n\}$, а также будем говорить, что задана последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ или $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Иногда удобно пользоваться записью $x_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, где f — закон, согласно которому каждому $n \in \mathbb{N}$ ставим в соответствие элемент $x_n \in E$.

Определение 2. *Элемент* x_n *называется общим членом последовательности* $\{x_n\}$, *а* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *называются членами последовательности* $\{x_n\}$.

Определение 3. *Две последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *элементов из* E *называются равными, если* $x_n = y_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Если множество E является векторным пространством, то множество всевозможных последовательностей $\pi(\mathbb{N}, E)$ тоже является векторным пространством.

Внутренняя бинарная операция (сложение)

$$\pi \times \pi \to \pi : (\{x_n\}, \{y_n\}) \mapsto \{x_n\} + \{y_n\}$$

определяется следующим образом:

$$\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}.$$

Последовательность $\{x_n + y_n\}$ называется *суммой* последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Нейтральным элементом в $\pi(\mathbb{N}, E)$ называется последовательность, все члены которой равны нулевому элементу векторного пространства E.

Противоположной последовательностью к последовательности $\{x_n\} \in \pi(\mathbb{N}, E)$ называется последовательность $\{-x_n\}$, образованная из членов $-x_1, -x_2, \ldots, -x_n, \ldots$, противоположных членам $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ последовательности $\{x_n\}$.

Внешняя бинарная операция (умножение на скаляр)

$$\mathbb{K} \times \pi \to \pi : (\lambda, \{x_n\}) \mapsto \lambda \cdot \{x_n\}$$

определяется так:

$$\lambda \{x_n\} = \{\lambda x_n\}.$$

Последовательность $\{\lambda x_n\}$ называется *произведением* последовательности $\{x_n\}$ элементов множества E на *скаляр* поля $\mathbb{K}$.

Если на множестве E определена вторая внутренняя бинарная операция (умножение), то на $\pi(\mathbb{N}, E)$ также можно определить вторую внутреннюю бинарную операцию

$$\pi \times \pi \to \pi : (\{x_n\}, \{y_n\}) \mapsto \{x_n\} \cdot \{y_n\},$$

полагая

$$\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}.$$

Наконец, если E есть кольцо, то $\pi(\mathbb{N}, E)$ тоже образует кольцо.

Если E является множеством действительных чисел, т. е. $E = \mathbb{R}$, то для произвольной последовательности $\{y_n\}$, члены которой отличны от нуля, можно определить последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$, называемую *обратной* последовательностью к последовательности $\{y_n\}$. В этом случае существует *частное* двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$:

$$\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \{x_n\} \cdot \left\{\frac{1}{y_n}\right\} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}.$$

Пусть $\{x_n\}$ — последовательность элементов множества E, а $\{n_k\}$ — возрастающая последовательность чисел из $\mathbb{N}$, т. е. отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{N} : k \to n_k$ такое, что $n_k < n_{k'}$ при $k < k'$.

Определение 4. *Последовательность $\{y_k\}$ элементов множества E, определенная равенством $y_k = x_{n_k}$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$, называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$ или частичной последовательностью.*

Подпоследовательность обозначим через $\{x_{n_k}\}$.

4.2. Сходящиеся последовательности и их свойства. Пусть E — произвольное метрическое пространство, а $\rho(x, y)$ — расстояние между точками этого пространства.

Определение 1. *Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства E называется сходящейся в этом пространстве, если $\exists a \in E$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists m \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > m$ выполняется неравенство*

$$\rho(x_n, a) < \varepsilon. \tag{1}$$

С помощью логических знаков это определение можно записать так:

$$\exists a \in E \bigwedge \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : \forall n > m \Rightarrow \rho(x_n, x) < \varepsilon.$$

При этом говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится* к точке $x \in E$ или что точка a является *пределом* последовательности $\{x_n\}$; при этом записывают

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \to a \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Если последовательность $\{x_n\}$ не является сходящейся, то ее называют *расходящейся.*

Заметим, что если все члены последовательности $\{x_n\}$ элементов метрического пространства E равны некоторому элементу $a \in E$, т. е. если $x_n = a$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то $\rho(x_n, a) = 0$. Следовательно, $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0 \bigwedge \forall n \in \mathbb{N}$, а поэтому последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке $a \in E$.

Определение 2. *Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства E называется ограниченной, если ограничено множество ее значений.*

Отметим важнейшие свойства сходящихся последовательностей в метрических пространствах.

Теорема 1. *Пусть последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства E сходится. Тогда эта последовательность:*

1) *ограничена;*

2) *имеет единственный предел.*

3) *Точка a является пределом последовательности тогда и только тогда, когда любая ее окрестность содержит все члены последовательности, кроме, быть может, конечного их числа.*

◀ 1) Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке $a \in E$. Тогда $\exists N$ такое, что $\forall n > N$ выполняется неравенство $\rho(x_n, a) < 1$. Положим $r_i = \rho(x_i, a)$, $i = \overline{1, N}$, $r = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} \{1, r_i\}$.

Очевидно, $\rho(x_n, a) \leqslant r$ $\forall n \in \mathbb{N}$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

2) Предположим, что последовательность имеет два предела a и b. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_1, N_2$ такие, что выполняются неравенства

$$\rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N_1,$$

$$\rho(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N_2.$$

При $\forall\, n > N = \max\{N_1, N_2\}$ оба эти неравенства будут выполнены и, кроме того,

$$\rho(a, b) \leqslant \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < \varepsilon.$$

Поскольку ε — произвольно, то $\rho(a, b) = 0$. В самом деле, если бы $\rho(a, b) \neq 0$, то, поскольку $\rho(a, b) > 0$, можно в качестве ε взять число $\frac{1}{2}\rho(a, b)$. Взяв в последнем неравенстве вместо ε число $\frac{1}{2}\rho(a, b) > 0$ и сократив на $\rho(a, b)$, получим противоречивое неравенство: $1 < \frac{1}{2}$. Источник этого противоречия в предположении, что $\rho(a, b) > 0$. Следовательно, $\rho(a, b) = 0$, а отсюда $a = b$.

3) Пусть $x_n \to a$ при $n \to \infty$ и $S(a, \varepsilon)$ — произвольная ε-окрестность точки a. Тогда для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ $\exists\, N$ такое, что $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ $\forall\, n > N$. Отсюда следует, что $x_n \in S(a, \varepsilon)$, если $n > N$ и, следовательно, вне окрестности $S(a, \varepsilon)$ остается не более, чем конечное число членов последовательности.

Наоборот, предположим, что каждая окрестность $S(a, \varepsilon)$ содержит все члены последовательности, кроме конечного их числа. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и через N обозначим наибольший из номеров n, для которых выполняется неравенство $\rho(x_n, a) \geqslant \varepsilon$. Тогда $\forall\, n > N$ имеем $\rho(x_n, a) < \varepsilon$, что равносильно сходимости последовательности к точке a. ▶

Следствие. *Сходимость или расходимость последовательности не изменится, если отбросить или прибавить к последовательности конечное число членов.*

◀ Справедливость этого утверждения непосредственно вытекает из 3) теоремы 1. ▶

Рассмотрим важный класс последовательностей, членами которых являются действительные числа. Такие последовательности являются отображениями $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$: $n \mapsto x_n$. Их назовем числовыми последовательностями, или последовательностями, если из контекста ясно, что речь идет именно о числовой последовательности.

Числовая прямая является метрическим и одновременно векторным пространством, поэтому расстояние между точками x и y числовой прямой можно определить как абсолютное значение разности $x - y$, т. е. $\rho(x, y) = |x - y|$. Такая метрика, как уже отмечалось выше, называется *естественной метрикой* и используется всегда, когда речь идет о числовой последовательности. При этом δ-окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ является интервал $\{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\}$.

Определение 3. *Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если*

$$(\exists\, a \in \mathbb{R} \wedge \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, m \in \mathbb{N} : \forall\, n > m) \Rightarrow (|x_n - a| < \varepsilon). \qquad (2)$$

Число a называют пределом последовательности $\{x_n\}$.

Ясно, что неравенство (2) можно получить из неравенства (1), полагая $\rho(x_n, a) = |x_n - a|$. Очевидно, также, что для сходящихся числовых последовательностей справедлива теорема 1.

Пример 1. Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ является сходящейся и ее предел равен нулю.

Действительно, $\forall \varepsilon > 0$, согласно теореме Архимеда, найдется число $m \in \mathbb{N}$ такое, что $m > \frac{1}{\varepsilon}$. Отсюда $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{m} < \varepsilon \quad \forall n > m$, что и означает сходимость данной последовательности к нулю.

Пример 2. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$.

При $q = 0$ это уже доказано выше. Пусть $0 < |q| < 1$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное. Согласно следствию 1 из теоремы Архимеда (см. п. 7.5, гл. I), $\exists m \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{1}{|q|^m} > \frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, $\forall n > m$ имеем $\frac{1}{|q|^n} > \frac{1}{\varepsilon}$, т. е. $|q|^n < \varepsilon$ и $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Пример 3. Показать, что последовательность $\{\sqrt[n]{n}\}$ сходится к единице при $n \to \infty$.

Применяя к правой части равенства

$$n = (1 + (\sqrt[n]{n} - 1))^n, \quad n > 1,$$

формулу бинома Ньютона, находим

$$n = 1 + n(\sqrt[n]{n} - 1) + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 + \cdots + (\sqrt[n]{n} - 1)^n.$$

Поскольку $\sqrt[n]{n} - 1 > 0 \quad \forall n > 1$, то из последнего равенства следует неравенство

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно; тогда $\forall n > \frac{2}{\varepsilon^2}$ имеем $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$, откуда заключаем, что $\sqrt[n]{n} \to 1$ при $n \to \infty$.

Докажем важную теорему о пределе суммы, произведения и частного двух сходящихся числовых последовательностей.

Теорема 2. *Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ действительных чисел сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, *если* $(y_n \neq 0 \ \forall n) \wedge b \neq 0$.

◀ 1) Согласно условию, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ такие, что

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N_1,$$

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N_2.$$

Тогда $\forall n > N$, $N = \max\{N_1, N_2\}$, оба неравенства будут выполнены и

$$|x_n + y_n - a - b| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение 1).

2) Если все члены одной из последовательностей равны нулю, то, согласно сказанному в начале пункта, утверждение очевидно. Если же $y_n \neq 0$ для некоторых n, то $\sup \{|y_n|\} = M > 0$. По условию $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ такое, что

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{M + |a|}, \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{M + |a|} \quad \forall n > N.$$

Отсюда и из очевидного неравенства

$$|x_n y_n - ab| = |y_n (x_n - a) + a (y_n - b)| \leqslant |y_n| |x_n - a| + |a| \cdot |y_n - b|,$$

справедливого $\forall n \in \mathbb{N}$, получаем

$$|x_n y_n - ab| \leqslant (|y_n| + |a|) \frac{\varepsilon}{M + |a|} < \varepsilon \quad \forall n > N,$$

т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n y_n = ab$.

3) Поскольку $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$ и $y_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, то $\exists m$ такое, что $\forall n > m$ верны неравенства $\frac{|b|}{2} > |b - y_n| \geqslant |b| - |y_n|$, т. е. $|y_n| > \frac{|b|}{2}$ $\forall n > m$. Далее из условия следует, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$ выполняются неравенства

$$|x_n - a| < \frac{\frac{b^2}{2} \varepsilon}{|a| + |b|}, \quad |y_n - b| < \frac{\frac{b^2}{2} \varepsilon}{|a| + |b|}.$$

Возьмем $N > m$. Тогда из этих неравенств вытекает, что $\forall n > N$

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{b (x_n - a) - a (y_n - b)}{b y_n} \right| \leqslant \frac{|b| \cdot |x_n - a| + |a| \cdot |y_n - b|}{\frac{b^2}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|b| + |a|}{\frac{b^2}{2}} \cdot \frac{\frac{b^2}{2} \varepsilon}{|a| + |b|} = \varepsilon. \blacktriangleright$$

Следствие. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, а c — постоянное число, то*

$$\lim_{n \to \infty} c x_n = c \lim_{n \to \infty} x_n.$$

◀ Это утверждение следует из 2) и того, что при

$$y_n = c \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \to \infty} y_n = c. \blacktriangleright$$

Теорема 3. *Если последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ сходится к числу a и $x_n \leqslant b$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то $a \leqslant b$.*

◀ Предположив обратное, т. е. что $b < a$, укажем такое $m > 0$, что

$$|x_n - a| < a - b \quad \forall n > m$$

Отсюда получаем неравенство

$$b < x_n \quad \forall n > m,$$

противоречащее условию теоремы. ▶

Заметим, что если $(\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a) \wedge (x_n < b)\ \forall n \in \mathbb{N}$, то может оказаться, что $a = b$.

Например, все члены последовательности $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, меньше единицы, однако ее предел равен единице.

Следствие 1. *Если* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \wedge \lim\limits_{n\to\infty} y_n \wedge (x_n \leqslant y_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n.$$

◀ Для доказательства применим теорему 3 к последовательности $\{x_n - y_n\}$ с неположительными членами, которая, согласно теореме 2, является сходящейся. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant 0$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. ▶

Следствие 2. *Если* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \wedge (a \leqslant x_n \leqslant b)\ \forall n \in \mathbb{N}$, *то*

$$a \leqslant \lim_{n\to\infty} x_n \leqslant b.$$

◀ Утверждение следует из теоремы 3. ▶

Теорема 4. *Если*

$$(\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a) \wedge (\exists \lim_{n\to\infty} y_n = a) \wedge (x_n \leqslant z_n \leqslant y_n) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

то

$$\exists \lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

◀ В силу условия теоремы $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ такие, что

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad \forall n > N_1,$$

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \quad \forall n > N_2.$$

Тогда $\forall n > N$, $N = \max\{N_1, N_2\}$, имеем

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant z_n \leqslant y_n < a + \varepsilon, \text{ т. е. } |z_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N. \ ▶$$

Пример 4. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$.

Для $a > 1$ это следует из неравенства

$$1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}, \quad n > a,$$

и примера 3. Если $0 < a < 1$, то, согласно теореме 2,

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \to 1 \quad \text{при } n \to \infty.$$

4.3. Монотонные последовательности.

Определение. *Последовательность действительных чисел* $\{x_n\}$ *называется* н е у б ы в а ю щ е й (н е в о з р а с т а ю щ е й), *если* $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$x_n \leqslant x_{n+1} \quad (x_n \geqslant x_{n+1}).$$

Неубывающие и невозрастающие последовательности объединяются общим наименованием «*монотонные последовательности*».

Если же $\forall\, n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$x_n < x_{n+1} \quad (x_n > x_{n+1}),$$

то последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей (убывающей)*. Если монотонная последовательность $\{x_n\}$ *неубывающая (невозрастающая)*, то запишем $\{x_n\}\uparrow$ ($\{x_n\}\downarrow$).

Из определения монотонной последовательности вытекает, что неубывающая (невозрастающая) последовательность ограничена снизу (сверху) своим первым членом.

Теорема. *Если неубывающая (невозрастающая) последовательность* $\{x_n\}$ *ограничена сверху (снизу), то она имеет конечный предел.*

◀ Пусть, например, $\{x_n\}\uparrow$ и ограничена сверху. Тогда множество ее значений имеет точную верхнюю грань $\sup\{x_n\} = l$. Покажем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. Действительно, в силу свойств точной верхней грани $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, m \in \mathbb{N}$ такое, что

$$l - \varepsilon < x_m \leqslant l.$$

В силу монотонности последовательности $\{x_n\}$ $\forall\, n > m$ выполняется неравенство

$$l - \varepsilon < x_m \leqslant x_n \leqslant l,$$

откуда

$$|l - x_n| < \varepsilon \quad \forall\, n > m.$$

В случае невозрастающей последовательности доказательство аналогично. ▶

Следствие. *Монотонная последовательность* $\{x_n\}$ *сходится тогда и только тогда, когда она ограничена.*

◀ Достаточность условия непосредственно вытекает из только что доказанной теоремы, а необходимость следует из теоремы 1, п. 4.2, утверждающей, что сходящаяся последовательность ограничена. ▶

Лемма (о в л о ж е н н ы х с е г м е н т а х). *Пусть задано бесконечное множество таких сегментов*

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ \ldots,\ [a_n, b_n],\ \ldots, \tag{1}$$

что каждый последующий содержится в предыдущем, т. е.

$$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Тогда, если $b_n - a_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то система сегментов* (1) *имеет единственную общую точку.*

◀ Из условия $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ следует, что $a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, т. е. последовательность $\{a_n\}$ не убывает,

а $\{b_n\}$ — не возрастает. А из неравенств $a_n < b_n \leqslant b_1$, $a_1 \leqslant a_n < b_n$ следует, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху, а последовательность $\{b_n\}$ — снизу. Следовательно, согласно теореме

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = c, \quad \exists \lim_{n\to\infty} b_n = c_1.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, то $0 = \lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c_1 - c$, т. е. $c = c_1$. Пользуясь равенствами $c = \sup\{a_n\}$, $c_1 = \inf\{b_n\}$ (см. доказательство теоремы), $c = c_1$, заключаем, что $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. ▶

4.4. Число e. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Покажем, что эта последовательность возрастающая и ограничена сверху. По формуле бинома Ньютона имеем

$$x_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \dots$$
$$\dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!} \times$$
$$\times \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots$$
$$+ \dots \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \tag{2}$$

Если в этом равенстве заменить n на $n + 1$, то выражение в каждой из скобок увеличится и, кроме того, прибавится еще одно положительное слагаемое. Следовательно, $x_n < x_{n+1}$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ возрастает. Далее, поскольку $\left(1 - \frac{m}{n}\right) < 1$ для всех m, $m = \overline{1, n-1}$, то из (2) следует неравенство

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}. \tag{3}$$

Это неравенство только усилится, если заменить $\frac{1}{m!}$ на $\frac{1}{2^{m-1}}$, $m = \overline{2, n}$. В результате получим неравенство

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

правая часть которого, начиная со второго слагаемого, является суммой геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2}$. Поэтому

$$x_n < 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

По теореме пункта 4.3, возрастающая ограниченная последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, который, следуя Эйлеру, обозначают буквой e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Последовательность

$$y_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

также имеет своим пределом число e.

Действительно, если $k \in \mathbb{N}$ фиксировано и $k < n$, то из (2) следует неравенство

$$x_n > 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$e \geqslant 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} = y_k.$$

Это неравенство справедливо при любом k и, кроме того, как это следует из (3) $x_n < y_n$; следовательно,

$$x_n < y_n \leqslant e. \tag{4}$$

Поскольку последовательность $\{y_n\}$ возрастающая, то на самом деле в неравенствах (4) выполняется строгое неравенство. Таким образом, имеем

$$x_n < y_n < e.$$

При $n \to \infty$ на основании теоремы 4, п. 4.2, находим, что

$$\lim_{n\to\infty} y_n = e.$$

Последовательность $\{y_n\}$ более быстро сходится и поэтому удобна для приближенного вычисления числа e. Чтобы показать это, оценим разность $e - y_n$. Имеем

$$y_{n+m} - y_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right.$$
$$\left. \cdots + \frac{1}{(n+2)\ldots(n+m)}\right) <$$
$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right) =$$
$$= \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}\left(1 - \frac{1}{(n+2)^m}\right) < \frac{n+2}{(n+1)!\,(n+1)} < \frac{1}{n\cdot n!}.$$

Зафиксировав здесь n и устремив m в бесконечность, получим

$$0 < e - y_n < \frac{1}{n\cdot n!}.$$

Из этого неравенства вытекает, что

$$0 < \theta_n = \frac{e - y_n}{\frac{1}{n \cdot n!}} < 1$$

и

$$e - y_n = \frac{\theta_n}{n \cdot n!} .$$

Отсюда получаем удобную форму для приближенного вычисления числа e:

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!} . \qquad (5)$$

Погрешность, которую допускаем, заменяя число e на y_n, не превосходит величины $\frac{\theta_n}{n \cdot n!}$, где $0 < \theta_n < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Например, при $n = 10$

$$e - y_{10} = \frac{\theta_{10}}{10 \cdot 10!} < 3 \cdot 10^{-7},$$

при этом $e \simeq 2{,}718281$.

Теорема. *Число e иррационально.*

◀ Если предположить, что e рациональное число, то его можно записать в виде $e = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$. Записав для этого n равенство (5)

$$\frac{m}{n} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!} ,$$

находим из него

$$\frac{\theta_n}{n} = m(n-1)! - \left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) n!.$$

Это равенство противоречиво, так как справа целое число, а слева дробь. Источник противоречия — в предположении, что число e рационально. Следовательно, e — иррационально. ▶

Несмотря на иррациональность числа e некоторые его свойства, о которых речь пойдет позже, определяют предпочтение числа e по сравнению с другими числами. Так, например, введены в рассмотрение логарифмы с основанием e. Такие логарифмы называются *натуральными логарифмами* и обозначаются $\ln x$. Пользуясь известной зависимостью между логарифмами чисел при различных основаниях, находим, что десятичные и натуральные логарифмы связаны равенствами

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \lg e \cdot \lg x.$$

Следовательно,

$$\lg x = M \ln x,$$

где число $M = \frac{1}{\ln 10} = \lg e = 0{,}434294 \ldots$ называется модулем перехода.

Пример 1. Последовательность $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к числу e.

Это вытекает из того, что

$$z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 1$$

при $n \to \infty$ и теоремы 2, п. 4.2.

Заметим, что последовательность $\{z_n\}$ убывает. В самом деле, составив отношение $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ и применив неравенство Бернулли, находим

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1}} \cdot \frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{1 + \frac{n+1}{n^2 + 2n}} \cdot \frac{n+2}{n+1} =$$

$$= \frac{n^3 + 4n^2 + 4n}{n^3 + 4n^2 + 4n + 1} < 1.$$

Таким образом, обе последовательности

$$\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} \quad \text{и} \quad \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

имеют своим пределом число e, причем первая меньше числа e при $\forall\, n \in \mathbb{N}$, а вторая — больше числа e, т. е.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}. \tag{6}$$

Пример 2. Показать, что последовательность $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет конечный предел.

Пользуясь неравенством (6), заключаем, что

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0,$$

т. е. что $\{a_n\}$ убывает и что она ограничена снизу

$$a_n > \ln(1+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln n =$$

$$= \ln\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{n+1}{n} > \frac{1}{n+1} > 0.$$

Поэтому, согласно теореме 1, п. 4.3, последовательность $\{a_n\}$ имеет конечный предел, который обозначим через C.

Положим $a_n - C = \gamma_n$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$. Из равенства $a_n - C = \gamma_n$ находим

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \gamma_n. \tag{7}$$

Число C называется *постоянной Эйлера*.

Пример 3. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin(2\pi en) = 2\pi$.

Имеем (см. равенство (5))

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!}, \quad 0 < \theta_n < 1.$$

Отсюда

$$\theta_n = \frac{e - y_n}{\frac{1}{n \cdot n!}} = n \cdot n!\,(e - y_n), \tag{8}$$

где

$$y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

В равенстве (8) положим

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)\,(n+1)!}, \quad 0 < \theta_{n+1} < 1. \tag{10}$$

Из равенств (8), (9) и (10) при $n \to \infty$ следует

$$\theta_n = n \cdot n! \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)\,(n+1)!} \right) = \frac{n}{n+1} + \frac{n\theta_{n+1}}{(n+1)^2} \to 1.$$

Пользуясь этим, получаем

$$\lim_{n\to\infty} n \sin(2\pi en!) = \lim_{n\to\infty} n \sin\left(2\pi n! y_n + \frac{2\pi\theta_n}{n}\right).$$

Поскольку $2\pi n! y_n$ кратное 2π, то

$$\sin\left(2\pi n! y_n + \frac{2\pi\theta_n}{n}\right) = \sin\frac{2\pi\theta_n}{n}.$$

Таким образом (см. равенство (1), п. 6.3),

$$\lim_{n\to\infty} n \sin(2\pi en!) = \lim_{n\to\infty} n \sin\frac{2\pi\theta_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{2\pi\theta_n}{n}}{\frac{2\pi\theta_n}{n}}\, 2\pi\theta_n = 2\pi.$$

4.5. Предел в несобственном смысле. В пункте 4.2 определили предел числовой последовательности и установили критерий сходимости в терминах окрестностей.

Для произвольного действительного числа определили δ-окрестность точки a как интервал длины 2δ с центром в точке a, т. е. интервал $]a - \delta,\ a + \delta[$.

Если перейти к расширенной системе действительных чисел $\overline{\mathbb{R}}$, то кроме рассмотренных выше окрестностей следует определить окрестность еще двух «точек» $+\infty$ и $-\infty$. Кроме того, добавим к множеству $\overline{\mathbb{R}}$ еще один новый элемент, который назовем ∞ и определим его Δ-окрестность.

Определение 1. *Δ-окрестностью «точки $+\infty$» («точки $-\infty$») называется множество точек $\mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству*

$$\Delta < x < +\infty \qquad (-\infty < x < \Delta).$$

Δ-окрестностью «точки ∞» называется множество точек $\mathbb{R}$, не принадлежащих сегменту $[-\Delta,\ \Delta]$.

Определение 2. *Числовая последовательность* $\{x_n\}$ *имеет предел* $+\infty$, *или* x_n *стремится к* $+\infty$, *если*

$$\forall \Delta > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : \forall n > m \Rightarrow x_n > \Delta.$$

Аналогично, *последовательность* $\{x_n\}$ *имеет предел* $-\infty$, *если*

$$\forall \Delta > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : \forall n > m \Rightarrow x_n < -\Delta.$$

Наконец, *последовательность* $\{x_n\}$ *имеет предел* ∞, *если*

$$\forall \Delta > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : \forall n > m \Rightarrow |x_n| > \Delta.$$

При этом соответственно запишем:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \text{ или } x_n \to +\infty \text{ при } n \to \infty;$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty, \text{ или } x_n \to -\infty \text{ при } n \to \infty;$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty, \quad \text{или } x_n \to \infty \quad \text{при } n \to \infty.$$

Теорема 1. *Последовательность* $\{x_n\}$ *сходится к* $+\infty$ $(-\infty)$ *тогда и только тогда, когда произвольная окрестность „точки"* $+\infty$ $(-\infty)$ *содержит все члены последовательности, кроме конечного их числа.*

◀ Доказательство аналогично доказательству 3) теоремы 1, п. 4.2. ▶

Следует отметить, что теорема 2, п. 4.2, для пределов в несобственном смысле или, как иногда говорят, для бесконечных пределов не выполняется. Однако некоторые частичные утверждения остаются в силе и будут полезны в дальнейшем.

Теорема 2. *Пусть* $n \to \infty$. *Тогда:*

1) *если* $x_n \to +\infty$ *и* $y_n > m$, *то* $x_n + y_n \to +\infty$;
2) *если* $x_n \to -\infty$ *и* $y_n < M$, *то* $x_n + y_n \to -\infty$;
3) *если* $x_n \to +\infty$ *и* $y_n > m > 0$, *то* $x_n y_n \to +\infty$;
4) *если* $x_n \to 0$ *и* $|y_n| < M$, *то* $x_n y_n \to 0$;
5) *если* $x_n \to +\infty$ *и* $0 < y_n < M$, *то* $\frac{x_n}{y_n} \to +\infty$;
6) *если* $x_n \to 0$ *и* $|y_n| > m > 0$, *то* $\frac{x_n}{y_n} \to 0$;
7) *если* $|x_n| < M$ *и* $|y_n| \to +\infty$, *то* $\frac{x_n}{y_n} \to 0$;
8) *если* $|x_n| > m > 0$ *и* $|y_n| \to 0$, *то* $\left|\frac{x_n}{y_n}\right| \to +\infty$.

◀ 1) Из условия вытекает, что $\forall E > 0$, в частности, для $E = \Delta - m$, где $\Delta > m$ — произвольное положительное число, $\exists n_0$ такое, что $\forall n > n_0$ выполняется неравенство $x_n > \Delta - m$. Но тогда $\forall n > N$, имеем $x_n + y_n > \Delta$, что равносильно утверждению 1.

7) Из условия следует, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 > 0$, что $\forall n > n_0$ имеем $|y_n| > \frac{M}{\varepsilon}$ или $\frac{1}{|y_n|} < \frac{\varepsilon}{M}$. Тогда $\forall n > n_0$

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| = |x_n| \frac{1}{|y_n|} < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Остальные утверждения доказываются аналогично. ▶

Ничего определенного нельзя сказать о существовании предела в следующих случаях:

1) для разности $\{x_n - y_n\}$ расходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, когда $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$ при $n \to \infty$;

2) для последовательности $\{x_n y_n\}$, когда $x_n \to +\infty$, $y_n \to 0$ при $n \to \infty$;

3) для последовательности $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, когда $x_n \to +\infty$, $y_n \to \infty$ или $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Аналогичную ситуацию имеем, если $+\infty$ заменить на $-\infty$.

Для нахождения пределов таких последовательностей необходимы дополнительные исследования с использованием более конкретных свойств последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Например, если в последовательности $\{\sqrt{n^2+1} - n\}$ положить $x_n = \sqrt{n^2+1}$, $y_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, то, поскольку, $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, реализуется случай 1). Преобразуем разность $\sqrt{n^2+1} - n$ так, чтобы выполнялось условие теоремы 1 или одно из условий теоремы 2. Имеем

$$\sqrt{n^2+1} - n = \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}.$$

Таким образом, пришли к условию 7) теоремы 2; следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Рассмотрим последовательность $\{\sqrt{n^2+n} - n\}$. Поступая аналогично, приходим к равенству

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}.$$

Как следует из неравенства,

$$0 < \sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} < \frac{1}{n},$$

корень $\sqrt{1+\frac{1}{n}}$ стремится к единице при $n \to \infty$. Следовательно, в этом случае применима теорема 2, п. 4.2, и предел равен $\frac{1}{2}$.

4.6. Некоторые достаточные условия сходимости числовых последовательностей.

Теорема 1 (Тёплица). *Пусть*: 1) $P_{nk} \geqslant 0$ $\forall n \in \mathbb{N} \wedge \forall k$, $k = \overline{1, n}$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} P_{nk} = 1$; 3) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} P_{nk} = 0$ *для каждого фиксированного* k; 4) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, $l \in \mathbb{R}$. *Тогда последовательность*

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} P_{nk} x_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

сходится и

$$\lim_{n\to\infty} t_n = l.$$

◀ Из условия 4) следует, что $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N$ такое, что $\forall\, n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, из этого же условия вытекает существование такого числа M, что

$$|x_n| \leqslant M, \quad |x_n - l| \leqslant 2M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Наконец, из условия 3) следует существование такого числа $n_0 > N$, что $\forall\, n > n_0$

$$P_{nk} < \frac{\varepsilon}{4NM}, \quad k = \overline{1,\ N}.$$

Пользуясь этими неравенствами и условиями 1) — 2) теоремы, $\forall\, n > n_0$ получаем оценку

$$\left|\sum_{k=1}^{n} P_{nk}x_k - l\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} P_{nk}x_k - \sum_{k=1}^{n} P_{nk}l\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x_k - l)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} P_{nk}|x_k - l| =$$

$$= P_{n1}|x_1 - l| + \cdots + P_{nN}|x_N - l| + P_{nN+1}|x_{N+1} - l| + \cdots$$

$$\cdots + P_{nn}|x_n - l| < N\,\frac{\varepsilon}{4NM}\cdot 2M +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2}(P_{nN+1} + \cdots + P_{nn}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

из которой непосредственно следует утверждение. ▶

Теорема 2 (Штольца). *Пусть:* 1) $\{y_n\}$ — *возрастающая неограниченная последовательность;* 2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ *(конечный или бесконечный). Тогда последовательность* $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ *имеет предел и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

◀ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l$ *и* l — конечно. Тогда, если положить $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ и

$$P_{nk} = \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n}, \quad k = \overline{1,\ n}; \quad X_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

то для P_{nk} и X_n будут выполнены все условия предыдущей теоремы, причем $t_n = \frac{x_n}{y_n}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

Если же $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty$, то, повторяя приведенные выше рассуждения для последовательности $\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\}$, предварительно убедившись, что $\{x_n\}$ — возрастающая последовательность, заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$, т. е. что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$. ▶

Следствие. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к l, где $l \in \overline{\mathbb{R}}$, то к этому пределу сходится и последовательность средних арифметических, составленная из членов данной последовательности, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

◀ Для доказательства достаточно к среднему арифметическому применить теорему 2. ▶

Пример 1. Если последовательность $\{x_n\}$ с положительными членами сходится к l, то среднее арифметическое, среднее гармоническое и среднее геометрическое ее членов также сходятся к этому пределу:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = l, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = l,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = l.$$

В самом деле, первое равенство доказано выше, второе следует из следствия теоремы 2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_1} - \cdots - \frac{1}{x_{n-1}}}{n - (n-1)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} x_n = l.$$

А тогда из неравенств

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

(см. неравенство (4), § 9, гл. I) и теоремы 4, п. 4.2, следует третье равенство.

Пример 2. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}},$$

если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}$ существует и $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Согласно предыдущему примеру,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}.$$

Пример 3. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$.

Применяя теорему Штольца, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{n+1-n}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0.$$

Последнее равенство следует из неравенств (6), п. 4.4, и теоремы 4, п. 4.2.

4.7. Предельные точки.

Определение 1. *Точка $x_0\in E$ называется предельной точкой (или точкой сгущения) множества $A\subset E$, где E — метрическое пространство, если произвольная окрестность точки x_0 содержит хотя бы одну точку множества A, отличную от точки x_0.*

Сама точка x_0 может принадлежать или не принадлежать множеству A. Из этого определения следует, что если x_0 — предельная точка множества A, то всякая ее окрестность содержит бесконечное множество точек множества A, отличных от точки x_0.

Действительно, пусть для предельной точки x_0 существует окрестность $S(x_0, r)$, содержащая только конечное число точек $x_1, x_2, \ldots, x_m$ множества A, отличных от точки x_0. Тогда, выбирая произвольное положительное число $r_0\leqslant\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\rho(x_0, x_i)$, строим окрестность $S(x_0, r_0)$, которая не содержит ни одной точки множества A. А это противоречит определению предельной точки.

Отсюда как следствие вытекает, что конечное число точек не может иметь предельных точек.

Теорема. *Точка $x_0\in E$ является предельной точкой множества $A\subset E$ тогда и только тогда, когда из этого множества можно выделить последовательность $\{x_n\}$ различных точек, сходящуюся к точке x_0.*

◀ *Достаточность.* Если существует последовательность $\{x_n\}$ различных точек множества A, сходящаяся к точке x_0, то произвольная окрестность точки x_0 содержит все члены последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, т. е. содержит бесконечное число точек множества A. Поэтому x_0 — предельная точка множества A.

Необходимость. Пусть x_0 — предельная точка множества A, а $\{\delta_n\}$ — произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. Выберем в окрестности $S(x_0, \delta_1)$ точку $x_1\in A$, отличную от x_0. Затем в окрестности $S(x_0, \delta_2)$ выберем точку $x_2\in A$, отличную от x_0 и x_1, и т. д. На n-м шаге в окрестности $S(x_0, \delta_n)$ выберем точку x_n, отличную от уже ранее выбранных точек x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1}$ и точки x_0, если таковы принадлежат окрестности $S(x_0, \delta_n)$. Такой выбор возможен, поскольку окрестность $S(x_0, \delta_n)$ содержит бесконечное число точек множества A, отличных от x_0, и, следовательно, не может исчерпываться ранее выбранными точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Продолжая описанный процесс неограниченно,

получаем последовательность $\{x_n\}$ точек множества A такую, что $x_n \in S(x_0, \delta_n)$, $0 < \rho(x_n, x_0) < \delta_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Отсюда, использовав теорему 4, п. 4.2, заключаем, что $\rho(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$ или, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. ▶

Из доказательства теоремы следует, что последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к предельной точке, можно выбрать неограниченным количеством способов.

Доказанная теорема позволяет дать другое определение предельной точки множества, эквивалентное приведенному выше.

Определение 2. *Точка $x_0 \in E$ называется предельной точкой множества $A \subset E$, если из этого множества можно выделить последовательность $\{x_n\}$ различных точек, сходящуюся к точке x_0.*

В дальнейшем введем понятие предельной точки числовой последовательности.

Определение 3. *Число $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется предельной точкой числовой последовательности $\{x_n\}$, если любая окрестность точки a содержит бесконечное число элементов последовательности.*

Не следует смешивать понятие предельной точки множества E значений числовой последовательности $\{x_n\}$ с понятием предельной точки числовой последовательности.

Например, числовая последовательность $\{(-1)^n\}$ имеет две предельные точки 1 и -1.

В самом деле, любая окрестность точки 1 содержит бесконечное число членов данной последовательности, а именно, все члены с четными номерами. Если же зададим произвольную окрестность точки -1, то в нее попадут все члены последовательности с нечетными номерами, которых также сколь угодно много.

В то же время множество значений данной последовательности состоит только из двух чисел 1 и -1 и поэтому не может иметь предельных точек.

4.8. Частичные пределы. Пусть задана последовательность действительных чисел

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots; \tag{1}$$

рассмотрим какую-либо ее подпоследовательность (частичную последовательность)

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots. \tag{2}$$

Теорема 1. *Если последовательность* (1) *сходится к конечному или бесконечному пределу a, то подпоследовательность* (2) *также сходится к этому же пределу.*

◀ В случае, когда a — конечное число, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : \forall n > m \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Поскольку последовательность индексов $\{n_k\}$ стремится к $+\infty$ с возрастанием k, то для указанного ранее $\varepsilon > 0$

$$\exists p \in \mathbb{N} : \forall k > p \Rightarrow n_k > m \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

В случае несобственного предела, например, если $a = +\infty$, то

$$\forall \Delta > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : \forall n > m \Rightarrow x_n > \Delta.$$

Тогда, поскольку $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$

$$\exists q \in \mathbb{N} : \forall k > q \Rightarrow n_k > m \Rightarrow x_{n_k} > \Delta,$$

а это равносильно тому, что

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = +\infty. \blacktriangleright$$

Определение. *Если частичная последовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится, то ее предел называется частичным пределом последовательности $\{x_n\}$.*

Последняя теорема гласит, что если последовательность имеет предел a, то любой ее частичный предел также равен a. Таким образом, сходящаяся последовательность имеет единственный частичный предел, совпадающий с пределом последовательности.

Очевидно, частичный предел последовательности является одновременно и ее предельной точкой. Отсюда следует, что сходящаяся последовательность имеет единственную предельную точку.

Возникает вопрос: всякая ли последовательность имеет частичный предел? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2 (Больцано — Вейерштрасса). *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

◀ Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена, т. е.

$$\exists a \in \mathbb{R} \wedge \exists b \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leqslant x_n \leqslant b.$$

В этом случае все члены последовательности $\{x_n\}$ принадлежат сегменту $[a, b]$.

Разделим сегмент $[a, b]$ точкой $\frac{a+b}{2}$ пополам. Тогда хотя бы одна из половин сегмента $[a, b]$ содержит бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$, обозначим ее через $[a_1, b_1]$. Если бы обе половины сегмента $[a, b]$ содержали бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$, то через $[a_1, b_1]$ можно обозначить любую из них. Сегмент $[a_1, b_1]$ точкой $\frac{a_1+b_1}{2}$ снова разделим пополам и через $[a_2, b_2]$ обозначим ту из половин сегмента $[a_1, b_1]$, которая содержит бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$. Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных сегментов

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k] \supset \cdots,$$

длина которых $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$ стремится к нулю при $k \to \infty$.

Выберем подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ следующим образом. В качестве x_{n_1} возьмем любой из членов последовательности $\{x_n\}$, принадлежащих сегменту $[a_1, b_1]$. В качестве x_{n_2} возьмем любой из членов последовательности $\{x_n\}$, принадлежащих сегменту $[a_2, b_2]$, и такой, что $n_2 > n_1$. Такой член существует, поскольку сегмент $[a_2, b_2]$ содержит

бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$ и т. д. Вообще в качестве x_{n_k} возьмем любой из членов последовательности $\{x_n\}$, принадлежащий сегменту $[a_k, b_k]$ и такой, что $n_k > n_{k-1} > \ldots > n_2 > n_1$. Бесконечно продолжив описанный процесс, получим такую последовательность $\{x_{n_k}\}$, что $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ и

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k.$$

Поскольку последовательность сегментов вложенная и длины их стремятся к нулю с возрастанием k, то $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = c$. А тогда, согласно теореме 4, п. 4.2, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$. ▶

Следствие. *Любая последовательность $\{x_n\}$ действительных чисел имеет, по крайней мере, один частичный предел, конечный или бесконечный.*

◀ Если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху (снизу), то

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n_k \in \mathbb{N} : x_{n_k} > k \quad (x_{n_k} < -k).$$

Далее,

$$\forall \Delta > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : \forall k > m \Rightarrow \Delta < k < x_{n_k} \quad (x_{n_k} < -k < -\Delta),$$

а это равносильно тому, что $x_{n_k} \to +\infty$ ($x_{n_k} \to -\infty$) при $k \to \infty$.

Наконец, если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена (как сверху, так и снизу), то

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n_k \in \mathbb{N} : |x_{n_k}| > k.$$

Тогда

$$\forall \Delta > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : \forall k > m \Rightarrow |x_{n_k}| > k > \Delta,$$

т. е.

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty. \ ▶$$

4.9. Верхний и нижний пределы.

Определение. *Наибольший (наименьший) частичный предел числовой последовательности $\{x_n\}$ называется ее верхним (нижним) пределом и обозначается*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \quad \left(\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n\right).$$

Поскольку частичный предел числовой последовательности является ее предельной точкой, то верхний (нижний) предел можно определить как наибольшую (наименьшую) ее предельную точку.

Известно, что произвольное бесконечное множество действительных чисел может и не иметь наибольшего (наименьшего) элемента. Например, ограниченное множество действительных чисел $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего элемента. Поэтому, естественно, возникает вопрос: всякая ли последовательность действительных чисел имеет верхний (нижний) предел? Следующая теорема дает утвердительный ответ на поставленный вопрос.

Теорема 1. *Любая числовая последовательность имеет верхний и нижний пределы.*

◀ Докажем существование верхнего предела; для доказательства существования нижнего предела рассуждаем аналогично.

Если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху, то, как показано в предыдущем пункте, существует бесконечный частичный предел $+\infty$, который является наибольшим частичным пределом, т. е.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty.$$

Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, например, числом M и $\forall\,\Delta$ меньшего числа M сегмент $[\Delta, M]$ содержит конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$, то окрестность $]-\infty, \Delta[$ содержит все элементы последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера. В этом случае последовательность $\{x_n\}$ сходится в несобственном смысле к $-\infty$. Очевидно, этот единственный несобственный частичный предел является верхним и одновременно нижним пределом, т. е. пределом последовательности.

Если же последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху числом M и существует конечный сегмент $[\Delta, M]$, содержащий бесконечное число элементов данной последовательности, то по теореме Больцано — Вейерштрасса, п. 4.8, последовательность имеет хотя бы один конечный частичный предел. В этом случае множество конечных частичных пределов, которое обозначим через E^*, не пусто. Если $\{x_n\}$ ограничена сверху, то и E^* также ограничено сверху. А тогда $\exists \sup E^* = \bar{x}$. Покажем, что $\bar{x}$ — частичный предел последовательности $\{x_n\}$, т. е. что $\bar{x} \in E^*$.

Действительно, из свойств точной верхней грани вытекает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E^* : \bar{x} - \frac{\varepsilon}{2} < x \leqslant \bar{x},$$

т. е.

$$|\bar{x} - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку x частичный предел, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к x. Тогда $\forall\,\varepsilon > 0$, в том числе и для ε, указанного выше,

$$\exists m \in \mathbb{N} : \forall k > m \Rightarrow |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из двух последних неравенств вытекает, что $\forall\, k > m$

$$|\bar{x} - x_{n_k}| \leqslant |\bar{x} - x| + |x - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

А это означает, что $\bar{x}$ частичный предел и он является наибольшим элементом в множестве E^*, т. е.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \bar{x}. \quad \blacktriangleright$$

Следствие. *Если* $\bar{x}(\underline{x})$ *— верхний (нижний) предел ограниченной числовой последозательности* $\{x_n\}$, *то* $\forall \varepsilon > 0$ *неравенство* $x_n > \bar{x} + \varepsilon$ $(x_n < \underline{x} - \varepsilon)$ *удовлетворяется разве что для конечного числа индексов.*

◀ Например, если бы в промежутке $[\bar{x} + \varepsilon, M]$, где M — верхняя грань последовательности $\{x_n\}$, содержалось бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$, то существовал бы конечный частичный предел, больший чем $\bar{x}$, что противоречило бы определению числа $\bar{x}$. ▶

Используя последнее утверждение, можно получить критерий сходимости последовательности в терминах верхнего и нижнего пределов.

Теорема 2. *Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена и ее верхний и нижний пределы совпадают.*

◀ *Необходимость.* Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится. Тогда она ограничена и имеет единственную предельную точку, т. е. единственный частичный предел, совпадающий с ее верхним и нижним пределом.

Достаточность. Пусть $\bar{x}$ и $\underline{x}$ соответственно верхний и нижний частичные пределы, причем

$$\bar{x} = \underline{x} = x.$$

Согласно следствию, приведенному выше, имеется только конечное число членов последовательности, удовлетворяющих неравенствам

$$x_n < \underline{x} - \varepsilon, \quad x_n > \bar{x} + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

т. е. $\forall \varepsilon > 0$ интервал $]x - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon[$ содержит все члены последовательности $\{x_n\}$, кроме конечного их числа. А поскольку этот интервал совпадает с ε-окрестностью общего значения $x = \bar{x} = \underline{x}$, то последовательность сходится, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x = \underline{x} = \bar{x}. \ ▶$$

Пример 1. Доказать, что

а) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} (x_n + y_n) \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$;

б) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$

и показать, что в этих соотношениях возможно строгое неравенство.

а) Заметим сначала, что если из последовательности $\{x_n\}$ выделить некоторую подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, то $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_{k_n}$. Так как нижний предел последовательности является ее предельной точкой, то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} (x_{r_n} + y_{r_n}); \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} x_{r_n} = \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}}.$$

В силу нашего замечания имеем

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} x_{r_n} + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_{r_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_{r_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_{m_{r_n}}.$$

Далее, так как $\{x_{m_{r_n}} + y_{m_{r_n}}\}$ является подпоследовательностью сходящейся последовательности $\{x_{r_n} + y_{r_n}\}$, то

$$\lim_{n\to\infty}(x_{r_n} + y_{r_n}) = \lim_{n\to\infty}(x_{m_{r_n}} + y_{m_{r_n}}).$$

А так как, кроме того, последовательность $\{x_{m_{r_n}}\}$ сходится, то и последовательность $\{y_{m_{r_n}}\}$ также сходится, так что

$$\lim_{n\to\infty} y_{m_{r_n}} = \lim_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}.$$

Отсюда и из нашего замечания последнее неравенство можно переписать в виде

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n \leqslant \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} + \lim_{n\to\infty} y_{m_{r_n}} = \lim_{n\to\infty}(x_{m_{r_n}} + y_{m_{r_n}}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(x_{r_n} + y_{r_n}) = \underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n).$$

Левая часть неравенства а) доказана.

Учитывая это и тот факт, что

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n) = -\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n,$$

получаем

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) - \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) + \underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n) \leqslant$$

$$\leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}((x_n + y_n) + (-y_n)) = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n.$$

Отсюда вытекает правая часть неравенства а). Аналогично доказывается неравенство б).

Приведем пример, когда в доказанных неравенствах выполняются строгие неравенства. Пусть

$$x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sin^2\frac{n\pi}{2},$$

$$y_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cos^2\frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $x_n + y_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ и

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -1, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} y_n = -1, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n = 1,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) = -1, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) = 1,$$

т. е. соотношения а) и б) обращаются в строгие неравенства.

Пример 2. Для последовательности $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, найти $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$, $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$.

Для решения примера все элементы последовательности $\{x_n\}$ разобъем на две сходящиеся подпоследовательности $x_{2n} = -2 - \frac{3}{2n}$, $x_{2n-1} = 2 + \frac{3}{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, $x_{2n} < x_{2n-1}$, причем последовательность $\{x_{2n-1}\}$ монотонно убывает, а $\{x_{2n}\}$ — возрастает. Отсюда следует, что последовательность $\{x_n\}$ имеет наименьший элемент x_2 и наибольший элемент x_1. Таким образом, $\inf\{x_n\} = x_2 = -\frac{7}{2}$, $\sup\{x_n\} = x_1 = 5$, а из того, что $x_{2n} < x_{2n-1}$, находим, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = 2, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = -2.$$

Пример 3. Покажем, что для последовательности $x_n = \frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 0, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1.$$

Действительно, из всех элементов последовательности $\{x_n\}$ образуем четыре сходящиеся подпоследовательности $\{x_{4n}\}$, $\{x_{4n-3}\}$, $\{x_{4n-2}\}$, $\{x_{4n-1}\}$, причем $x_{4n} < x_{4n-3} < x_{4n-2} < x_{4n-1}$.
Отсюда

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{4n} = 0,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{4n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n-2}{4n-1} = 1.$$

4.10. Критерий сходимости числовой последовательности. Ранее нами получен критерий сходимости монотонной последовательности (см. следствие из теоремы, п. 4.3) и критерий сходимости произвольной последовательности точек метрического пространства E в терминах окрестностей (см. теорему 1, п. 4.2). Наконец, получен критерий сходимости числовой последовательности в терминах верхнего и нижнего пределов (см. теорему 2, п. 4.9).

Рассмотрим общий критерий сходимости для произвольной числовой последовательности.

Прежде чем приступить к формулировке и доказательству критерия сходимости, введем понятие фундаментальной последовательности, а затем сформулируем одно свойство, общее для последовательностей точек любого метрического пространства (речь идет о необходимом условии сходимости таких последовательностей).

Определение. *Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического (или векторного нормированного) пространства E называется фундаментальной, если:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m > n_0 \wedge \forall n > n_0 \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon \quad (\|x_m - x_n\| < \varepsilon). \tag{1}$$

В частности, числовая последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m > n_0 \wedge \forall n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon. \tag{2}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $m > n$. Тогда $m = n + p$, где p — целое положительное число. В этом случае неравенства (1) и (2) можно записать в виде

$$\rho(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon \quad (\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon) \quad \forall n > n_0 \wedge p \in \mathbb{N}, \tag{1'}$$

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \quad \forall n > n_0 \wedge p \in \mathbb{N}. \tag{2'}$$

Теорема 1. *Если последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства E сходится, то она фундаментальна.*

◀ Пусть последовательность $\{x_n\}$ образована из элементов метрического пространства E и сходится к элементу $a \in E$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ такое, что $\forall n > n_0 \wedge \forall m > n_0$ выполняются неравенства

$$\rho(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(a, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда, пользуясь неравенством треугольника, получаем неравенство

$$\rho(x_m, x_n) \leqslant \rho(x_m, a) + \rho(a, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
$$\forall m > n_0 \wedge \forall n > n_0,$$

что означает фундаментальность последовательности $\{x_n\}$. ▶

Совершенно аналогично доказывается, что если последовательность $\{x_n\}$ элементов векторного нормированного пространства E сходится, то она фундаментальна.

Фундаментальную последовательность называют также *последовательностью Коши,* или последовательностью, *сходящейся в себе.*

Теорема 2 (критерий Коши сходимости числовой последовательности). *Для сходимости числовой последовательности $\{x_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

◀ *Необходимость* следует из теоремы 1.

Достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$ задано и для него указано число n_0 такое, что $\forall n > n_0 \wedge \forall m > n_0$ выполняется неравенство (2) или, что то же самое,

$$x_m - \frac{\varepsilon}{2} < x_n < x_m + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зафиксируем какое-либо $m > n_0$; тогда из последнего неравенства следует, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Согласно теореме 2, п. 4.8, из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $x_{n_k} \to c$ при $k \to \infty$. Для указанного ранее $\varepsilon > 0$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall k > k_0$ выполняется неравенство

$$|x_{n_k} - c| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3}$$

причем k_0 выбираем таким, чтобы было $n_{k_0} > n_0$. При этом неравенство (2) будет выполнено, если в нем положить $m = n_k$. Из неравенств (2) и (3) вытекает, что $\forall n > n_0$ выполняется неравенство

$$|x_n - c| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - c| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - c| < \varepsilon,$$

равносильное сходимости последовательности $\{x_n\}$. ▶

Пример 1. Пользуясь критерием Коши, показать, что последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится.

Пусть $\varepsilon > 0$ задано; тогда

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} <$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall n > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \forall p > 0.$$

Таким образом, согласно критерию Коши, последовательность сходится.

Пример 2. Показать, что последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, расходится.

Поскольку для произвольного n при $p = n$ выполняется неравенство

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} >$$

$$> \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2} > \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[,$$

то данная последовательность является расходящейся.

4.11. Сходимость последовательностей в некоторых метрических пространствах. Как уже указывалось (см. п. 2.2), произвольное векторное нормированное пространство $E = \{x, y, z, \ldots\}$ является одновременно и метрическим пространством, причем $\rho(x, y) = \|x - y\|$, где $\|\cdot\|$ — норма пространства E. Например, такими являются пространства $\mathbb{R}^m$ или $\mathfrak{M}$ (см. п. 2.2).

Тогда для векторного нормированного пространства E можно сформулировать в терминах нормы определение сходимости последовательности $\{x_n\}$ элементов этого пространства.

Определение 1. *Последовательность $\{x_n\}$ точек (векторов) векторного нормированного пространства E называется сходящейся, если существует такая точка $a \in E$, что $\|x_n - a\| \to 0$ при $n \to \infty$.*

Ясно, что последнее соотношение эквивалентно тому, что $\rho(x_n, a) \to 0$ при $n \to \infty$, поскольку $\rho(x_n, a) = \|x_n - a\|$ для произвольного векторного нормированного пространства.

Теорема 1. а) *Пусть $x_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$, $x_n \in \mathbb{R}^m$, $n \in \mathbb{N}$. Для сходимости последовательности $\{x_n\}$ к $x = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения*

$$\lim_{n \to \infty} a_{in} = a_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{1}$$

б) *Если $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — последовательности в $\mathbb{R}^m$, $\{\alpha_n\}$ — последовательность действительных чисел и $x_n \to x$, $y_n \to y$, $\alpha_n \to \alpha$ при $n \to \infty$, то*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y,$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n,\ y_n) = (x,\ y), \tag{2}$$
$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n x_n = \alpha x,$$

где $(x,\ y) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_mb_m$ — *скалярное произведение векторов* x *и* y.

◀ а) *Необходимость.* Пусть $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Тогда соотношение (1) справедливо в силу очевидного неравенства

$$|a_{in} - a_i| \leqslant |x_n - x|,$$

справедливого для всех введенных норм в $\mathbb{R}^m$.

Достаточность. Пусть, например, $|x| = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Если соотношение (1) выполняется, то

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n > n_0 \Rightarrow |a_{in} - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Тогда $\forall\, n > n_0$

$$|x_n - x| = \left(\sum_{i=1}^{m}(a_{in} - a_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon,$$

т. е. $x_n \to x$ при $n \to \infty$.

б) Пусть последовательности $x_n = (a_{1n},\ a_{2n},\ \ldots,\ a_{mn})$, $y_n = (b_{1n},\ b_{2n},\ \ldots,\ b_{mn})$, $n \in \mathbb{N}$, сходятся к $x = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m)$, $y = (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m)$ соответственно. Тогда по только что доказанному $a_{in} \to a_i$, $b_{in} \to b_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, при $n \to \infty$, откуда вытекает существование пределов

$$\lim_{n\to\infty}(a_{in} + b_{in}) = a_i + b_i, \quad \lim_{n\to\infty} a_{in}b_{in} = a_ib_i,$$
$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n a_m = \alpha a_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

что, в свою очередь, согласно а), влечет за собой выполнение равенств (2). ▶

Следствие. *Если последовательность* $x_n = (a_{1n},\ a_{2n},\ \ldots,\ a_{mn})$, $n \in \mathbb{N}$, *сходится, то выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = (\lim_{n\to\infty} a_{1n},\ \lim_{n\to\infty} a_{2n},\ \ldots,\ \lim_{n\to\infty} a_{mn}).$$

Более того, для существования предела последовательности $\{x_n\}$, $x_n \in \mathbb{R}^m$, необходимо и достаточно, чтобы сходились соответствующие последовательности координат $\{a_{in}\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, т. е.

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow (\forall\, i = \overline{1,\ m} \quad \exists \lim_{n\to\infty} a_{in}).$$

Теорема 2. *Для того чтобы последовательность* $\{x_n\}$ *элементов пространства* $\mathbb{R}^m$ *была фундаментальной, необходимо и достаточно,*

чтобы каждая из соответствующих последовательностей координат $\{a_{in}\}$, $i = \overline{1, m}$, *была фундаментальной.*

◀ *Необходимость* следует из неравенства

$$|a_{i\,n+p} - a_{in}| \leqslant |x_{n+p} - x_n|,$$

а *достаточность* в случае евклидовой нормы

$$|x_{n+p} - x_n| = \left(\sum_{i=1}^{m} (a_{i\,n+p} - a_{in})^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

следует из того, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \wedge \forall p \in \mathbb{N} \to |a_{i\,n+p} - a_{in}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},$$

$$i = \overline{1, m}. \ ▶$$

Сформулируем теперь критерий сходимости последовательности из $\mathbb{R}^m$.

Теорема 3 (критерий Коши для последовательности из $\mathbb{R}^m$). *Для сходимости последовательности* $\{x_n\}$ *элементов пространства* $\mathbb{R}^m$ *необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

◀ *Необходимость* непосредственно следует из теоремы 1, п. 4.10.

Достаточность. Пусть последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства $\mathbb{R}^m$ фундаментальна. Тогда, согласно теореме 2, фундаментальными будут каждая из последовательностей $\{a_{in}\}$, $i = \overline{1, m}$. А тогда, согласно теореме 2, п. 4.10, каждая из этих последовательностей сходится. Это, в свою очередь, согласно теореме 1, влечет сходимость последовательности $\{x_n\}$. ▶

Покажем, что для последовательностей из $\mathbb{R}^m$ остается справедливой теорема Больцано — Вейерштрасса.

Теорема 4. *Из любой ограниченной последовательности из* $\mathbb{R}^m$ *можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

◀ Доказательство проведем для случая, когда $m = 2$; в общем случае поступаем аналогично.

Итак, пусть последовательность $x_n = (a_n, b_n)$ ограничена, т. е. $\exists M \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|x_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leqslant M.$$

Отсюда вытекает, что $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| \leqslant M, \quad |b_n| \leqslant M,$$

т. е. последовательности координат $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ также ограничены. Согласно теореме Больцано — Вейерштрасса для числовых последовательностей, из последовательности $\{a_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$. Поскольку соответствующая ей подпоследовательность $\{b_{n_k}\}$ также ограничена, то, согласно упомянутой выше теореме, снова можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$\{b_{n_{k_s}}\}$. Соответствующая же ей подпоследовательность $\{a_{n_{k_s}}\}$ является подпоследовательностью сходящейся подпос едовательности $\{a_{n_k}\}$, а поэтому сама сходится. Таким образом, обе подпоследовательности $\{a_{n_{k_s}}\}$ и $\{b_{n_{k_s}}\}$ координат точек $\{x_{n_{k_s}}\}$ являются сходящимися, а поэтому и подпоследовательность $\{x_{n_{k_s}}\}$ сходится. ▶

Определение 2. *Множество точек*

$$\mathcal{J} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : a_i < x_i < b_i, \quad i = \overline{1, m}\}$$

называется открытым m-мерным параллелепипедом, а множество точек

$$\bar{\mathcal{J}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \quad i = \overline{1, m}\}$$

— замкнутым m-мерным параллелепипедом.

Определение 3. *Параллелепипед $\bar{\mathcal{J}}_2$ называется вложенным в параллелепипед $\bar{\mathcal{J}}_1$, если $\bar{\mathcal{J}}_1 \supset \bar{\mathcal{J}}_2$.*

Ясно, что в этом случае

$$[a_{i1}, b_{i1}] \supset [a_{i2}, b_{i2}], \quad i = \overline{1, m}.$$

Теорема 5. *Последовательность вложенных замкнутых параллелепипедов из $\mathbb{R}^m$*

$$\bar{\mathcal{J}}_1 \supset \bar{\mathcal{J}}_2 \supset \cdots \supset \bar{\mathcal{J}}_n \supset \cdots,$$

диаметры которых

$$\lambda_n = \left(\sum_{i=1}^{m} (b_{in} - a_{in})^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

стремятся к нулю при $n \to \infty$, имеют единственную общую точку

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m).$$

◀ Ес и $\lambda_n = \left(\sum_{i=1}^{m} (b_{in} - a_{in})^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$ при $n \to \infty$, то и $b_{in} - a_{in} \to 0$ при $n \to \infty$, $i = \overline{1, m}$. Поскольку для каждого i последовательность сегментов $\{[a_{in}, b_{in}]\}$ из $\mathbb{R}$ является вложенной и длины их стремятся к нулю при $n \to \infty$, то для каждого i существует единственная точка $\xi_i \in [a_{in}, b_{in}] \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, m}$. Но тогда $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, $\xi \subset \bar{\mathcal{J}}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. ▶

Теперь рассмотрим теоремы о сходимости последовательностей векторного пространства $\mathfrak{M}$, элементами которого являются матрицы. Предположим, что матрицы, входящие в $\mathfrak{M}$, имеют размеры $m \times n$. При рассмотрении произведений матриц их размеры предполагаются такими, чтобы эта операция имела смысл.

Множество $\mathfrak{M}$ представляет собой векторное нормированное пространство, следовательно, в нем введена операция сложения и умножения на скаляры поля $\mathbb{K}$. Предположим, что $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, т. е. что поле $\mathbb{K}$ является полем действительных чисел и что элементы матриц являются действительными числами.

Далее, с помощью матрицы $A \in \mathfrak{M}$ можно задать отображение

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax,$$

где

$$Ax = (a_{ij})\,x = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix},$$

x_j, $j = \overline{1,\ n}$,— координаты вектора x. Это, в свою очередь, приводит к необходимости рассматривать предельный переход в произведении матрицы на вектор.

Пусть $\{A_k\}$ — последовательность элементов пространства $\mathfrak{M}$, которые являются прямоугольными матрицами

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\ a_{m1}^{(k)} & a_{m2}^{(k)} & \dots & a_{mn}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Такие матрицы в дальнейшем обозначим $A_k = (a_{ij}^{(k)})$, а для указания размеров матрицы множества индексов ij запишем в виде $i = \overline{1,\ m}$, $j = \overline{1,\ n}$.

Теорема 6. *Пусть*

$$A_k = (a_{ij}^{(k)}),\ A_k \subset \mathfrak{M},\ k \in \mathbb{N},$$

где $\mathfrak{M}$ — метрическое пространство, элементами которого являются матрицы размера $m \times n$.

а) *Для сходимости последовательности $\{A_k\}$ к матрице $A = (a_{ij})$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}, \quad i = \overline{1,\ m}, \quad j = \overline{1,\ n}. \tag{3}$$

б) *Если последовательности матриц*

$$A_k = (a_{ij}^{(k)}), \quad B_k = (b_{ij}^{(k)}), \quad i = \overline{1,\ m}, \quad j = \overline{1,\ n}, \quad k \in \mathbb{N},$$

сходятся и

$$A_k \to A = (a_{ij}), \quad B_k \to B = (b_{ij}) \quad \textit{при}\ k \to \infty,$$

то

$$\lim_{k\to\infty} (A_k + B_k) = A + B. \tag{4}$$

в) *Пусть*

$$A_k = (a_{ij}^{(k)}), \quad B_k = (b_{jl}^{(k)}), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, p},$$

— *последовательности матриц;*

$$C = (c_{ij}), \quad D = (d_{jl}), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, p},$$

— *постоянные матрицы;*

$$\beta_k = \begin{pmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \\ \vdots \\ \beta_{nk} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N},$$

— *последовательность вектор-столбцов;* $\{\alpha_k\}$ — *последовательность действительных чисел.*

Тогда, если существуют пределы

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A = (a_{ij}), \quad \lim_{k\to\infty} B_k = B = (b_{jl}),$$

$$\lim_{k\to\infty} \beta_k = \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \lim_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha, \tag{5}$$

то справедливы равенства

$$\lim_{k\to\infty} A_k B_k = AB, \quad \lim_{k\to\infty} CB_k = CB,$$

$$\lim_{k\to\infty} A_k D = AD, \quad \lim_{k\to\infty} A_k \beta_k = A\beta, \quad \lim_{k\to\infty} \alpha_k A_k = \alpha A. \tag{6}$$

◀ Поскольку пространство $\mathfrak{M}$ матриц размера $m \times n$ отождествляется с пространством $\mathbb{R}^{mn}$, то утверждения а) и б) непосредственно вытекают из теоремы 1.

в) Обозначим

$$A_k B_k = (a_{ij}^{(k)})\,(b_{jl}^{(k)}) = (g_{il}^{(k)}),$$

где $g_{il}^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} b_{jl}^{(k)}$;

$$CB_k = (c_{ij})\,(b_{jl}^{(k)}) = (h_{il}^{(k)}),$$

где $h_{il}^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} b_{jl}^{(k)}$;

$$A_k D = (a_{ij}^{(k)})\,(d_{jl}) = (\xi_{il}^{(k)}),$$

где $\xi_{il}^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} d_{jl}$;

$$A_k \beta_k = \begin{pmatrix} \delta_{1k} \\ \delta_{2k} \\ \vdots \\ \delta_{nk} \end{pmatrix},$$

где $\delta_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \beta_{jk}$;

$$\alpha_k A_k = (\alpha_k a_{ij}^{(k)}).$$

Здесь: $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, p}$, $k \in \mathbb{N}$.

Если соотношения (5) выполняются, то, согласно пункту а) настоящей теоремы, пункту а) теоремы 1 и согласно теореме о предельном переходе в сумме и произведении числовых последовательностей, заключаем, что

$$g_{il}^{(k)} \to \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl}, \quad h_{il}^{(k)} \to \sum_{j=1}^{n} c_{ij} b_{jl},$$

$$\xi_{il}^{(k)} \to \sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_{jl}, \quad \delta_{ik} \to \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \beta_{jk},$$

$$\alpha_k a_{ij}^{(k)} \to \alpha a_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, p}.$$

Пользуясь этими соотношениями на основании тех же пунктов а) настоящей теоремы и теоремы 1, убеждаемся в справедливости равенств (6). ▶

Следствие. *Если последовательность матриц $\{A_k\}$ сходится к матрице A, то для произвольного постоянного вектор-столбца $\beta \in \mathbb{R}^m$ и произвольного постоянного числа $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливы равенства*

$$\lim_{n \to \infty} A_k \beta = A\beta,$$

$$\lim_{n \to \infty} \alpha A_k = \alpha A.$$

◀ Эти равенства непосредственно вытекают из (6), если положить там $\beta_k = \beta$ и $\alpha_k = \alpha$. ▶

Теорема 7. *Для того, чтобы последовательность матриц $\{A_k\}$, $A_k = (a_{ij}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$, была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы фундаментальными были каждая из последовательностей $\{a_{ij}^{(k)}\}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.*

◀ Поскольку пространство $\mathfrak{M}$ можно отождествить с пространством $\mathbb{R}^{mn}$, то это утверждение непосредственно следует из теоремы 2. ▶

Теорема 8 (критерий сходимости последовательности матриц). *Для сходимости последовательности матриц*

$$A_k = (a_{ij}^{(k)}), \quad k \in \mathbb{N},$$

необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

◀ *Необходимость* непосредственно следует из теоремы 1, п. 4.10.

Достаточность. Пространство $\mathfrak{M}$ отождествляется с пространством $\mathbb{R}^{mn}$, поэтому достаточность непосредственно вытекает из теоремы 3. ▶

Следствие. *Если последовательность матриц* $A_k = (a_{ij}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$, *сходится, то*

$$\lim_{k\to\infty} (a_{ij}^{(k)}) = (\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}),$$

более того, для любой последовательности матриц справедливо условие

$$\exists \lim_{k\to\infty} (a_{ij}^{(k)}) \Leftrightarrow (\exists \lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} \quad \forall i = \overline{1, m}, \ \forall j = \overline{1, n}).$$

4.12. Полнота метрического пространства. В метрическом пространстве всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной. Однако обратное утверждение не всегда верно, т. е. не во всяком метрическом пространстве фундаментальная последовательность сходится.

Например, множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел является метрическим пространством, если $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ расстояние между ними определено равенством

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Последовательность $x_n = 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, образованная из рациональных чисел, т. е. из элементов множества $\mathbb{Q}$, является фундаментальной. В самом деле $\forall \varepsilon > 0$ неравенство

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(n+p)!} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

выполняется $\forall n > n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ и $\forall p > 0$. Однако эта последовательность не является сходящейся в множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Эта последовательность сходится в множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ к числу e. Число e иррационально (см. п. 4.4) и, следовательно, не принадлежит множеству $\mathbb{Q}$.

В качестве другого примера рассмотрим метрическое пространство $E = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$, $x, y \in E$. Легко убедиться, что обе последовательности $x_n = \frac{1}{n+1}$ и $y_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, точек метрического пространства E являются фундаментальными и вместе с тем не сходятся в пространстве E. Последовательность $\{x_n\}$ сходится в $\mathbb{R}$ к нулю, а последовательность $\{y_n\}$ сходится в $\mathbb{R}$ к единице. Но поскольку оба предела не принадлежат E, то последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ не сходятся в данном метрическом пространстве E.

Определение 1. *Если в метрическом пространстве E всякая фундаментальная последовательность сходится, то метрическое пространство называется* п о л н ы м.

Соответственно этому, *если в векторном нормированном пространстве E всякая фундаментальная последовательность сходится, то векторное нормированное пространство называется* п о л н ы м.

Таким образом, произвольная фундаментальная последовательность является сходящейся в метрических пространствах: $\mathbb{R}$ (теорема

2, п. 4.10), $\mathbb{R}^m$ (теорема 3, п. 4.11) и $\mathfrak{M}$ (теорема 8, п. 4.11). Эти пространства являются полными.

Следует отметить, что упомянутые выше метрические пространства $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^m$ и $\mathfrak{M}$ являются одновременно и векторными нормированными пространствами с нормами $\rho(x, \theta) = \|x - \theta\| = \|x\|$, где θ — нулевой элемент векторного пространства.

Сходимость $x_n \to x$ при $n \to \infty$ в том смысле, что $\rho(x_n, x) = \|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$ называется *сходимостью по норме* векторного пространства. Следовательно, сходимость в $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^m$ и $\mathfrak{M}$ является сходимостью по соответствующей норме.

Определение 2. *Если векторное нормированное пространство E является полным в смысле сходимости по норме этого пространства, то оно называется пространством Банаха, или B-пространством.*

Пространства $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^m$ и $\mathfrak{M}$ являются B-пространствами, поскольку сходимость в них по норме совпадает со сходимостью по метрике этого пространства, если его рассматривать как метрическое пространство.

4.13. Предел последовательности комплексных чисел. Если расстояние между двумя комплексными числами z и w определим по формуле

$$\rho(z, w) = |z - w|,$$

то этим превратим множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ в метрическое пространство, так как в этом случае, согласно свойствам модуля комплексного числа (п. 10.3, гл. I), все аксиомы метрики (п. 2.1) будут выполнены. Далее, сложение (соответственно умножение) комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ производится по формуле (1) (соответственно (2)), п. 10.1, гл. I. Если действительное число λ представить как комплексное число вида $z_2 = (\lambda, 0)$, то по упомянутой формуле комплексных чисел получаем

$$\lambda z_1 = (\lambda x_1, \lambda y_1).$$

Таким образом, в множестве $\mathbb{C}$ введены внутренняя бинарная операция $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — сложение комплексных чисел, и внешняя бинарная операция $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — умножение комплексных чисел на действительное число. Эти две операции удовлетворяют аксиомам векторного пространства, поэтому множество $\mathbb{C}$ является векторным пространством над полем $\mathbb{R}$. А поскольку $\mathbb{C}$ и метрическое пространство, то оно автоматически становится векторным нормированным пространством над полем $\mathbb{R}$ с нормой $\|z\| = |z|$.

Согласно определению 1, п. 4.1, последовательностью $\{z_n\}$ комплексных чисел называется отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{C} : n \mapsto z_n$, а согласно определению 1, п. 4.2, эта последовательность называется *сходящейся*, если

$$\exists z \in \mathbb{C} \wedge \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : \forall n > m \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon.$$

Аналогично определяется несобственный предел в $\mathbb{C}$: последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел называется сходящейся к ∞, если

$$\forall N > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : \forall n > m \Rightarrow |z_n| > N.$$

Здесь отличие от соответствующего определения 1, п. 4.5, заключается в том, что Δ-окрестность ∞ в $\mathbb{R}$ есть дополнение к сегменту $[-\Delta, \Delta]$, а N-окрестность ∞ в $\mathbb{C}$ является дополнением к кругу $|z| \leqslant N$.

Поскольку $\mathbb{C}$ является метрическим пространством, то для последовательностей комплексных чисел справедливы все теоремы о последовательностях элементов метрического пространства. В частности, справедливы теорема 1, п. 4.2, теорема пункта 4.7 и теорема 1, п. 4.10. Кроме того, без изменения формулировки и доказательства для последовательностей комплексных чисел справедлива теорема 2, п. 4.2, и ее следствие.

Всякую последовательность комплексных чисел можно представить в виде

$$z_n = (a_n, b_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

а поэтому, согласно теореме 1, а), п. 4.11, она сходится к точке $z = (a, b)$ тогда и только тогда, когда выполняются соотношения

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Наконец, для последовательностей комплексных чисел справедливы теоремы 2 и 3, п. 4.11, согласно которым пространство $\mathbb{C}$ есть полное векторное нормированное пространство, а следовательно, является пространством Банаха.

Отметим также, что теорема 6, п. 4.11, также остается справедливой, если элементами матриц являются комплексные числа.

Пример. Последовательность

$$z_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1} - in}, \quad n \in \mathbb{N},$$

при $n \to \infty$ сходится к пределу $z = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$.

В самом деле,

$$z_n = \frac{n(\sqrt{n^2+1} + in)}{2n^2+1} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{2+\frac{1}{n^2}} + i\,\frac{1}{2+\frac{1}{n^2}}.$$

Поскольку действительная и мнимая части последовательности $\{z_n\}$ сходятся к $\frac{1}{2}$, то

$$z_n \to \frac{1}{2} + i\frac{1}{2} \text{ при } n \to \infty.$$

§ 5. МНОЖЕСТВА ТОЧЕК В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

5.1. Открытые и замкнутые множества. С понятием предельной точки и окрестности точки в метрическом пространстве E связаны другие важные понятия, которые сейчас рассмотрим.

Определение 1. а) *Множество A называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.*

б) *Точка x называется внутренней точкой множества A, если она принадлежит множеству A вместе с некоторой своей окрестностью.*

в) *Множество A называется открытым, если каждая его точка внутренняя, т. е.* $\forall x \in A \quad \exists \delta > 0 : S(x, \delta) \subset A$.

г) *Совокупность всех предельных точек множества A называется производным множеством и обозначается A'.*

д) *Всякая точка множества A, не являющаяся его предельной, называется изолированной точкой этого множества.*

Из определения открытого множества следует, что само множество E открыто, так как любая его точка принадлежит ему вместе со всякой своей окрестностью.

Пустое множество $\varnothing$ также является открытым. Действительно, множество A открыто, если $\forall x \in A \quad \exists \delta > 0 : S(x, \delta) \subset A$. Если $A = \varnothing$, то найти точку $x \in A$ невозможно, а поэтому указанное свойство выполняется и множество $\varnothing$ открыто.

Существуют части пространства E, не являющиеся ни открытыми, ни замкнутыми. Например, множество $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x < 1\}$ не открыто, так как точка $x = 0$, $x \in A$, не имеет окрестности, принадлежащей A. Это множество и не замкнуто, так как точка $x = 1$ есть предельная точка множества A, поскольку она является пределом последовательности $x_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, составленной из точек множества A, однако $1 \notin A$.

Теорема 1. *Всякая окрестность является открытым множеством.*

◀ Рассмотрим произвольную окрестность $S(x_0, \delta)$ точки x_0. Пусть $\forall x \in S(x_0, \delta)$; покажем, что $S(x_1, \delta - \rho(x_1, x_0)) \subset S(x_0, \delta)$.

В самом деле, если $x \in S(x_1, \delta - \rho(x_1, x_0))$, то $\rho(x, x_1) < \delta - \rho(x_1, x_0)$ и, согласно неравенству треугольника, $\rho(x, x_0) \leqslant \rho(x, x_1) + \rho(x_1, x_0) < \delta - \rho(x_1, x_0) + \rho(x_1, x_0) = \delta$. ▶

Теорема 2. *Замкнутый шар является замкнутым множеством.*

◀ Пусть $\bar{x}$ — предельная точка замкнутого шара $\overline{S}(x_0, \delta)$. Тогда существует последовательность $\{x_n\}$ точек шара $\overline{S}(x_0, \delta)$, отличных от $\bar{x}$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ (теорема п. 4.7). Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$ такое, что $\forall n > N$

$$\rho(x_n, \bar{x}) < \varepsilon. \tag{1}$$

Пользуясь этим неравенством и неравенством (1), п. 2.1, находим

$$|\rho(x_n, x_0) - \rho(\bar{x}, x_0)| \leqslant \rho(x_n, \bar{x}) < \varepsilon \quad \forall n > N.$$

Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = \rho(\bar{x}, x_0)$.

Отсюда и из неравенства $\rho(x_n, x_0) \leqslant \delta$, $x_n \in \overline{S}(x_0, \delta)$, получаем неравенство $\rho(\bar{x}, x_0) \leqslant \delta$, т. е. $\bar{x} \in \overline{S}(x_0, \delta)$ и, следовательно, замкнутый шар — замкнутое множество. ▶

Теорема 3. *Для того чтобы множество A было открытым, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение CA было замкнутым.*

◀ Пусть CA замкнуто и $x \in A$. Тогда $x \notin CA$ и, следовательно, x не может быть предельной точкой множества CA, так как CA содержит все свои предельные точки. Но тогда существует такая окрестность $S(x, \delta)$, что $S(x, \delta) \cap CA = \varnothing$, т. е. $S(x, \delta) \subset A$. Следовательно, x — внутренняя точка множества A, т. е. A открыто.

Пусть A — открытое множество. Тогда всякая предельная точка множества CA не может принадлежать A, так как все точки множества A принадлежат ему вместе с некоторыми своими окрестностями и, следовательно, не могут быть предельными для CA. Значит множество CA содержит все свои предельные точки, а поэтому замкнуто. ▶

Следствие. *Множество A замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение CA открыто.*

Само пространство E и пустое множество $\varnothing$ замкнуты.

Теорема 4. а) *Объединение любого множества открытых множеств и пересечение конечного множества открытых множеств есть открытое множество.*

б) *Объединение конечного множества замкнутых множеств и пересечение произвольного множества замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

◀ а) Докажем, что множество $G = \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$ открыто, если $\forall \alpha$ G_α — открыто.

Действительно, если $x \in G$, то $\exists\, \alpha$ такое, что $x \in G_\alpha$; и так как G_α открыто, то $x \in G_\alpha$ вместе с некоторой окрестностью $S(x, \delta) \subset G_\alpha$. Но тогда $S(x, \delta) \subset G$ и G — открытое множество.

Докажем теперь, что множество $D = \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ открыто, если множества G_i, $i = \overline{1, n}$, открыты.

В самом деле, $\forall\, x \in D$ $\exists\, \delta_i \in \mathbb{R}$ такое, что $S(x, \delta_i) \subset G_i$, $i = \overline{1, n}$. Обозначим $\delta = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\delta_i\}$; тогда $S(x, \delta) \subset G_i$, $i = \overline{1, n}$, так что $S(x, \delta) \subset D$ и множество D открыто.

б) Пусть F_i, $i = \overline{1, n}$,— замкнутые множества. Переходя к дополнениям (см. равенства (8), п. 1.2, гл. I), получаем

$$C \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcap_{i=1}^{n} CF_i. \tag{2}$$

Если множества F_i замкнуты, то множества CF_i открыты и множество $\bigcap\limits_{i=1}^{n} CF_i$ открыто в силу доказанного в пункте а). Но тогда, согласно (2), множество $C \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ открыто и, следовательно, согласно теореме 3, множество $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ замкнуто.

Покажем, что множество $\bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha$ замкнуто, если множества F_α замкнуты при любом α.

Согласно равенствам (8), п. 1.2, гл. I, имеем

$$C \bigcap_{\alpha} F_\alpha = \bigcup_{\alpha} CF_\alpha. \tag{3}$$

Так как множества F_α замкнуты, то множества CF_α открыты и, согласно а), $\bigcup\limits_{\alpha} CF_\alpha$— открытое множество, так что из (3) вытекает, что $C \bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha$ открыто. А тогда, согласно теореме 3, множество $\bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha$ замкнуто. ▶

Пусть E метрическое пространство и $A \subset E$. Метрическое подпространство определено как часть A пространства E с той же метрикой, что и в пространстве E.

Например, в метрическом пространстве $\mathbb{R}^3$ с метрикой

$$\rho : ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

плоскость $\mathbb{R}^2$ является метрическим подпространством, с метрикой, индуцированной метрикой пространства $\mathbb{R}^3$. Сужение функции расстояния, определенной в $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ на множество $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, очевидно, является функция

$$\rho : ((x_1, x_2, 0), (y_1, y_2, 0)) \mapsto \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Естественно, что окрестности в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$ разные; отсюда разные и топологические свойства множеств этих пространств.

Пусть $G \subset A \subset E$, где E — метрическое пространство. То, что G— открытое множество метрического пространства E, означает, что $\forall\, x \in G \;\; \exists\, \delta \in \mathbb{R}$ такое, что

$$S(x, \delta) \subset E \Rightarrow S(x, \delta) \subset G.$$

Однако множество A также является метрическим подпространством, а множество G — его частью. Поэтому можно говорить о свойстве множества G быть открытым относительно метрического пространства A. Для полной ясности будем говорить, что множество является открытым множеством относительно A, если $\forall\, x \in G \;\; \exists\, \delta \in \mathbb{R}$ такое, что

$$S(x, \delta) \subset A \Rightarrow S(x, \delta) \subset G.$$

Множество G, открытое относительно A, может не быть открытым относительно E. В качестве примера рассмотрим плоскость. На плоскости возьмем прямую, а на прямой интервал. Тогда интервал — открытое множество относительно прямой и не является открытым относительно плоскости.

Теорема 5. *Пусть $G \subset Y \subset E$. Множество G открыто относительно Y тогда и только тогда, когда $G = Y \cap D$ для некоторого открытого подмножества D метрического пространства E.*

◀ *Необходимость.* Пусть G открыто относительно Y. Тогда $\forall\, x \in G$ $\exists\, \delta_x$ такое, что из $S(x, \delta_x) \subset Y$ следует включение $S(x, \delta_x) \subset G$. Пусть $s_x = \{y \in E : \rho(x, y) < \delta_x\}$. Множество S_x является шаром в E радиуса δ_x с центром в точке x; поэтому S_x — открытое множество относительно E. Согласно теореме 4. а), множество

$$D = \bigcup_{x \in G} S_x$$

открыто относительно E.

Так как $x \in S_x \quad \forall x \in G$, то

$$G \subset (D \cap Y). \tag{4}$$

По построению $(S_x \cap Y) \subset G$ при $\forall x \in G$, так что

$$(D \cap Y) \subset G. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что $G = D \cap Y$.

Достаточность. Пусть D — открытое множество относительно E и $G = D \cap Y$. Тогда $\forall x \in G$ существует окрестность $S_x \subset D$. Значит $S_x \cap Y \subset G$ и, следовательно, множество G открытое относительно Y. ▶

5.2. Внутренность и внешность множества. Пусть множество A является частью метрического пространства E.

Определение 1. *Внутренностью множества A называется объединение всех открытых частей метрического пространства E, содержащегося в множестве A.*

Внутренность множества A обозначают $\operatorname{int} A$ [1]. Поскольку внутренность множества A является объединением открытых множеств, то, согласно теореме 4. а), п. 5.1, $\operatorname{int} A$ есть открытое множество.

Теорема 1. *Множество $B \subset E$ является внутренностью множества $A \subset E$ тогда и только тогда, когда оно состоит из точек множества E, каждая из которых является центром хотя бы одного шара, содержащегося в множестве A.*

◀ Действительно, пусть $a \in B$ является центром некоторого шара $S(a, \delta)$, $S(a, \delta) \subset A$. Поскольку шар $S(a, \delta)$ — открытое множество (теорема 1, п. 5.1), то $S(a, \delta) \subset \operatorname{int} A$, а следовательно, и $a \in \operatorname{int} A$.

Обратно, пусть $a \in \operatorname{int} A$. Поскольку $\operatorname{int} A$ — открытое множество, то для любой точки $a \in \operatorname{int} A$ существует открытый шар $S(a, \delta)$ с центром в точке a, содержащейся в $\operatorname{int} A$. ▶

Например, внутренностью замкнутого шара $S(a, r)$ является открытый шар $S(a, r)$. Внутренность множества A может быть пустым множеством, например, пусть $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$. Тогда $\operatorname{int} A = \varnothing$. Действительно, пусть a — произвольная точка множества $\mathbb{Q}$. Всякий шар $S(a, \delta) \subset \mathbb{R}$ (интервал длины 2δ с центром в точке a) содержит иррациональные точки, поэтому $S(a, \delta) \not\subset \mathbb{Q}$; но тогда $a \notin \operatorname{int} \mathbb{Q}$ и $\operatorname{int} \mathbb{Q} = \varnothing$.

Определение 2. *Внешностью множества A называется внутренность его дополнения, т. е.* $\operatorname{int} CA$.

Внешность множества A состоит из всех точек пространства E, каждая из которых является центром шара, не пересекающегося с множеством A. Из определения внешности множества следует, что внешность множества A является открытым множеством. Внутренность и внешность множеств, очевидно, не пересекаются.

Определение 3. *Множество точек метрического пространства E, не принадлежащее ни внутренности, ни внешности множества A, называется границей этого множества.*

---

[1] От французского слова interieur — внутренний.

Например, границей замкнутого шара $S(O, r) \subset \mathbb{R}^3$ является сфера, т. е. множество $\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$. Граница сегмента $[a, b]$ состоит из двух точек a и b.

Поскольку дополнением к границе является объединение двух открытых множеств (внешности и внутренности), то граница множества A является замкнутым множеством. Границу множества A будем обозначать символами L_A, l_A, λ_A, ∂A и т. д., причем индекс A опускаем, если из контекста ясно о границе какого множества идет речь.

Теорема 2. *Точка $a \in E$ принадлежит границе L_A тогда и только тогда, когда любая окрестность точки a содержит как точки множества A, так и точки дополнения CA.*

◀ Пусть точка $a \in L_A$ и $S(a, \delta)$ ее окрестность. Покажем, что окрестность точки a одновременно пересекается как с множеством A, так и с его дополнением CA. В самом деле, окрестность $S(a, \delta)$ пересекается с множеством A, так как в противном случае она принадлежала бы CA и тогда точка a принадлежала бы внешности множества A. Точно также окрестность $S(a, \delta)$ пересекается с CA ибо в противном случае она принадлежала бы множеству A, и, следовательно, точка a принадлежала бы внутренности множества A.

Обратно, если любая окрестность $S(a, \delta)$ точки a пересекается одновременно как с множеством A, так и с его дополнением CA, то она не содержится ни в одном из них. Но тогда точка a не принадлежит ни внутренности, ни внешности множества и, следовательно, принадлежит L_A. ▶

Внутренность, внешность и граница множества A попарно не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством E.

Определение 4. *Замыканием множества A называется пересечение всех замкнутых частей множества E, содержащих A.*

Замыкание множества A обозначается $\bar{A}$.

Поскольку замыкание $\bar{A}$ является пересечением замкнутых множеств, то, согласно теореме 4. б), п. 5.1, оно замкнуто. Замыкание множества A — это наименьшая замкнутая часть множества E, содержащая A. Все точки замыкания являются предельными точками множества A.

Теорема 3. *Замыкание множества A является объединением его внутренности и границы.*

◀ Замыкание $\bar{A}$ множества A является наименьшей замкнутой частью, содержащей A. Поэтому дополнение CA множества A является наибольшей открытой частью множества E, содержащейся в $C\bar{A}$. Другими словами, $C\bar{A}$ является внешностью множества A, а это означает, что $\bar{A} = L_A \cup \operatorname{int} A$. ▶

Из теорем этого параграфа следуют такие утверждения:

1. *Часть A метрического пространства E открыта тогда и только тогда, когда она совпадает со своей внутренностью.*

2. *Часть A метрического пространства E замкнута тогда и только тогда, когда она совпадает со своим замыканием.*

Возвращаясь к приведенному выше примеру: $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$,

покажем, что $L_{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Действительно, пусть $\forall\, a \in \mathbb{R}$. Всякая окрестность $S(a, \delta)$ содержит как точки множества A, так и точки, не принадлежащие A, поэтому $a \in L_{\mathbb{Q}}$. Далее, поскольку $\operatorname{int} \mathbb{Q} = \varnothing$, то $\overline{\mathbb{Q}} = L_{\mathbb{Q}} \cup \varnothing = \mathbb{R}$.

5.3. Плотные множества.

Определение 1. *Множество A называется совершенным, если оно замкнуто и каждая его точка является предельной точкой этого множества.*

Например, множество точек замкнутого шара $\bar{S}(a, \delta) \subset \mathbb{R}^3$ или множество точек сегмента $[a, b]$ — совершенные множества.

Определение 2. *Множество A точек метрического пространства E называется плотным в множестве $M \subset E$, если каждая точка множества M является либо предельной точкой множества A, либо принадлежит множеству A (либо и то и другое). Множество A, плотное в самом пространстве E, называется всюду плотным.*

Например, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$.

Определение 3. *Метрическое пространство E называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное множество.*

Например, числовая прямая $\mathbb{R}$ является сепарабельным метрическим пространством.

Приведем пример не сепарабельного метрического пространства.

Пусть $E = m$, где m — множество всех ограниченных последовательностей

$$x = \{a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots\}.$$

Для любых двух элементов $x = \{a_i\}$ и $y = \{b_i\}$ множества m полагаем

$$\rho(x, y) = \sup_i |a_i - b_i|.$$

Аксиомы метрики проверяются без труда. Следовательно, множество m является метрическим пространством.

Покажем, что метрическое пространство m не сепарабельно. Действительно, рассмотрим в множестве m элементы вида $\tilde{x} = \{a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots\}$, где a_i равно нулю или единице. Множество всех таких элементов имеет мощность континуума (см. п. 12.3, гл. I). Если $\tilde{x} = \{a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots\}$, $\tilde{y} = \{b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots\}$ — два разных элемента, то $\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sup_i |a_i - b_i| = 1$. Если бы в пространстве m существовало счетное всюду плотное множество $m_0 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, то поскольку $\forall\, x \in m\ \exists\, x_n \in m_0 : \rho(x, x_n) < \frac{1}{3}$, то все пространство m содержалось бы целиком в шаре $S\left(x_n, \frac{1}{3}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Так как шаров счетное множество, а элементов $\tilde{x}$ множество континуума, то хотя бы один шар содержит более чем один элемент вида $\tilde{x}$. Но это невозможно, так как расстояние между

двумя такими элементами равно единице, в то время как диаметр шара меньше единицы.

Определение 4. *Множество A метрического пространства E называется нигде не плотным, если в любом шаре $S(a, R) \subset E$ $\exists S(b, r)$, $S(b, r) \subset S(a, R)$, не содержащий ни одной точки множества A.*

Например, множество $\mathbb{N}$ является нигде не плотным в $\mathbb{R}$.

5.4. Компактные множества.

Определение 1. *Открытым покрытием множества A в метрическом пространстве E называется семейство $\{G_\alpha\}$ открытых подмножеств пространства E, объединение которых содержит множество A.*

Определение 2. *Подмножество K метрического пространства E называется компактным, если из любого открытого покрытия множества K можно выделить конечное подпокрытие.*

Другими словами, *если $\{G_\alpha\}$ — открытое покрытие множества K, то существует конечное число таких множеств $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \ldots, G_{\alpha_n}$, что* $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$.

Из определения вытекает, что каждое конечное множество компактно.

Из примера, приведенного в предыдущем пункте, следует, что если $G \subset A \subset E$, то множество G может быть открытым относительно A, не будучи таковым относительно объемлющего его пространства E.

Пусть $K \subset A \subset E$, где E метрическое пространство; ясно, что тогда A можно рассматривать как самостоятельное метрическое пространство с метрикой, индуцированной метрикой пространства E. Тогда, как будет установлено ниже, свойство компактности множества K в пространствах A и E совпадает.

Теорема 1. *Пусть $K \subset A \subset E$. Множество K компактно относительно E тогда и только тогда, когда оно компактно относительно A.*

◀ Пусть множество K компактно относительно E, а $\{V_\alpha\}$ — такое семейство множеств, открытых относительно A, что $K \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$. По теореме 5, п. 5.1, $\forall \alpha$ $\exists D_\alpha$ открытое относительно E, что $V_\alpha = A \cap D_\alpha$. Так как K компактно относительно E, то существует конечная система множеств $D_{\alpha_1}, D_{\alpha_2}, \ldots, D_{\alpha_n}$, покрывающая K, т. е.

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_{\alpha_i}. \tag{1}$$

Из включений $K \subset A$ и (1) вытекает, что

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}. \tag{2}$$

Этим самым доказали, что K компактно относительно A.

Пусть теперь K компактно относительно A, а $\{D_\alpha\}$ — семейство открытых множеств пространства E, покрывающее K. Положим $V_\alpha = A \cap D_\alpha$. По теореме 5, п. 5.1, множества V_α открыты относительно A. Так как по предположению множество K компактно относитель-

но A, то существует такая конечная система $V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \ldots, V_{\alpha_n}$ множеств, открытых относительно A, что справедливо включение (2). Из (2) и того, что $V_\alpha \subset D_\alpha$, следует (1), т. е. K компактно относительно A. ▶

Теорема 2. *Компактное подмножество K метрического пространства E замкнуто.*

◀ Пусть x — произвольная точка метрического пространства E, не принадлежащая K. Достаточно показать, что она является внутренней точкой множества CK; тогда CK открыто и, следовательно, K замкнуто.

Для произвольной точки $y \in K$ строим две окрестности $V_y(x, r)$ и $S(y, r)$ радиуса $r < \frac{1}{2}\rho(x, y)$. Ясно, что $K \subset \bigcup\limits_{y \in K} S(y, r)$. Поскольку K компактно, то существует конечное число таких точек $y_1, y_2, \ldots, y_n \in K$, что $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} S(y_i, r) = S$. Обозначим $V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{y_i}(x, r)$. Множество V является окрестностью точки x и так как $V_y(x, r) \cap S(y, r) \neq \varnothing$, то $V \cap S \neq \varnothing$. Следовательно, $V \subset CK$, т. е. x — внутренняя точка множества CK. ▶

Теорема 3. *Замкнутые подмножества компактных множеств компактны.*

◀ Пусть $F \subset K \subset E$, где F — замкнуто относительно E, а K — компактно.

Если $\{V_\alpha\}$ — открытое покрытие множества F, то семейство $\{V_\alpha\}$ вместе с CF покрывает K, т. е. $K \subset (\bigcup\limits_{\alpha} V_\alpha) \cup CF = \Omega$. А так как K компактно, то существует конечное подсемейство $\Phi \subset \Omega$, покрывающее K, а значит, и F. Если $CF \subset \Phi$, то, поскольку $CF \cap F = \varnothing$, можем исключить его из Φ. В результате получим конечное подсемейство открытых множеств из $\{V_\alpha\}$, покрывающее F. Таким образом, F компактно. ▶

Теорема 4. *Если $\{K_\alpha\}$ — семейство компактных подмножеств метрического пространства E, то множество $\bigcap\limits_{\alpha} K_\alpha$ непусто, если непусто пересечение любого конечного подсемейства из $\{K_\alpha\}$.*

◀ Предположим противоположное, т. е. что $\bigcap\limits_{\alpha} K_\alpha = \varnothing$. Тогда существует множество K_β, в котором нет точки, принадлежащей всем множествам K_α. Обозначим $G_\alpha = CK_\alpha$. Согласно предположению, $K_\beta \not\subset \bigcap\limits_{\alpha} K_\alpha$, но тогда (см. равенства (8), п. 1.2, гл. I)

$$K_\beta \subset C \bigcap_{\alpha} K_\alpha = \bigcup_{\alpha} CK_\alpha = \bigcup_{\alpha} G_\alpha.$$

А так как K_β компактно, то найдется конечное подсемейство $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \ldots, G_{\alpha_n}$, что $K_\beta \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$. Но тогда (см. равенства (8), п. 1. 2, гл. I) $K_\beta \not\subset C \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} = C \bigcup\limits_{i=1}^{n} CK_{\alpha_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} CCK_{\alpha_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} K_{\alpha_i}$ и

пересечение

$$K_\beta \cap K_{\alpha_1} \cap \ldots \cap K_{\alpha_n}$$

пусто, что противоречит условию теоремы. ▶

Теорема 5. *Всякое бесконечное множество F компактного множества K имеет предельную точку, принадлежащую K.*

◀ Если множество K не содержит предельной точки множества F, то $\forall x \in K \quad \exists r \in \mathbb{R}$, что окрестность $S(x, r)$ содержит не более одной точки множества F, а именно точку x, если $x \in F$. Ясно, что $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} S(x, r)$ и что никакое конечное подсемейство семейства $\{S(x, r)\}$ не покрывает F, а поскольку $F \subset K$, то не покрывает и K. А это противоречит компактности множества K. ▶

Теорема 6. *Любой m-мерный сегмент компактный.*

◀ Пусть $\bar{\mathcal{I}} = \{x \in \mathbb{R}^m : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \quad i = \overline{1, m}\}$. Положим $\delta = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} (b_i - a_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$; тогда $|x - y| < \delta \quad \forall x, y \in \bar{\mathcal{I}}$.

Предположим, вопреки утверждению, что существует открытое покрытие $\{G_\mu\}$ множества $\bar{\mathcal{I}}$, не содержащее конечного подпокрытия. Каждый из сегментов $[a_i, b_i]$ разделим пополам. В результате сегмент $\bar{\mathcal{I}}$ разделится на 2^m m-мерных сегмента $\bar{\mathcal{I}}_i$. Обозначим через $\bar{\mathcal{I}}_1$ тот из m-мерных сегментов $\bar{\mathcal{I}}_i$, $i = \overline{1, 2^m}$, который не может быть покрыт никаким конечным подсемейством семейства $\{G_\mu\}$. Такой m-мерный сегмент существует, так как в противном случае весь m-мерный сегмент $\bar{\mathcal{I}}$ допускал бы конечное покрытие. После этого разобъем m-мерный сегмент $\bar{\mathcal{I}}_1$ и т. д.

Неограниченно продолжая этот процесс, получим последовательность таких сегментов $\{\bar{\mathcal{I}}_n\}$, что:

а) $\bar{\mathcal{I}} \supset \bar{\mathcal{I}}_1 \supset \ldots \supset \bar{\mathcal{I}}_n \supset \ldots$;

б) $\bar{\mathcal{I}}_n$, $n \in \mathbb{N}$, не покрывается никакой конечной подсистемой семейства $\{G_\mu\}$;

в) $|x - y| < 2^{-n}\delta$.

Из а) и в) следует, что существует точка $\xi \subset \bar{\mathcal{I}}$, принадлежащая всем сегментам $\bar{\mathcal{I}}_n$, $n \in \mathbb{N}$. При некотором μ имеем $\xi \in G_\mu$. Так как G_μ открыто, то $\exists r \in \mathbb{R}$ такое, что если $|x - \xi| < r$, то $x \in G_\mu$. Выберем n так, чтобы $2^{-n}\delta < r$. Тогда из в) следует, что $\bar{\mathcal{I}}_n \subset G_\mu$, а это противоречит б). ▶

Теорема 7. *Следующие свойства множества $K \subset \mathbb{R}^m$ эквивалентны:*

а) *K ограничено и замкнуто;*

б) *K компактно;*

в) *каждое бесконечное подмножество множества K имеет предельную точку, принадлежащую K.*

◀ Если а) выполнено, то существует такой m-мерный сегмент $\bar{\mathcal{I}}$, что $K \subset \bar{\mathcal{I}}$. Тогда условие б) следует из теорем 6 и 3. На основании тео-

ремы 5 условие в) вытекает из условия б). Остается доказать, что из в) следует а).

Предположим, что множество K не ограничено и при этом выполняется условие в). Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in K$ такое, что $|x_n| > n$, $n \in \mathbb{N}$. Множество $\{x_n\}$ бесконечно и не имеет предельных точек в $\mathbb{R}^m$, а тем самым и в K, что противоречит в). Следовательно, множество K ограничено. Если же K не замкнуто, то существует точка $x_0 \in \mathbb{R}^m$, являющаяся предельной точкой множества K и не принадлежащая K. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in K$ такое, что $x_n \in S\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$. В результате получим бесконечное множество $\{x_n\}$ с предельной точкой $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \notin K$. Покажем, что в $\mathbb{R}^m$ нет других предельных точек множества $\{x_n\}$. В самом деле, если $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $x \neq x_0$, то $\exists n_0$ такое, что $\forall n > n_0$ справедлива цепочка неравенств

$$|x_n - x| \geqslant |x_0 - x| - |x_n - x_0| > |x_0 - x| - \frac{1}{n} > \frac{1}{2}|x_0 - x|.$$

Эти неравенства показывают, что x не является предельной точкой множества $\{x_n\}$, вопреки условию в). Следовательно, K замкнуто. ▶

Утверждение об эквивалентности свойств а) и б) известно под названием теоремы Гейне — Бореля. Поскольку теорема Гейне — Бореля имеет самостоятельное применение, то приведем ее полную формулировку.

Теорема 8 (Гейне — Бореля). *Если система $S = S(\Delta)$ открытых множеств Δ покрывает ограниченное замкнутое множество D, то из этой системы можно выделить конечную систему*

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots,$$

также покрывающую D.

5.5. Связные множества. Интуитивно ясно, что некоторые метрические пространства можно рассматривать как нечто сплошное, целое. Например, шар в $\mathbb{R}^m$ или интервал в $\mathbb{R}$. В то же время существуют метрические пространства, состоящие из различных множеств; например, два непересекающихся шара в $\mathbb{R}^m$ или два интервала в $\mathbb{R}$ без общих точек.

Определение 1. *Метрическое пространство E называется связным, если его невозможно разбить на две непересекающие открытые части, или, что то же самое, на две непересекающиеся замкнутые части, или, иначе, если в E не существует одновременно открытых и замкнутых подмножеств, кроме самого пространства E и его пустого множества $\varnothing$.*

Эти определения эквивалентны, так как дополнение открытого множества замкнуто, а дополнение замкнутого множества открыто.

Свойство связности множества является внутренним свойством самого метрического пространства и не зависит от объемлющего его пространства. Однако считают, что D является связной частью E, если D, рассматриваемое как самостоятельное метрическое пространство с индуцированной метрикой, связно.

Теорема. *Часть E расширенной действительной прямой $\overline{\mathbb{R}}$ связна тогда и только тогда, когда она является интервалом, полуинтервалом или сегментом.*

◀ *Необходимость.* Пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ и E связно, а x и y — любые различные точки множества E. Покажем, что сегмент $[x, y] \subset E$. Если бы это было не так, то существовала бы точка $z \in]a, b[$ и $z \notin E$. В этом случае открытые в $\overline{\mathbb{R}}$ множества $]-\infty, z[$ и $]z, +\infty[$, пересекаясь с E, делили бы E на два открытых непересекающих множества, а значит, E не было бы связным. Следовательно, $[x, y] \subset E$. Обозначим $a = \sup E$, $b = \inf E$. Тогда, как только что убедились, множество E совпадает с одним из четырех множеств:

$$[a, b], \quad [a, b[, \quad]a, b], \quad]a, b[.$$

Достаточность. Пусть множество E является одним из множеств

$$[a, b], \quad [a, b[, \quad]a, b], \quad]a, b[.$$

Пусть, далее, A — некоторое непустое подмножество множества E, одновременно открытое и замкнутое в E. Для доказательства связности достаточно показать, что $A = E$.

Пусть c — некоторая точка множества A. Обозначим $H = \{x \in E : [c, x] \subset A\}$, $\gamma = \sup H$ в $\overline{\mathbb{R}}$. Для произвольного γ', удовлетворяющего условию $c < \gamma' < \gamma$ $\exists\, x \in H$ такое, что $\gamma' < x < \gamma$. Следовательно, $\gamma' \in A$ и $[c, \gamma'] \subset A$. Поскольку A замкнуто, то $\gamma \in A$ и $[c, \gamma] \subset A$, кроме случая, когда $\gamma = b$ и $b \notin E$. Если же $\gamma < b$, то в силу того, что A открыто, существовал бы такой элемент $\gamma'' > \gamma$, что $[\gamma, \gamma''] \subset A$, а следовательно, $[c, \gamma''] \subset A$ и $\gamma'' \in H$, что противоречит определению числа γ. Поэтому $\gamma = b$, $[c, b] \subset A$ и, кроме того, $b \in A$, если $b \in E$.

Повторяя аналогичные рассуждения для точки a, лежащей слева от c, получим, что $]a, c] \subset A$ и $a \in A$, если $a \in E$.

Таким образом, получаем, что $A = E$ и, следовательно, E связно. ▶

Определение 2. *Открытое связное множество называется областью.*

Определение 3. *Область вместе со своей границей называется замкнутой областью.*

§ 6. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

6.1. Определение предела функции одной переменной. Первоначальное понятие функции и связанные с ним другие понятия рассмотрены в предыдущих параграфах. В § 4 рассмотрена операция предельного перехода в множествах последовательностей, т. е. в множествах функций вида $\mathbb{N} \to E : n \mapsto x_n$, где E — метрическое или векторное нормированное пространство, например, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^m$ или $\mathfrak{M}$. Независимым переменным при этом являлось натуральное число.

Однако на практике кроме функций натурального аргумента встречаются функции, аргументы которых изменяются в связных множествах. Например, в простейшем случае это может быть интервал изменения времени, пройденного пути, перепад температуры и т. д.

Распространим одну из основных операций математического анализа, а именно — операцию предельного перехода на случай функций, аргументы которых принадлежат множеству более сложной природы, чем множество натуральных чисел.

Пусть $\mathcal{J} =]a, b[$ — интервал числовой прямой, конечный или бесконечный, а функция f определена в каждой точке $\mathcal{J}$, за исключением разве что точки $x_0 \in \mathcal{J}$, т. е. $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ или $f : (\mathcal{J} \setminus \{x_0\}) \to \mathbb{R}$. Этим подчеркнем, что в дальнейшем нас не будет интересовать, определена ли функция f в точке x_0 или нет. Однако точка x_0 будет являться предельной точкой интервала $\mathcal{J}$. Это значит, что всегда можно бесконечным числом способов выделить последовательность $\{x_n\}$ точек интервала $\mathcal{J}$, отличных от x_0, и сходящуюся при $n \to \infty$ к точке x_0 (теорема п. 4.7).

Определение 1 (Г е й н е). *Функция f имеет предельное значение (или имеет предел) при $x \to x_0$ (или в точке x_0), если существует такое число $A \in \mathbb{R}$, что для произвольной последовательности $\{x_n\}$ значений $x \in \mathcal{J} \setminus \{x_0\}$ таких, что*

$$x_n \to x_0 \text{ при } n \to \infty, \tag{1}$$

соответствующая последовательность значений функции сходится к A, т. е.

$$f(x_n) \to A \text{ при } n \to \infty. \tag{2}$$

При этом число A называется *пределом* (или *предельным значением*) функции f при $x \to x_0$ (или в точке x_0), что записываем следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ или } f(x) \to A \text{ при } x \to x_0.$$

Определение 2 (К о ш и). *Функция f имеет предел при $x \to x_0$, если существует число $A \in \mathbb{R}$ и $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x$, удовлетворяющих условию*

$$0 < |x - x_0| < \delta, \tag{3}$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \tag{4}$$

Это же определение можно записать короче: *функция f при $x \to x_0$ имеет предел, если*

$$\exists A \in \mathbb{R} \wedge \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Покажем, что сформулированные определения эквивалентны.

Теорема. *Определения 1 и 2 предельного значения функции эквивалентны.*

◀ Сначала покажем, что если число A является предельным значением функции f в смысле определения 2, то оно является предельным значением f и в смысле определения 1. Пусть выполнены условия определения 2 и для заданного $\varepsilon > 0$ указано такое число δ, что из условия (3) вытекает неравенство (4).

Выделим произвольную последовательность $\{x_n\}$ значений $x \in \mathcal{J} \setminus \{x_0\}$, сходящуюся к точке x_0. Это возможно, так как x_0 —

предельная точка множества $\mathcal{T}$. Далее, выберем n_0 такое, что $\forall\, n > n_0$ имеем $0 < |x_n - x_0| < \delta$; тогда для этих значений n, согласно определению 2, $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, т. е. $f(x_n) \to A$ при $n \to \infty$ для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \in \mathcal{T} \setminus \{x_0\}$, сходящейся при $n \to \infty$ к точке x_0. Таким образом, если функция f имеет предельное значение в смысле определения 2, то она имеет это же предельное значение и в смысле определения 1.

Покажем теперь, что если число A является предельным значением функции f в смысле определения 1, то это же число является предельным значением f и в смысле определения 2. Для доказательства предположим обратное, т. е. что число A является предельным значением функции f в смысле Гейне (определение 1) и не является таковым в смысле Коши (определение 2). В этом случае

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| \geqslant \varepsilon.$$

Пусть $\{\delta_n\}$ — произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся при $n \to \infty$ к нулю. Согласно предположению, $\forall\, n\ \exists\, x_n \in \mathcal{T} \setminus \{x_0\}$ такое, что

$$0 < |x_n - x_0| < \delta_n, \tag{5}$$

причем x_n удовлетворяет неравенству

$$|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon. \tag{6}$$

Из неравенства (5) вытекает, что $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Тогда, согласно определению 1, $f(x_n) \to A$ при $n \to \infty$, что противоречит неравенству (6). ▶

Пример 1. Показать, что функция $f : x \mapsto x^2$ при $x \to 2$ имеет своим предельным значением число 4.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Тогда неравенство

$$|f(x) - 4| = |x^2 - 4| = |(x-2)^2 + 4(x-2)| \leqslant |x-2|^2 + 4|x-2| < \varepsilon$$

выполняется для всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - 2| < \sqrt{4 + \varepsilon} - 2 = \delta.$$

Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ указали число $\delta = \sqrt{4+\varepsilon} - 2$ такое, что из условия $0 < |x-2| < \delta$ вытекает неравенство $|x^2 - 4| < \varepsilon$. А это, согласно определению 2, равносильно тому, что $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

Пример 2. Показать, что функции $x \mapsto \sin\dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \cos\dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, не имеют предельных значений при $x \to 0$.

Действительно, последовательности

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \quad \text{и} \quad y_n = \frac{2}{\pi(1 + 4n)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

сходятся к нулю при $n \to \infty$ и тем самым они удовлетворяют условию (1). Однако при $n \to \infty$ для последовательности $\{x_n\}$

$$\sin\frac{1}{x_n} = \sin n\pi = 0 \to 0,$$

а для последовательности $\{y_n\}$

$$\sin\frac{1}{y_n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \to 1.$$

Таким образом, для функции $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ не выполнено соотношение (2) и, следовательно, она не имеет предельного значения при $x \to 0$.

Если рассмотреть функцию $x \mapsto \cos \frac{1}{x}$, то для последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к нулю, соответствующая последовательность значений функций

$$\cos \frac{1}{x_n} = \cos n\pi = (-1)^n$$

вовсе не имеет предельного значения при $n \to \infty$.

6.2. Односторонние пределы.

Определение 1 (Гейне). *Если существует $A \in \mathbb{R}$ такое, что для произвольной последовательности $\{x_n\}$ значений $x \in]a, x_0[$ ($x \in]x_0, b[$), сходящейся к точке x_0, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений f сходится к A, то число A называется предел слева (справа) или левым (правым) предельным значением функции f в точке x_0.*

Определение 2 (Коши). *Функция f имеет в точке x_0 предел слева (справа), если $\exists A \in \mathbb{R}$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ ($\exists \delta_1 > 0$) такое, что $\forall x$, удовлетворяющих условию*

$$x_0 - \delta < x < x_0 \quad (x_0 < x < x_0 + \delta_1),$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Число A называется левым (правым) пределом (или левым, соответственно, правым предельным значением) функции f в точке x_0 и обозначается

$$f(x_0 - 0) \quad (f(x_0 + 0)) \text{ или } \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \quad (\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)).$$

Определения 1 и 2 эквивалентны, что доказывается так же, как и теорема пункта 6.1.

Теорема. *Функция $f : \mathcal{T} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существуют и равны между собой ее левый и правый пределы.*

◀ Для доказательства будем пользоваться определениями пределов по Коши.

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, тогда, согласно определению 2, п. 6.1, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta$ такое, что $\forall x$, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Отсюда следует, что это же неравенство будет выполняться, если x удовлетворяет только одному из неравенств $x_0 - \delta < x < x_0$ или $x_0 < x < x_0 + \delta$. А это равносильно тому, что существуют пределы слева и справа, причем $A = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Пусть теперь существуют пределы $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_1$, δ_2 такие, что неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ будет выполняться $\forall x$, удовлетворяющих соответствующим неравенствам $x_0 - \delta_1 < x < x_0$ и $x_0 < x < x_0 + \delta_2$. Если

$0 < |x - x_0| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, то оба последних неравенства будут выполнены. Тогда

$$|f(x) - f(x_0 - 0)| < \varepsilon, \quad |f(x) - f(x_0 + 0)| < \varepsilon,$$

и так как левый и правый пределы равны, т. е. $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, то для их общего значения A выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. ▶

В качестве примера рассмотрим функцию $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, определенную равенством $f(x) = [x]$, где $[x]$ — целая часть x, равная наибольшему целому числу, не превосходящему x. Покажем, что в любой точке $x \in \mathbb{R}$ существуют пределы слева и справа.

Пусть сначала $x_0 \in]n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\exists\, \delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $n < x_0 - \delta_1$, $x_0 + \delta_2 < n + 1$. Поэтому $f(x) = n$ $\forall\, x \in]x_0 - \delta_1, x_0[$ и $\forall\, x \in]x_0, x_0 + \delta_2[$. Следовательно, $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = n$.

Пусть теперь $x_0 = n$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и возьмем $\delta \in]0, 1[$. Если $x_0 = n < x < x_0 + \delta$, то $f(x) = n$ и $f(x_0 + 0) = n$; если же $x_0 - \delta < x < x_0 = n$, то $f(x) = n - 1$ и, следовательно, $f(x_0 - 0) = n - 1$.

Таким образом, для $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$ пределы слева и справа всегда существуют, причем для $x_0 \in]n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$, эти пределы совпадают, а для $x_0 = n$ они различны.

Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (или $f:]a, +\infty[\to \mathbb{R}$, или $f:]-\infty, b[\to \mathbb{R}$). Дадим определение предела функции при $x \to \infty$ ($x \to +\infty$, $x \to -\infty$).

Определение 3. *Функция f имеет предел при $x \to \infty$ ($x \to +\infty$, $x \to -\infty$), если $\exists\, A \in \mathbb{R}$ такое, что выполнено одно из следующих эквивалентных условий:*

1) *для произвольной числовой последовательности $\{x_n\}$ значений x из области определения функции, сходящейся к ∞ ($+\infty$, $-\infty$), соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A (определение Гейне);*

2) *для произвольного $\varepsilon > 0$ $\exists\, \Delta > 0$ такое, что $\forall\, x$, удовлетворяющих неравенству $|x| > \Delta$ ($x > \Delta$, $x < -\Delta$), выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ (определение Коши).*

При этом запишем

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \qquad (\lim_{x \to +\infty} f(x) = A, \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = A).$$

Дадим теперь определение предела функции в несобственном смысле, другими словами, определим, как следует понимать записи:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

или, что то же самое,

$$f(x) \to \infty, \quad f(x) \to +\infty, \quad f(x) \to -\infty \text{ при } x \to x_0.$$

Определение 4. *Функция f имеет предел ∞ ($+\infty$, $-\infty$) при $x \to x_0$, если выполнено одно из эквивалентных условий:*

1) *для произвольной числовой последовательности $\{x_n\}$ значений x из области определения функции, сходящейся к x_0, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к ∞ ($+\infty$, $-\infty$) (определение Гейне);*

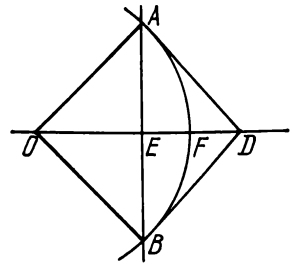


Рис. 12

Найти другой способ доказательства неравенств $2\sin x < 2x < 2\operatorname{tg} x$.

---

2) *для произвольного* $E > 0$ $\exists\, \delta > 0$ *такое, что* $\forall\, x$, *удовлетворяющих условию* $0 < |x - x_0| < \delta$ *выполняется неравенство*

$$|f(x)| > E \quad (f(x) > E, \quad f(x) < -E)$$

(определение Коши).

6.3. Замечательные пределы. Рассмотрим сейчас два предела, играющие важную роль в теории дифференцирования.

1. Покажем, что функция $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, имеет предел при $x \to 0$ и вычислим его.

С этой целью рассмотрим единичный круг (рис. 12). Через x обозначим радианную меру угла AOD. Тогда $|AE| = \sin x$, $|AD| = \operatorname{tg} x$, $\overset{\smile}{AF} = x$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Длина хорды AB меньше длины дуги AFB, а длина этой дуги меньше длины ломаной ADB. Поэтому

$$2\sin x < 2x < 2\operatorname{tg} x.$$

Разделив все части этого неравенства на $2\sin x$, получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Отсюда

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное. Из последних неравенств и полученного ранее соотношения $\sin x < x$ для $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ получаем неравенство

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < |1 - \cos x| < 2\sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2} < \varepsilon,$$

справедливое для $0 < x < \sqrt{2\varepsilon} = \delta$, а это означает, что $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

А поскольку $\lim\limits_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin(-x)}{-x}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{1}$$

2. Покажем, что вторым замечательным пределом есть предел

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e. \tag{2}$$

Для этого воспользуемся определением предела по Гейне. Пусть $\{x_k\}$ произвольная числовая последовательность, сходящаяся к нулю при $k\to\infty$ и такая, что $0<x_k<0\ \forall k\in\mathbb{N}$. Тогда $\forall k\in\mathbb{N}\ \exists n_k\in\mathbb{N}$ такое, что $\frac{1}{n_k+1}<x_k\leqslant\frac{1}{n_k}$. А тогда справедливо неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}. \tag{3}$$

Поскольку последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ при $n\to\infty$ имеет своим пределом число e, то согласно теореме 1, п. 4.8, любая ее подпоследовательность также имеет своим пределом число e. Поэтому на основании теоремы 2, п. 4.2, имеем

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k+1}}\to e,$$

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)\to e,$$

при $k\to\infty$. Тогда из (3) и теоремы 2, п. 4.2, вытекает, что $\lim\limits_{k\to\infty}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}=e$, а так как $\{x_k\}$ произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к 0, то

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Далее

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}(1-x)^{-\frac{1}{x}}$$

и

$$(1-x)^{-\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{x}}\left(1+\frac{x}{1-x}\right)\to e \text{ при } \frac{x}{1-x}\to+0,$$

т. е. при $x\to-0$ имеем

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

а значит, справедливо (2).

6.4. Правила предельного перехода.

Теорема 1. *Пусть числовые функции f и g определены на $]a, b[\setminus \{x_0\}$ и имеют конечные пределы*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = B.$$

Тогда функции

$$x \mapsto f(x) + g(x), \quad x \mapsto f(x)\, g(x), \quad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

также имеют конечные пределы, причем

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B,$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B, \tag{1}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (\text{если } B \neq 0).$$

◀ Для доказательства воспользуемся определением предела функции по Гейне. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность значений $x_n \in]a, b[\setminus \{x_0\}$, сходящаяся к точке x_0. Поскольку последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ сходятся соответственно к пределам A и B, то, согласно теореме 2, п. 4.2, справедливы соотношения

$$\lim_{n \to \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = A + B, \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n)\, g(x_n) = AB,$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{A}{B}.$$

В силу произвольности последовательности $\{x_n\}$ равенства (1) справедливы. ▶

Следствие. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е.*

$$\lim_{x \to x_0} Cf(x) = C \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Определение 1. *Функция $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ называется ограниченной сверху (снизу), если множество ее значений $\{f(x)\}$ $\forall\, x \in]a, b[$ ограничено сверху (снизу).*

Если функция f ограничена сверху и снизу, то она называется *ограниченной.*

Теорема 2. *Пусть функция $f :]a, b[\setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ имеет конечный предел A при $x \to x_0$. Тогда $\exists\, \delta$ такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ функция f ограничена.*

◀ Пусть произвольное $\varepsilon > 0$ задано; тогда $\exists\, \delta > 0 : A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ при $0 < |x - x_0| < \delta$. ▶

Теорема 3. *Если числовые функции f и g определены на множестве $]a, b[\setminus \{x_0\}$, причем g ограничена на этом множестве, а $f(x) \to 0$ при $x \to x_0$, то*

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = 0.$$

◀ Пусть произвольное $\varepsilon > 0$ задано и $|g(x)| \leqslant M \quad (M > 0)$ $\forall x \in]a, b[\setminus \{x_0\}$. Поскольку $f(x) \to 0$ при $x \to x_0$, то $\exists \delta > 0$ такое, что

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \text{ при } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Тогда для этих значений x

$$|f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon. \blacktriangleright$$

Например, функция $g(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ограничена числом 1, а функция $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, стремится к 0 при $x \to 0$. Поэтому

$$\lim_{x \to 0} f(x)\, g(x) = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Определение 2. *Функция* $f:]a, b[\to \mathbb{R}$, *где* a *и* b — *числа или соответственно символы* $-\infty$, $+\infty$, *называется неубывающей (невозрастающей), если* $\forall x, y \in]a, b[\wedge x < y$

$$f(x) \leqslant f(y) \quad (f(x) \geqslant f(y)). \tag{2}$$

Если функция f неубывающая (невозрастающая) на интервале $]a, b[$, то записываем $f\uparrow$ на $]a, b[$ ($f\downarrow$ на $]a, b[$). Аналогично определяется неубывающая (невозрастающая) функция на сегменте $[a, b]$.

Неубывающие и невозрастающие функции объединяются общим названием — *монотонные функции*.

Если в неравенстве (2) выполняется строгое неравенство, т. е. $\forall x, y \in]a, b[\wedge x < y$

$$f(x) < f(y) \quad (f(x) > f(y)),$$

то функция f называется *возрастающей (убывающей)*, или *строго монотонно возрастающей (строго монотонно убывающей)*. Такие функции называются *строго монотонными*.

Теорема 4. *Неубывающая (невозрастающая) на* $]a, b[$ *функция* f *в случае ее ограниченности сверху (снизу) имеет при* $x \to b - 0$ *конечный предел; в противном случае она стремится к* $+\infty$ $(-\infty)$.

◀ Пусть, например, $f\uparrow$ на $]a, b[$. Если она ограничена сверху, то множество ее значений имеет верхнюю грань A. Из свойств точной верхней грани следует, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \in]a, b[$ такое, что

$$A - \varepsilon < f(x_0) \leqslant A.$$

В силу монотонности функции f для $x_0 < x < b$ имеем неравенства $A - \varepsilon < f(x) \leqslant A$. Отсюда $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $b - \delta < x < b$, где $\delta = b - x_0$. Следовательно,

$$\exists \lim_{x \to b-0} f(x) = A = \sup_{a < x < b} f(x).$$

Если же $f\uparrow$ на $]a, b[$ не является ограниченной, то $\forall E > 0$ $\exists x_0 \in]a, b[$ такое, что $f(x_0) > E$. Тогда в силу монотонности f при $b - \delta < x < b$ имеем $f(x) > E$, т. е. $f(x) \to +\infty$ при $x \to b - 0$. $\blacktriangleright$

Теорема 5. *Пусть функции*

$$g :]a,\ b[\to]c,\ d[,\ f :]c,\ d[\setminus \{y_0\} \to \mathbb{R}$$

имеют пределы

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0, \quad \lim_{y \to y_0} f(y) = A,$$

причем $\exists\, \Delta > 0 : |g(x) - y_0| > 0$ *при* $0 < |x - x_0| < \Delta$. *Тогда*

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = A. \tag{3}$$

◀ По условию $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \sigma > 0$ такое, что

$$|f(y) - A| < \varepsilon \tag{4}$$

при

$$0 < |y - y_0| < \sigma. \tag{5}$$

Далее, $\forall\, \sigma > 0$, в том числе и для только что указанного, $\exists\, \delta$, $0 < \delta < \Delta$, такое, что

$$0 < |g(x) - y_0| < \sigma$$

при

$$0 < |x - x_0| < \delta. \tag{6}$$

Если принять во внимание неравенства (4) и (5), то предпоследнее неравенство влечет за собой выполнение неравенства $|f(g(x)) - A| < \varepsilon$, что вместе с (6) равносильно (3). ▶

Пример 1. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равна 1 при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Показать, что функция $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, определенная равенством

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{если } x = \dfrac{p}{q}, \text{ где } p,\ q \text{ — целые взаимно-простые числа,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррационально} \end{cases}$$

имеет предел, равный нулю при $x \to 0$, а сложная функция $x \mapsto f(g(x))$ не имеет предела при $x \to 0$.

Очевидно, $f(y) \to 1$ при $y \to 0$. Покажем, что $g(x) \to 0$ при $x \to 0$.

В самом деле, пусть $\{z_k\}$ — произвольная последовательность действительных чисел, сходящаяся к нулю при $k \to \infty$, а $z_{k_n} = x_n$, $n \in \mathbb{N}$ — ее подпоследовательность, образованная из рациональных членов, т. е. $x_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, где p_n, q_n — целые взаимно-простые числа. Тогда

$$|g(z_k)| \leqslant \left| g\left(\frac{p_n}{q_n}\right) \right| = \frac{1}{|q_n|}. \tag{7}$$

Тогда $|q_n| \to \infty$ при $n \to \infty$. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим произвольную последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$, сходящуюся к нулю и такую, что $\left|\dfrac{p_n}{q_n}\right| < \varepsilon_n$, т. е. $\dfrac{|p_n|}{\varepsilon_n} < |q_n|$. Отсюда, ввиду того что $1 \leqslant |p_n|$, а $\dfrac{1}{\varepsilon_n} \to +\infty$, следует, что $|q_n| \to +\infty$ при $n \to \infty$. А тогда, согласно (7), $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

Теперь покажем, что функция $x \mapsto f(g(x))$ не имеет предела при $x \to 0$. Действительно, последовательности $x_n = \dfrac{1}{n}$ и $x_n' = \dfrac{\sqrt{2}}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, при $n \to \infty$

стремятся к нулю, а соответствующие последовательности значений функций $f\left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1$, $f\left(g\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)\right) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, имеют различные пределы.

В этом примере нарушено условие теоремы 5, что $g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки $x_0 = 0$.

Пример 2. Пусть $f(y) = (1+y)^{\frac{1}{y}}$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $g(x) = \sin x$, $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Показать, что $\lim\limits_{x \to 0} f(g(x)) = e$.

Здесь $f(y) \to e$ при $y \to 0$, $g(x) \to 0$ при $x \to 0$ и $|g(x)| > 0$, когда $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Поэтому, согласно теореме 5, $\lim\limits_{x \to 0} f(g(x)) = e$.

6.5. Символы Ландау. Эквивалентные функции. Пусть $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, а $B = \{X, Y, Z, \ldots\}$ — семейство всех интервалов пространства $\mathbb{R}$, которые либо все содержат точку x_0, как внутреннюю, либо все они имеют точку x_0 своим концом только левым или только правым для всех интервалов множества B. Тогда $\forall X \in B \wedge \forall Y \in B \Rightarrow X \cap Y \in B$, $X \subset B \wedge Z \subset X \Rightarrow Z \in B$.

Пусть $F = \{f, g, h, k, \ldots\}$ — семейство числовых функций, обладающих одним из следующих свойств:

1) для произвольной функции $f \in F$ в множестве B существует содержащий точку x_0 интервал X, на котором функция f определена, кроме, быть может, самой точки x_0;

2) для произвольной функции $f \in F$ в множестве B существует интервал, имеющий своим концом точку x_0, на котором f определена.

Определение 1. *Если предельное значение функции f при $x \to x_0$ равно нулю, то она называется бесконечно малой при $x \to x_0$.*

Если функция f при $x \to x_0$ имеет бесконечный предел, то она называется бесконечно большой при $x \to x_0$.

Определение 2. *Если для функций $f, g \in F$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$, существует интервал $Z \subset X \cap Y \in B$, $X \in B$, $Y \in B$, и такое конечное число $A > 0$, что $\forall x \in Z$, кроме, быть может, самой точки x_0, выполняется неравенство*

$$|g(x)| \leqslant A|f(x)|,$$

то записываем

$$g = O(f)$$

при $x \to x_0$.

Функции f и g называются функциями *одного порядка*, если $g = O(f)$ и $f = O(g)$ при $x \to x_0$.

Если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists Z \subset X \cap Y \in B$ такое, что $\forall x \in Z$, кроме, быть может, самой точки x_0, выполняется неравенство

$$|g(x)| < \varepsilon |f(x)|,$$

то записываем

$$g = o(f)$$

при $x \to x_0$.

При этом в случае $g(x) \to 0$, $f(x) \to 0$ при $x \to 0$ считаем, что функция g *бесконечно малая более высокого порядка,* чем f; если же $g(x) \to \infty$, $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, то считаем, что бесконечно большая функция g имеет *порядок роста ниже, чем* f.

Символы O и o называются *символами Ландау.*

Отметим, что если $\exists Z \in B$ такое, что $\forall x \in Z \setminus \{x_0\}$ $f(x) \neq 0$, то запись $g = O(f)$ при $x \to x_0$ означает, что отношение $\frac{g(x)}{f(x)}$ ограничено при $x \in Z \setminus \{x_0\}$; а запись $g = o(f)$ — что $\frac{g(x)}{f(x)} \to 0$ при $x \to x_0$.

Рассмотрим основные свойства символов Ландау.

1°. Пусть $h = O(g)$ и $g = O(f)$, $h, g \in F$, тогда $\exists Z \in B$ и $\exists A, C \in \mathbb{R}$ такие, что $\forall x \in Z \setminus \{x_0\}$

$$|h(x)| \leqslant A|g(x)| \wedge |g(x)| \leqslant C|f(x)|;$$

отсюда $|h(x)| \leqslant AC|f(x)|$, т. е. $h = O(f)$ при $x \to x_0$.

Далее, если $h = O(g)$ и $g = O(f)$, поэтому $h = O(O(f))$ и, следовательно, при $x \to x_0$

$$O(f) = O(O(f)).$$

2°. Пусть $h = O(f)$, $k = O(g)$, тогда $\exists Z \in B$ и $\exists A$, $C \in \mathbb{R}$ такие, что на $Z \setminus \{x_0\}$

$$|h(x)| \leqslant A|f(x)| \wedge |k(x)| \leqslant C|g(x)|.$$

Отсюда $|h(x)\,k(x)| \leqslant AC|f(x)\,g(x)|$, т. е. $hk = O(fg)$ и при $x \to x_0$ имеем

$$O(f)\,O(g) = O(fg).$$

3°. Для произвольных $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in F$ при $x \to x_0$

$$O(\lambda f) = |\lambda|\,O(f) = O(f).$$

◀ В самом деле, пусть $g = O(\lambda f)$, тогда $\exists Z \in B$ и $\exists A \in \mathbb{R}$ такие, что на $Z \setminus \{x_0\}$ выполнено неравенство

$$|g(x)| \leqslant A|\lambda f(x)| = |\lambda|\,A|f(x)| = (|\lambda|\,A)|f(x)|.$$

Отсюда при $x \to x_0$ имеем

$$g = O(\lambda f) = |\lambda|\,O(f) = O(f). \blacktriangleright$$

4°. При $x \to x_0$ $\forall f \in F$

$$O(f) + O(f) = O(f).$$

◀ Утверждение следует из 3° при $\lambda = 2$. ▶

5°. Пусть $h = o(g) \wedge g = o(f)$, тогда $h = o(o(f))$.

Для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists Z \in B$ такое, что $\forall x \in Z \setminus \{x_0\}$

$$|h(x)| < \varepsilon|g(x)| \wedge |g(x)| < \varepsilon|f(x)| \Rightarrow |h(x)| < \varepsilon^2|f(x)|.$$

Следовательно, при $x \to x_0$ имеем $h = o(f)$. Сравнивая различные представления для h, получаем

$$o(o(f)) = o(f).$$

6°. Пусть $h = o(f)$, $k = o(g)$, тогда на $Z \in B$

$$|h(x)| < \varepsilon |f(x)| \wedge |k(x)| < \varepsilon |g(x)| \Rightarrow |h(x)\,k(x)| < \varepsilon^2 |f(x)\,g(x)|.$$

Отсюда $hk = o(fg)$ и при $x \to x_0$

$$o(f)\,o(g) = o(fg).$$

7°. Если $g = o(f)$, $h = o(f)$ при $x \to x_0$, то $\exists Z \in B$ такое, что $\forall x \in Z \setminus \{x_0\}$ имеем

$$|g(x)| < \varepsilon |f(x)| \wedge |h(x)| < \varepsilon |f(x)| \Rightarrow |g(x) + h(x)| \leqslant |g(x)| + |h(x)| < 2\varepsilon |f(x)| \Rightarrow g + h = o(f)$$

при $x \to x_0$. Используя условия $g = o(f)$, $h = o(f)$, окончательно получаем при $x \to x_0$

$$o(f) + o(f) = o(f).$$

8°. Если $g = O(f)$, $h = o(f)$ при $x \to x_0$, то для некоторого $Z \in B$ и $\forall x \in Z \setminus \{x_0\}$ имеем

$$|g(x)| < A |f(x)| \wedge |h(x)| < \varepsilon |f(x)| \Rightarrow |g(x) + h(x)| < (A + \varepsilon) |f(x)| \Rightarrow g + h = O(f)$$

при $x \to x_0$. Окончательно, при $x \to x_0$

$$O(f) + o(f) = O(f).$$

9°. Если $g = O(f)$, $h = o(g)$ при $x \to x_0$, то $\exists Z \in B$ такое, что $\forall x \in Z \setminus \{x_0\}$

$$|g(x)| \leqslant A |f(x)| \wedge |h(x)| < \varepsilon |g(x)| \Rightarrow |h(x)| < \varepsilon A |f(x)| \Rightarrow h = o(g)$$

при $x \to x_0$. Если $h = o(g) = o(O(f))$, то окончательно получаем при $x \to x_0$

$$o(O(f)) = o(f).$$

Аналогично из равенств $h = o(f)$ и $g = O(h)$ получаем при $x \to x_0$ соотношение

$$O(o(f)) = o(f).$$

10°. Если $f = O(1)$ при $x \to x_0$, то $\exists A \in \mathbb{R}$ и $\exists X \in B$ такие, что $\forall x \in X \setminus \{x_0\}$ $|f(x)| \leqslant A$. Следовательно, запись $f = O(1)$ означает, что функция f ограничена на $X \setminus \{x_0\}$.

11°. Если $f = o(1)$ при $x \to x_0$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists X \in B$ такое, что $\forall x \in X \setminus \{x_0\}$ $|f(x)| < \varepsilon$; следовательно, $f(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Определение 3. *Функции f, $g \in F$ эквивалентны при $x \to x_0$, если $f - g = o(g)$, т. е. если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists Z \in B$ такое, что $\forall x \in Z \setminus \{x_0\}$ выполнено неравенство*

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon |g(x)|.$$

При этом запишем $f \sim g$, а равенство $f = g + o(g)$ назовем *асимптотическим равенством*.

Пусть $f \sim g$, тогда $|f(x) - g(x)| < \varepsilon |g(x)|$ $\forall x \in Z \setminus \{x_0\}$.

Отсюда для указанных значений x при $0 < \varepsilon < 1$ имеем:

$$||f(x)| - |g(x)|| \leqslant |f(x) - g(x)| < \varepsilon |g(x)|,$$

$$-\varepsilon|g(x)|<|f(x)|-|g(x)|<\varepsilon|g(x)|,$$

$$|f(x)|<(1+\varepsilon)|g(x)|, \quad |g(x)|<\frac{1}{1-\varepsilon}|f(x)|.$$

Следовательно,

$$f=O(g), \quad g=O(f).$$

Из равенств $f-g=o(g)$, $g=O(f)$ и свойства 9° получаем $f-g=o(O(f))=o(f)$ при $x\to x_0$. Таким образом, для эквивалентных функций f и g при $x\to x_0$ справедливо равенство

$$f-g=o(g)=o(f).$$

Пусть f, $g\in F$ и $g(x)>0$ $\forall x\in Y\in B$, тогда

$$f\sim g\Leftrightarrow\exists\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

◀ Действительно, если $f\sim g$, то $\forall\varepsilon>0$ $\exists Z\in B$ такое, что $\forall x\in Z\setminus\{x_0\}$ $|f(x)-g(x)|<\varepsilon|g(x)|$ или

$$g(x)-\varepsilon g(x)<f(x)<g(x)+\varepsilon g(x),$$

$$1-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<1+\varepsilon,$$

т. е.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

Если же предел отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to x_0$ равен единице, то $\forall\varepsilon>0$ $\exists Z\in B$ такое, что $\forall x\in Z\setminus\{x_0\}$

$$1-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<1+\varepsilon;$$

отсюда

$$-\varepsilon g(x)<f(x)-g(x)<\varepsilon g(x)$$

или

$$|f(x)-g(x)|<\varepsilon g(x),$$

т. е. $f\sim g$. ▶

Отметим, что если $f\sim g$ и $f(x)\to 0$ при $x\to x_0$, то функция g называется *главной частью* бесконечно малой функции f при $x\to x_0$. Например, если $f(x)=\sin x$, $g(x)=x$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \quad \sin x-x=o(x)$$

и, следовательно, функция $g(x)=x$ является главной частью функции $f(x)=\sin x$ при $x\to 0$.

6.6. Пределы некоторых элементарных функций. Асимптотические равенства.

Пример 1. Доказать, что:

а) $\lim\limits_{x\to x_0} a^x=a^{x_0}$, $a>0$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0$, $x_0>0$;

в) пусть функции u и v определены в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, причем $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняются неравенства

$$0 < |u(x) - a| < \varepsilon, \quad 0 < |v(x) - b| < \varepsilon, \quad a \in \mathbb{R}, \ b \in \mathbb{R}, \ a > 0.$$

Тогда

$$\lim_{x \to x_0} (u(x))^{v(x)} = a^b.$$

а) Достаточно рассмотреть случай $a > 1$. Имеем $a^{\frac{1}{n}} \to 1$, $a^{-\frac{1}{n}} \to 1$ при $n \to \infty$ (см. пример 4, п. 4.2). Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > n_0$

$$1 - \frac{\varepsilon}{a^{x_0}} < a^{-\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}.$$

Тогда при $0 < |x - x_0| < \frac{1}{n_0}$ выполняются неравенства

$$1 - \frac{\varepsilon}{a^{x_0}} < a^{-\frac{1}{n}} < a^{x - x_0} < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}.$$

Отсюда $|a^x - a^{x_0}| < \varepsilon$ при $0 < |x - x_0| < \frac{1}{n_0}$.

б) Из неравенств (см. неравенства (6), п. 4.4)

$$-\frac{1}{n-1} < \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

следует, что $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \to 0$, $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : -\varepsilon < \ln\left(1 - \frac{1}{n_0}\right) < \ln\left(1 + \frac{1}{n_0}\right) < \varepsilon,$$

а тогда при $0 < \left|\frac{x - x_0}{x_0}\right| < \frac{1}{n_0}$ имеем

$$-\varepsilon < \ln\left(1 - \frac{1}{n_0}\right) < \ln\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right) < \ln\left(1 + \frac{1}{n_0}\right) < \varepsilon,$$

т. е.

$$|\ln x - \ln x_0| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < |x - x_0| < \frac{x_0}{n_0}.$$

в) Согласно б) и теореме 5, п. 6.4, имеем при $x \to x_0$

$$v(x) \ln u(x) \to b \ln a.$$

Далее, согласно а) и той же теореме 5, п. 6.4, при $x \to x_0$ имеем

$$(u(x))^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)} \to e^{b \ln a} = a^b.$$

Пример 2. Доказать, что:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$, т. е. $\ln(1 + x) = x + o(x)$ при $x \to 0$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, т. е. $e^x = 1 + x + o(x)$, $a^x = 1 + x \ln a + o(x)$ при $x \to 0$, $a > 0$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$, т. е. $(1+x)^{\mu}=1+\mu x+o(x)$ при $x\to 0$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1$, т. е. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ при $x\to 0$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^{\mu}x}{x^2}=\dfrac{\mu}{2}$, т. е. $\cos^{\mu}x=1-\dfrac{\mu x^2}{2}+o(x^2)$ при $x\to 0$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=1$, т. е. $\operatorname{tg}x=x+o(x)$ при $x\to 0$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$, т. е. $\operatorname{arctg}x=x+o(x)$ при $x\to 0$.

а) Пользуясь примером 1, б), получим

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\to\ln e=1 \quad \text{при} \quad x\to 0;$$

отсюда при $x\to 0$ имеем $\ln(1+x)=x+o(x)$.

б) Пусть $e^x-1=t$, тогда $t\to 0$ при $x\to 0$ (см. пример 1, а); $x=\ln(1+t)$, поэтому, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=1$ и, следовательно, $e^x=1+x+o(x)$ при $x\to 0$.

В частности, $a^x=e^{x\ln a}=1+x\ln a+o(x)$ при $x\to 0$.

в) При $x\to 0$ имеем

$$\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\frac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{\mu\ln(1+x)}\,\mu\,\frac{\ln(1+x)}{x}\to\mu;$$

отсюда $(1+x)^{\mu}=1+\mu x+o(x)$ при $x\to 0$.

г) После очевидных преобразований получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1;$$

следовательно, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ при $x\to 0$.

д) Используя доказанное в пункте в) этого примера, имеем

$$\frac{1-\cos^{\mu}x}{x^2}=\frac{(1+(\cos x-1))^{\mu}-1}{\cos x-1}\,\frac{1-\cos x}{x^2}\to\frac{\mu}{2} \quad \text{при} \quad x\to 0.$$

Таким образом, $\cos^{\mu}x=1-\dfrac{\mu x^2}{2}+o(x^2)$ при $x\to 0$.

е) При $x\to 0$ имеем

$$\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\to 1;$$

поэтому $\operatorname{tg}x=x+o(x)$ при $x\to 0$.

ж) Из очевидных соотношений

$$\operatorname{arctg}x=t<\operatorname{tg}t=\operatorname{tg}\operatorname{arctg}x=x,\quad \operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg}x$$

следует, что $\operatorname{arctg}x\to 0$ при $x\to 0$. Тогда на основании примера е), находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)}=1,$$

$$\operatorname{arctg}x=x+o(x) \quad \text{при} \quad x\to 0.$$

Пример 3. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha}}=0,\quad \alpha>0.$$

Применяя теорему Штольца (теорема 2, п. 4.6), а затем асимптотические равенства а) и в) предыдущего примера, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^{\alpha}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{\alpha}\left(\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+o(1)}{n^{\alpha}(\alpha+o(1))}=0.$$

Пример 4. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=e^{x},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Согласно примеру 2, а), при $n\to\infty$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}=e^{n\left(\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=e^{x+o(1)},$$

а согласно примеру 1, а)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}e^{x+o(1)}=e^{x}.$$

Пример 5. Функцию $z\mapsto e^{z}$, где $z=x+iy$, $z\in\mathbb{C}$, определим посредством равенства

$$e^{z}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}.$$

Ясно, что сужение ее на действительную ось совпадает с функцией $x\mapsto e^{x}$, $x\in\mathbb{R}$. Показать, что

$$e^{x+iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y),\tag{1}$$

а при $x=0$ получим

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y.\tag{2}$$

Для доказательства представим последовательность $\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}\right\}$ в тригонометрической форме, а затем, использовав формулу Муавра, получим

$$\left\{\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)\right\},$$

где $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{n+x}$. Согласно примеру 4,

$$\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\to e^{x}\ \text{при}\ n\to\infty.$$

Далее, согласно примеру 2, ж), при $n \to \infty$

$$n\varphi = n \operatorname{arctg} \frac{y}{n+x} = n\left(\frac{y}{n+x} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = y + o(1).$$

Отсюда при $n \to \infty$

$$|\cos n\varphi - \cos y| = 2\left|\sin\frac{n\varphi + y}{2}\sin\frac{y - n\varphi}{2}\right| \leqslant |y - n\varphi| \to 0,$$

$$|\sin n\varphi - \sin y| = 2\left|\sin\frac{n\varphi - y}{2}\cos\frac{n\varphi + y}{2}\right| \leqslant |n\varphi - y| \to 0,$$

т. е. $\cos n\varphi \to \cos y$, $\sin n\varphi \to \sin y$ при $n \to \infty$. Таким образом,

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \to e^x(\cos y + i \sin y) \quad \text{при } n \to \infty$$

и, тем самым, формула (1) доказана. Заменив в равенстве (2) y на $-y$, получим

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y. \tag{3}$$

Из (2) и (3) находим

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \tag{4}$$

Формулы (2) и (3), как и (4), называются *формулами Эйлера.*

6.7. Предел числовой функции векторного аргумента. Пусть $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, где D — область пространства $\mathbb{R}^m$, x_0 — внутренняя или предельная точка области D.

Определение 1 (Гейне). *Функция f имеет предел (предельное значение) при $x \to x_0$ (в точке x_0), если существует число $A \in \mathbb{R}$ такое, что для произвольной последовательности $\{x_n\}$ значений $x \in D \setminus \{x_0\}$, сходящейся к точке x_0, т. е. $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции f сходится к A, т. е. $f(x_n) \to A$ при $n \to \infty$.*

При этом число A называется *пределом (предельным значением)* функции f при $x \to x_0$ (в точке x_0), что записываем следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \to A \quad \text{при} \quad x \to x_0,$$

$$\text{или} \quad \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \dots \\ x_m \to x_m^0}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = A,$$

или $f(x_1, x_2, \dots, x_m) \to A$ при $x_1 \to x_1^0$, $x_2 \to x_2^0$, $\dots$, $x_m \to x_m^0$.

Определение 2 (Коши). *Функция f имеет предел при $x \to x_0$, если существует такое число A, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x$ удовлетворяющих условию*

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Это же определение можно записать короче: *функция f имеет предел при $x \to x_0$, если*

$$\exists A \in \mathbb{R} \wedge \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Оба определения предела (Гейне и Коши) эквивалентны. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы пункта 6.1, поэтому предлагаем провести его читателю в качестве упражнения.

Теорема. *Пусть числовые функции $x \mapsto f(x)$, $x \mapsto g(x)$, $x \in D \setminus \{x_0\}$, имеют конечные пределы*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = B.$$

Тогда функции

$$x \mapsto f(x) + g(x),$$

$$x \mapsto f(x)\, g(x), \qquad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$$

также имеют конечные пределы при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B,$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = AB,$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0.$$

◀ Доказательство аналогично теореме 1, п. 6.4 ▶

Определение 3. *Последовательность $\{x_n\}$ точек пространства $\mathbb{R}^m$ стремится к бесконечности при $n \to \infty$, если*

$$\forall \Delta \in \mathbb{R}^+ \ \exists m \in \mathbb{N} : \forall n > m \Rightarrow |x_n| > \Delta, \quad x_n \notin S(\theta, \Delta).$$

Определение 4 (Гейне). *Функция $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ имеет предел (предельное значение) при $x \to \infty$, если существует число $A \in \mathbb{R}$ такое, что для произвольной последовательности $\{x_n\}$ точек пространства $\mathbb{R}^m$ такой, что*

$$x_n \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции f сходится к A, т. е.

$$f(x_n) \to A \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Определение 5 (Коши). *Функция $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ имеет предел (предельное значение) при $x \to \infty$, если:*

$$\exists A \in \mathbb{R} \wedge \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta \in \mathbb{R}^+ : |x| > \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

или

$$\exists A \in \mathbb{R} \wedge \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta \in \mathbb{R}^+ : \forall x \notin S(\theta, \Delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Пример 1. Показать, что $f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^3 \to -7$ при $x_1 \to 1$, $x_2 \to 2$.

Для доказательства выделим окрестность $|x_1 - 1| + |x_2 - 2| < 2$. Можно считать, что $|x_1 - 1| < 1$, $|x_2 - 2| < 1$; в выделенной окрестности получим оценки $|x_1| < 2$, $|x_2| < 3$, поэтому

$$|f(x_1, x_2) + 7| = |x_1^3 - x_2^3 + 7| = |(x_1^3 - 1) - (x_2^3 - 8)| \leqslant |x_1 - 1||x_1^2 + x_1 + 1| + |x_2 - 2||x_2^2 + 2x_2 + 4| \leqslant 7|x_1 - 1| + 19|x_2 - 2| < \varepsilon,$$

если

$$|x_1 - 1| < \frac{\varepsilon}{14}, \quad |x_2 - 2| < \frac{\varepsilon}{38}.$$

Обозначая $x = (x_1, x_2)$, $x_0 = (x_1^0, x_2^0) = (1, 2)$, получим привычную запись

$$|f(x) + 7| < \varepsilon,$$

если

$$|x - x_0| = |x_1 - x_1^0| + |x_2 - x_2^0| < \frac{\varepsilon}{14} + \frac{\varepsilon}{38} = \frac{13\varepsilon}{133} = \delta.$$

Тот же результат получим, если применим последнюю теорему (это возможно, поскольку пределы слагаемых существуют):

$$\lim_{\substack{x_1 \to 1 \\ x_2 \to 2}} (x_1^3 - x_2^3) = \lim_{x_1 \to 1} x_1^3 - \lim_{x_2 \to 2} x_2^3 = 1 - 8 = -7.$$

Пример 2. Показать, что функция $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$, не имеет предела при $x_1 \to 0$, $x_2 \to 0$.

Предел не существует, поскольку последовательности $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$, $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)\right\}$ сходятся к точке (0, 0) при $n \to \infty$, однако соответствующие им последовательности значений функции сходятся к различным пределам:

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) \to \frac{2}{5}.$$

Пример 3. Доказать, что при $m > 2$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{\substack{x_1 \to 0 \\ x_2 \to 0 \\ \dots \\ x_m \to 0}} \frac{x_1 x_2 \dots x_m}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2} = 0.$$

Действительно, для нормы $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)^{\frac{1}{2}}$ получаем оценку $|x_i| \leqslant |x|$ $\forall\, i = \overline{1, m}$, поэтому

$$|f(x)| = \left|\frac{x_1 x_2 \dots x_m}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}\right| < \frac{|x|^m}{|x|^2} = |x|^{m-2} < \varepsilon,$$

если $|x| < \varepsilon^{\frac{1}{m-2}} = \delta$.

6.8. Критерий существования предела числовой функции

Теорема (критерий Коши). *Функция f имеет конечный предел при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$

такое, что при

$$0<|x-x_0|<\delta, \quad 0<|x'-x_0|<\delta$$

выполняется неравенство

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon. \tag{1}$$

◀ *Необходимость.* Пусть существует конечный предел

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

Тогда $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0$ такое, что при $0<|x-x_0|<\delta$, $0<|x'-x_0|<\delta$ выполняются неравенства

$$0<|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad 0<|A-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2},$$

из которых непосредственно вытекает неравенство (1).

Достаточность. Пусть выполняется неравенство (1) и для выбранного $\varepsilon>0$ указано $\delta>0$. Точка x_0 является предельной точкой области D, поэтому можно бесконечным числом способов (теорема, п. 4.7) выделить последовательности $\{x_n\}$ значений $x\in D\setminus\{x_0\}$, сходящиеся при $n\to\infty$ к точке x_0. Следовательно, $\exists n_0$ такое, что $\forall n, m>n_0$ имеем

$$0<|x_n-x_0|<\delta, \quad 0<|x_m-x_0|<\delta.$$

Тогда выполняется неравенство

$$|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon.$$

Следовательно, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится, согласно критерию Коши для числовых последовательностей.

Таким образом, из сходимости последовательности $\{x_n\}$ значений x вытекает сходимость последовательности значений функции $\{f(x_n)\}$. Покажем, что предел последовательности значений функции не зависит от выбора последовательности значений аргумента.

Действительно, предположим, что $x_n\to x_0$, $x_n'\to x_0$, а $f(x_n)\to A$, $f(x_n')\to A'$ при $n\to\infty$ и $A\neq A'$. Тогда последовательность

$$x_1, x_1', x_2, x_2', \ldots, x_n, x_n', \ldots$$

сходится к x_0, а последовательность

$$f(x_1), f(x_1'), f(x_2), f(x_2'), \ldots, f(x_n), f(x_n'), \ldots$$

расходится и мы пришли к противоречию с только что доказанным.

Итак, предел последовательности значений функции не зависит от выбора последовательности значений аргумента и, согласно определению 1, п. 6.7, функция f имеет конечный предел при $x\to x_0$. ▶

6.9. Предел отображения. Рассмотрим отображение

$$f: D\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}^n, \quad D\subset\mathbb{R}^m.$$

Относительно области D и точки x_0 предположения остаются прежние. Определим, что в этом случае будем понимать под пределом отображения f при $x\to x_0$.

Определение 1. *Отображение f имеет предел (предельное значение) при $x \to x_0$ (в точке x_0), если существует такая точка $A \in \mathbb{R}^n$, что выполняется одно из двух эквивалентных условий:*

1) *для произвольной последовательности $\{x_k\}$ значений $x \in D \setminus \{x_0\}$, сходящейся к точке x_0, соответствующая последовательность $\{f(x_k)\}$ значений отображения f сходится к A (определение Гейне);*

2) *для произвольного $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ (определение Коши).*

Эквивалентность условий доказывается аналогично теореме пункта 6.1.

Теорема 1. а) *Для того чтобы отображение $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ имело предел $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{x \to x_0} f_i(x) = A_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

б) *Если отображения $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ и $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ определены на множестве $D \setminus \{x_0\}$ и имеют пределы при $x \to x_0$, равные соответственно*

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_n) \text{ и } B = (B_1, B_2, \ldots, B_n),$$

то

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B,$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x), g(x)) = (A, B).$$

◀ Пусть $\{x_k\}$ — произвольная последовательность значений $x \in D \setminus \{x_0\}$, сходящаяся к x_0 при $k \to \infty$. Тогда утверждение справедливо при $x_k \to x_0$ (теорема 1, п. 4.11). А поскольку $\{x_k\}$ — произвольная последовательность, то утверждение теоремы остается справедливым и при $x \to x_0$. ▶

Из только что доказанной теоремы следует, что если отображение $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ имеет при $x \to x_0$ предел, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = (\lim_{x \to x_0} f_1(x), \ldots, \lim_{x \to x_0} f_n(x)).$$

Пусть E и F — произвольные векторные нормированные (метрические) пространства и $D \subset E$, где D — открытая область в E, x_0 — предельная точка области D. Определим понятие предела для наиболее общего случая, когда

$$f : D \setminus \{x_0\} \to F.$$

Определение 2. *Отображение f имеет предел при $x \to x_0$, если существует такая точка $A \in F$, что функция f удовлетворяет одному из условий:*

1) *для произвольной последовательности $\{x_n\}$ значений $x \in D \setminus \{x_0\}$, сходящейся к x_0, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений отображения f сходится к точке A (определение Гейне);*

2) *для произвольного* $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ *такое, что при* $0 < \|x - x_0\| < \delta$ $(0 < \rho(x, x_0) < \delta)$ *выполняется неравенство*

$$\|f(x) - A\| < \varepsilon \quad (\rho(f(x), A) < \varepsilon)$$

(определение К о ш и).

Как и в предыдущем случае, эти определения эквивалентны (доказательство аналогично доказательству теоремы пункта 6.1).

В качестве примера рассмотрим функциональные прямоугольные матрицы $A(x) = (a_{ij}(x))$, т. е. отображения $A : D \setminus \{x_0\} \to \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — векторное нормированное пространство, элементами которого являются матрицы, $D \subset \mathbb{R}^m$, x_0 — предельная точка области D.

Теорема 2. а) *Матрица* $A(x) = (a_{ij}(x))$ *при* $x \to x_0$ *имеет предел* $A = (\alpha_{ij})$ *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{x \to x_0} a_{ij}(x) = \alpha_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

б) *Если функциональные матрицы* $x \mapsto A(x)$, $x \mapsto B(x)$ *с одинаковым количеством строк и столбцов имеют пределы при* $x \to x_0$, *то*

$$\exists \lim_{x \to x_0} (A(x) + B(x)) = \lim_{x \to x_0} A(x) + \lim_{x \to x_0} B(x).$$

в) *Пусть функциональные матрицы* $x \mapsto A(x)$, $x \mapsto B(x)$, *постоянные матрицы* C, G *и вектор-функция* $x \mapsto \alpha(x)$ *такие, что для них определены произведения* $x \mapsto A(x) B(x)$, $x \mapsto CA(x)$, $x \mapsto A(x) G$, $x \mapsto A(x) \alpha(x)$.

Тогда, если существуют пределы

$$\lim_{x \to x_0} A(x), \quad \lim_{x \to x_0} B(x), \quad \lim_{x \to x_0} \alpha(x),$$

то справедливы равенства:

$$\lim_{x \to x_0} A(x) B(x) = \lim_{x \to x_0} A(x) \lim_{x \to x_0} B(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} CA(x) = C \lim_{x \to x_0} A(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} A(x) G = (\lim_{x \to x_0} A(x)) G,$$

$$\lim_{x \to x_0} A(x) \alpha(x) = \lim_{x \to x_0} A(x) \lim_{x \to x_0} \alpha(x).$$

Если $\{x_k\}$ — произвольная последовательность значений $x \in D \setminus \{x_0\}$, сходящаяся при $k \to \infty$ к точке x_0, то, согласно теореме 6, п. 4.11, утверждение этой теоремы справедливо. А поскольку последовательность $\{x_k\}$ произвольная, то утверждение теоремы остается справедливым и при $x \to x_0$.

6.10. Эквивалентные метрики. Пусть на множестве E определены метрики ρ и ρ', которые тем самым превращают его в метрические

пространства: метрическое пространство E с метрикой ρ и метрическое пространство E с метрикой ρ'.

Определение 1. *Метрики ρ и ρ' называются эквивалентными, если*

$$\rho(x_n, x) \to 0 \Leftrightarrow \rho'(x_n, x) \to 0,$$

т. е. последовательность $\{x_n\}$ сходится в метрике ρ тогда и только тогда, когда она сходится в метрике ρ'.

Теорема. *Метрики ρ и ρ', заданные на одном и том же множестве E, эквивалентны тогда и только тогда, когда $\forall x \in E$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \varepsilon' > 0$ такое, что шар $\{y \in E : \rho'(x, y) < \varepsilon'\}$ содержится в шаре $\{y \in E : \rho(x, y) < \varepsilon\}$ и, наоборот, $\forall \varepsilon' > 0$ $\exists \varepsilon > 0$ такое, что шар $\{y \in E : \rho(x, y) < \varepsilon\}$ содержится в шаре $\{y \in E : \rho'(x, y) < \varepsilon'\}$.*

◀ Пусть $\varepsilon > 0$ задано, x — произвольная точка множества E, а метрики ρ и ρ', заданные на множестве E, эквивалентны, так что при $n \to \infty$ получим

$$\rho(x_n, x) \to 0 \Leftrightarrow \rho'(x_n, x) \to 0.$$

Если не существует ε', то $\forall n \in \mathbb{N}$ в шаре $\left\{y \in E : \rho'(x, y) < \frac{1}{n}\right\}$ имеются точки, которые не попадут в шар $\{y \in E : \rho(x, y) < \varepsilon\}$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists y_n \in E$ такое, что $\rho'(x, y_n) < \frac{1}{n}$, однако $\rho(x, y_n) \geqslant \varepsilon'$. Следовательно, $\rho'(x, y_n) \to 0$, тогда как $\rho(x, y_n) \not\to 0$ при $n \to \infty$, что противоречит предположению об эквивалентности метрик ρ и ρ'. Меняя местами ρ и ρ', по заданному $\varepsilon' > 0$ сможем найти такое $\varepsilon > 0$, что шар $\{y \in E : \rho(x, y) < \varepsilon\}$ содержится в шаре $\{y \in E : \rho'(x, y) < \varepsilon'\}$. ▶

Так, например, метрики (2), (3) и (4), п. 2.2, введенные нами в $\mathbb{R}^m$, эквивалентны. Это утверждение вытекает из неравенств

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - y_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j|} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i| \leqslant m \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - y_i|.$$

В пространстве $\mathbb{R}^m$ можно ввести метрику, которая не будет эквивалентной ни одной из ранее введенных нами. Например, так называемая дискретная метрика $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1$ $\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ и $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ не является эквивалентной метрикам (2), (3) и (4), введенным в пункте 2.2. Действительно, любая последовательность $\{\boldsymbol{x}_n\}$ попарно различных элементов пространства $\mathbb{R}^m$, сходящаяся к точке $\boldsymbol{x}$ относительно любой из метрик (2), (3) или (4) из п. 2.2, не сходится относительно дискретной метрики, поскольку $\rho(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}) = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

В дальнейшем будем пользоваться только эквивалентными метриками.

В векторном нормированном пространстве две нормы называются *эквивалентными,* если соответствующие им метрики эквивалентны. Следовательно, в векторном нормированном пространстве $\mathbb{R}^m$ введенные нормы в пункте 1.5 эквивалентны.

§ 7. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

7.1. Определение непрерывности функции. Пусть f отображает метрическое пространство E в метрическое пространство F, x_0 — произвольная фиксированная точка пространства E.

Определение 1. *Отображение f называется непрерывным в точке $x_0 \in E$, если выполняется одно из следующих условий:*

1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ *такое, что* $\rho_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ *для всех* x, *удовлетворяющих неравенству* $\rho_E(x, x_0) < \delta$;

2) *для произвольной последовательности* $\{x_n\}$ *значений* $x \in E$, *сходящейся к точке* x_0, *соответствующая последовательность* $\{f(x_n)\}$ *значений функции* f *сходится к* $f(x_0)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, т. е. $f(x) - f(x_0) \to 0$ *при* $x \to x_0$, *что означает следующее: приращение отображения* f *в точке* x_0 *стремится к нулю, если приращение независимого переменного в этой точке стремится к нулю;*

4) *для произвольной окрестности* $S(f(x_0), \varepsilon) \subset F$ *точки* $f(x_0) \in F$ *существует такая окрестность* $S(x_0, \delta) \subset E$ *точки* $x_0 \in E$, *что*

$$f(S(x_0, \delta)) \subset S(f(x_0), \varepsilon),$$

или, что то же самое,

$$f : S(x_0, \delta) \to S(f(x_0), \varepsilon).$$

Условия 1) — 4), входящие в определение 1, эквивалентны. Действительно, эквивалентность условий 1) и 2) вытекает из теоремы пункта 6.1, а из этих условий непосредственно следует условие 3). Далее, из условия 1) и того, что

$$f(S(x_0, \delta)) = \{f(x) \in F : x \in S(x_0, \delta)\}$$

следует условие 4). Наконец, из 4) следует, что $f(x) \in S(f(x_0), \varepsilon)$, когда $x \in S(x_0, \delta)$, т. е. $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, если только $x \in S(x_0, \delta)$, т. е. $\rho_E(x, x_0) < \delta$, а это есть определение 1. Таким образом, все приведенные выше условия эквивалентны.

Отображение $f : E \to F$ называется непрерывным в E, если оно непрерывно в каждой точке пространства E.

В качестве примера покажем, что метрика ρ, определенная в метрическом пространстве E, является непрерывным отображением $\rho : E \times E \to \mathbb{R}^+$.

В самом деле, пусть $\{x_n, y_n\}$ — произвольная последовательность точек произведения из $E \times E$, сходящаяся при $n \to \infty$ к точке (x, y). Это значит (см. теорему 1, п. 4.11), что $x_n \to x$, $y_n \to y$ при $\rho(x_n, x) \to 0$, $\rho(y_n, y) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда, согласно неравенству (1), п. 2.1, имеем

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leqslant |\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y_n)| + |\rho(x, y_n) - \rho(x, y)| \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(y, y_n). \quad (1)$$

Поскольку $\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N}$ такое, что $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\rho(y, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, то из этих неравенств и неравенства (1) следует неравенство

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| < \varepsilon \quad \forall n > m,$$

т. е. $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$ при $n \to \infty$ и непрерывность отображения ρ доказана.

Еще проще доказывается, что норма в векторном нормированном пространстве E, рассматриваемая как отображение E на неотрицательную часть $\mathbb{R}^+$ прямой $\mathbb{R}$, является непрерывной функцией в E.

Действительно, для $\forall \varepsilon > 0$ и произвольной точки $x_0 \in E$ из неравенства $\| x - x_0 \| < \delta = \varepsilon$ и неравенства (7), п. 1.5, следует неравенство

$$|\| x \| - \| x_0 \|| \leqslant \| x - x_0 \| < \varepsilon.$$

Пусть заданы три метрические пространства E, G и F.

Теорема 1. *Если отображение $g : E \to G$ непрерывно в точке $x_0 \in E$, а отображение $f : G \to F$ непрерывно в точке $t_0 \in G$, где $t_0 = g(x_0)$, то отображение $f \circ g : E \to F$ непрерывно в точке x_0.*

◀ Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное заданное число. Поскольку отображение f непрерывно в точке t_0, то $\exists \sigma > 0$ такое, что

$$f(S(t_0, \sigma)) \subset S(f(t_0), \varepsilon).$$

Далее, в силу непрерывности отображения g в точке x_0 и того, что $t_0 = g(x_0)$, $\exists \delta > 0$ такое, для которого

$$g(S(x_0, \delta)) \subset S(g(x_0), \sigma) = S(t_0, \sigma).$$

Из последних двух включений следует включение

$$f \circ g(S(x_0, \delta)) \subset S(f(t_0), \varepsilon) = S(f \circ g(x_0), \varepsilon),$$

равносильное непрерывности отображения $f \circ g$ в точке x_0. ▶

Следствие. *Если отображение $f : G \to F$ непрерывно в G, а отображение $g : E \to G$ непрерывно в E, то суперпозиция $f \circ g$ непрерывна в E.*

Определение непрерывности отображения f дано в общем случае. Рассмотрим теперь частные случаи отображений и покажем, как реализуется определение, если

$$f : \mathcal{T} \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{T} \subset \mathbb{R}; \quad f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^m; \quad f : D \to \mathbb{R}^n, \quad D \in \mathbb{R}^m.$$

Определение 2. *Функция $f : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$, называется непрерывной в точке $x_0 \subset \mathcal{T}$, если выполняется одно из эквивалентных условий:*

1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ *такое, что неравенство*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{2}$$

выполняется, как только $|x - x_0| < \delta$;

2) *для произвольной последовательности $\{x_n\}$ значений $x \in \mathcal{T}$, сходящейся при $n \to \infty$ к точке x_0, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится при $n \to \infty$ к $f(x_0)$;*

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ *или* $f(x) - f(x_0) \to 0$ *при* $x - x_0 \to 0$;

4) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ *такое, что*

$$f(]x_0 - \delta, \ x_0 + \delta[) \subset]f(x_0) - \varepsilon, \ f(x_0) + \varepsilon[$$

или, что то же самое,

$$f :]x_0 - \delta, \ x_0 + \delta[\to]f(x_0) - \varepsilon, \ f(x_0) + \varepsilon[.$$

Из определения непрерывности функции f в точке x_0 следует, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x);$$

в этом случае символ функции и символ предела можно менять местами, т. е. символы предела и функции коммутативны.

Определение 3. *Если функция f непрерывна в каждой точке интервала $]a, b[$, то функция f называется непрерывной на интервале $]a, b[$.*

Определение 4. *Функция $f :]a, x_0] \to \mathbb{R}$ ($f : [x_0, b[\to \mathbb{R}$) называется непрерывной в точке x_0 слева (справа), если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:*

1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ *такое, что неравенство (2) выполняется, как только* $x_0 - \delta < x \leqslant x_0$ ($x_0 \leqslant x < x_0 + \delta$);

2) *для произвольной последовательности $\{x_n\}$ значений $x \in]a, x_0]$ ($x \in [x_0, b[$), сходящейся к точке x_0, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции f сходится к $f(x_0)$;*

3) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$ ($\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$) *или короче, если*

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) \quad (f(x_0 + 0) = f(x_0));$$

4) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ *такое, что*

$$f(]x_0 - \delta, x_0]) \subset]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$$
$$(f([x_0, x_0 + \delta[) \subset]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[)$$

или, что то же самое,

$$f :]x_0 - \delta, x_0] \to]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$$
$$(f : [x_0, x_0 + \delta[\to]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[).$$

Теорема 2. *Функция $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in \mathcal{J}$ тогда и только тогда, когда она в этой точке непрерывна слева и справа.*

◀ Предположим, что функция f непрерывна в точке x_0. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что

$$f(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[) \subset]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[. \tag{3}$$

Отсюда

$$f(]x_0 - \delta, x_0]) \subset]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[,$$
$$f([x_0, x_0 + \delta[) \subset]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[. \tag{4}$$

Из первого включения (4) следует непрерывность функции f в точке x_0 слева, а из второго — справа.

Предположим теперь, что функция f в точке x_0 непрерывна слева и справа. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 \wedge \exists \delta_2 > 0$ такие, что

$$f(]x_0 - \delta_1, x_0]) \subset]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[,$$
$$f([x_0, x_0 + \delta_2[) \subset]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[.$$

Отсюда, если обозначить $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, получим включения (4), эквивалентные (3), которые равносильны непрерывности функции f в точке x_0. ▶

Таким образом, показали, что функция f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Теорема 3. *Пусть функции* $f: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ *и* $g: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ *непрерывны на* $\mathcal{J}$. *Тогда функции* $f+g$, fg *и* $\frac{f}{g}$ *(в последнем случае предполагаем, что* $g(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathcal{J}$*) непрерывны на интервале* $\mathcal{J}$.

◀ Пусть x_0 — произвольная точка интервала $\mathcal{J}$. Тогда, согласно предположению, при $x \to x_0$ функции f и g имеют соответственно пределы, равные $f(x_0)$ и $g(x_0)$. Поэтому, согласно теореме 1, п. 6.4, при $x \to x_0$ функции $f+g$, fg и $\frac{f}{g}$ имеют пределы, равные $(f+g)(x_0)$, $fg(x_0)$ и $\frac{f}{g}(x_0)$, что означает непрерывность указанных функций в точке x_0, а в силу произвольности $x_0 \in \mathcal{J}$ — непрерывность на $\mathcal{J}$. ▶

Следствие. *Если функция* $f: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на* $\mathcal{J}$ *и* $\alpha \subset \mathbb{R}$, *то функция* $x \mapsto \alpha f(x)$ *также является непрерывной на* $\mathcal{J}$.

Это утверждение непосредственно следует из теоремы 3 при $g(x) \equiv \alpha \quad \forall x \in \mathcal{J}$.

Пример 1. Показать, что функции $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$, $x > 0$, непрерывны в области их определения.

Действительно, $\forall x_0$ из области определения (см. пример 1, п. 6.6)

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}, \ \lim_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0.$$

Пример 2. Показать, что функция $x \mapsto x^\alpha$, где $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, непрерывна в области $x > 0$.

В самом деле, по доказанному в примере 1, функция $t \mapsto e^t$ непрерывна на $\mathbb{R}$, а функция $x \mapsto \alpha \ln x$ непрерывна при $x > 0$. Тогда, согласно теореме 1, суперпозиция этих функций $x \mapsto e^{\alpha \ln x}$ непрерывна при $x > 0$. Поэтому для $x_0 > 0$ имеем

$$\lim_{x \to x_0} x^\alpha = \lim_{x \to x_0} e^{\alpha \ln x} = e^{\alpha \ln x_0} = x_0^\alpha.$$

Отсюда следует, что функция $x \mapsto x^\alpha$ непрерывна в области $x > 0$.

Пример 3. Показать, что функции $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$ непрерывны в $\mathbb{R}$.

В самом деле, $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ имеем

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leqslant 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| < |x - x_0| < \varepsilon,$$

как только $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$. Поскольку $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, то функция $x \mapsto \cos x$ непрерывна, как суперпозиция непрерывных функций.

Отсюда и из равенств $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, на основании теоремы 1 устанавливаем непрерывность функций $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $x \mapsto \operatorname{ctg} x$ во всех точках их области определения.

Рассмотрим числовую функцию векторного аргумента $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, и дадим определение ее непрерывности в точке $x_0 \in D$.

Определение 5. *Функция* f *называется непрерывной в точке* $x_0 \in D$, *если выполняется любое из эквивалентных условий:*

1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, *что* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, *как только* $|x - x_0| < \delta$;

2) *для произвольной последовательности* $\{x_n\}$ *значений* $x \in D$, *сходящейся к точке* x_0, *соответствующая последовательность* $\{f(x_n)\}$ *значений функции* f *сходится при* $n \to \infty$ *к* $f(x_0)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ *или* $f(x) - f(x_0) \to 0$ *при* $x - x_0 \to 0$;

4) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *такое, что*

$$f(S(x_0, \delta)) \subset]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[,$$

или, что то же самое,

$$f : S(x_0, \delta) \to]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[.$$

Это определение непосредственно вытекает из определения 1, если положить $\rho(x, x_0) = |x - x_0|$, где $|x - x_0|$ (норма разности) определено одним из равенств (1), п. 2.3.

Функция $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, называется *непрерывной* в D, если она непрерывна в каждой точке множества D.

Теорема 3'. *Пусть функции* $f : D \to \mathbb{R}$ *и* $g : D \to \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}^m$, *непрерывны в* D. *Тогда функции* $f + g$, fg, λf, $\lambda \in \mathbb{R}$, *и* $\frac{f}{g}$ *(в последнем случае предполагаем, что* $g(x) \neq 0\ \forall x \in D$*) непрерывны в* D.

◀ Доказательство аналогично доказательству теоремы 3. ▶

Рассмотрим теперь отображение

$$f : D \to \mathbb{R}^n, \quad D \subset \mathbb{R}^m.$$

Отображение f непрерывно, если для него выполнено определение 1, в котором $E = D$, $D \subset \mathbb{R}^m$, $F = \mathbb{R}^n$, а метрика в D является индуцированной метрикой пространства $\mathbb{R}^m$.

При исследовании отображения f на непрерывность можно поступать иначе. С этой целью запишем отображение f в виде $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, где компонентами $f_1, f_2, \ldots, f_n$ являются отображения

$$f_i : D \to \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Согласно теореме 1, п. 6.9, отображение f имеет при $x \to x_0$ предел $f(x_0) = (f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots, f_n(x_0))$ тогда и только тогда, когда $f_i(x) \to f_i(x_0)$, $i = \overline{1, n}$, при $x \to x_0$. Поэтому отображение f непрерывно в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны все компоненты f_i, $i = \overline{1, n}$.

Теорема 3''. *Если отображения* $f : D \to \mathbb{R}^n$, $g : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$, *непрерывны в области* D, *то в этой области будут непрерывными и отображения*

$$f + g, \ (f, g) \ \text{ и } \ \lambda f, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

◀ Доказательство аналогично доказательству теоремы 3. ▶

Из этой теоремы следует, что множество непрерывных в области D отображений образует векторное пространство, которое обозначим символом $C(D)$. В частности, множество всех непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций образует векторное пространство, обозначаемое сим-

волом $C[a, b]$. При этом функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной на сегменте* $[a, b]$, если она непрерывна на интервале $]a, b[$ и в точке a непрерывна справа, а в точке b — слева.

Пример 4. Показать, что функция

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \text{если} \quad x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \quad \text{и} \quad f(0, 0) = 0$$

терпит разрыв в точке (0, 0), а функция

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \frac{x_1 x_2 \ldots x_m}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2}, \quad \text{если} \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_m \neq 0$$

и $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$, где $m > 2$, является непрерывной в точке $(0, 0, \ldots, 0)$.

Действительно, первая функция терпит разрыв в точке (0, 0), поскольку она не имеет предела в этой точке (см. пример 2, п. 6.7). Непрерывность второй функции следует из того, что $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \to 0$ при $x_1 \to 0$, $x_2 \to 0$, ..., $x_m \to 0$ (см. пример 3, п. 6.7).

Пример 5. Если $x \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, то функции φ_i, $i = \overline{1, m}$, определенные равенствами

$$\varphi_i(x) = x_i \quad x \in \mathbb{R}^m, \ i = \overline{1, m},$$

непрерывны на $\mathbb{R}^m$.

В самом деле, $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^m$ и $\forall\, \varepsilon > 0$ при $\delta = \varepsilon$ из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| = |x_i - x_i^0| \leqslant |x - x_0| < \varepsilon.$$

Отсюда и из теоремы 3′ вытекает, что каждый многочлен, заданный равенством

$$P(x) = \sum b_{n_1 \ldots n_m} x_1^{n_1} \ldots x_m^{n_m}, \tag{5}$$

где $b_{n_1 \ldots n_m} \in \mathbb{R}$, $n_1, \ldots, n_m$ — целые неотрицательные числа, а сумма содержит конечное число слагаемых, является непрерывной на $\mathbb{R}^m$ функцией.

Далее, частное двух многочленов вида (5) непрерывно всюду на $\mathbb{R}$, где знаменатель отличен от нуля.

Пример 6. Полилинейная форма φ (см. равенство (5), п. 3.3), для которой

$$\left| \sum_{i_1 \ldots i_m = 1}^{n} a_{i_1 \ldots i_m} \right| \leqslant M, \quad M > 0,$$

непрерывна на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n = E$ (всего m сомножителей).

Действительно, при этом условии справедливо неравенство

$$|\varphi(x_1, \ldots, x_m)| = \left| \sum_{i_1 \ldots i_m = 1}^{n} a_{i_1 \ldots i_m} x_{i_1} \ldots x_{i_m} \right| \leqslant M\, |x_1| \ldots |x_m|. \tag{6}$$

Поэтому $\forall (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in E$ в силу линейности формы по каждому из аргументов имеем

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) - \varphi(y_1, \ldots, y_m) = \varphi(x_1 - y_1, x_2, \ldots, x_m) + \varphi(y_1, x_2 - y_2, x_3, \ldots, x_m) + \cdots + \varphi(y_1, \ldots, y_{m-1}, x_m - y_m).$$

Отсюда и из (6) получаем оценку

$$|\varphi(x_1, \ldots, x_m) - \varphi(y_1, \ldots, y_m)| \leqslant M\, |x_1 - y_1| \cdot |x_2| \cdots |x_m| + M\, |y_1| \times \times |x_2 - y_2| \cdot |x_3| \cdots |x_m| + \cdots + M\, |y_1| \cdots |y_{m-1}| \cdot |x_m - y_m|. \tag{7}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем $\delta > 0$ такое, что $|x_i - y_i| < \delta \quad \forall i = \overline{1, m}$. Отсюда $|x_i| \leqslant |y_i| + \delta$, $i = \overline{1, m}$. Обозначим $A = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} (|y_i| + \delta)$. Тогда из неравенства (7) получаем оценку

$$|\varphi(x_1, \ldots, x_m) - \varphi(y_1, \ldots, y_m)| \leqslant MA^{m-1} \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i| < MmA^{m-1}\delta.$$

Теперь выберем δ таким, чтобы $\delta < \dfrac{\varepsilon}{MmA^{m-1}}$. При $|x_i - y_i| < \delta$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x_1, \ldots, x_m|) - \varphi(y_1, \ldots, y_m)| < \varepsilon,$$

из которого следует непрерывность полилинейной формы φ на E.

7.2. Точки разрыва функции и их классификация. Особые точки функции.

Определение 1. *Если функция $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ не является непрерывной в точке $x_0 \in \mathcal{D}$, то говорят, что она терпит разрыв в этой точке. При этом точка x_0 называется точкой разрыва функции f.*

Точки разрыва функции f классифицируют следующим образом:

1) Пусть $x_0 \in \mathcal{D}$ — точка разрыва функции f и существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, конечный или бесконечный. При этом:

а) если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ конечный, то назовем точку x_0 *точкой устранимого разрыва* функции f;

б) если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то назовем точку x_0 *точкой разрыва типа полюса.*

2) Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует, то точка $x_0 \in \mathcal{D}$ называется *точкой существенного разрыва* функции f. При этом:

а) если существуют конечные пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода* функции f;

б) все остальные точки существенного разрыва называются *точками разрыва второго рода* функции f.

Следует отметить, что если x_0 — точка устранимого разрыва функции f, то всегда существует непрерывная в точке x_0 функция $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, сужение которой на множество $\mathcal{D} \setminus \{x_0\}$ совпадает с функцией f. Для построения функции g полагаем

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in \mathcal{D} \setminus \{x_0\}, \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x), & \text{если } x = x_0. \end{cases}$$

Определение 2. *Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется кусочно-непрерывной на $[a, b]$, если она непрерывна на сегменте $[a, b]$, исключая, быть может, конечное число точек разрыва первого рода и конечное число точек устранимого разрыва.*

Множество всех кусочно-непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций, очевидно, образует векторное пространство.

Определение 3. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, x_0 — предельная точка множества D. Точка x_0 называется особой точкой функции f, если $x_0 \notin D$.*

Приведем следующую классификацию особых точек функции:

1) Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то x_0 называется *устранимой особой точкой* функции f.

2) Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, то x_0 называем *полюсом* функции f.

3) Если предел функции f в точке x_0 не существует, то назовем x_0 *существенно особой точкой* функции f.

Если x_0 — устранимая особая точка функции f, то, как и в случае устранимой точки разрыва, всегда существует непрерывная в точке x_0 функция $g : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$, сужение которой на D совпадает с функцией f. Для построения функции g полагаем

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in D, \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & \text{если } x = x_0. \end{cases}$$

Пример 1. Показать, что функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ — рационально,} \\ -x, & \text{если } x \text{ — иррационально,} \end{cases}$$

непрерывна только при $x = 0$, причем все остальные точки области определения функции являются точками разрыва второго рода.

В самом деле, если $x = 0$, то $f(0) = 0$ и $\forall\, \varepsilon > 0$ при $|x| < \delta = \varepsilon$ справедливо неравенство $|f(x)| \leqslant |x| < \varepsilon$, из которого вытекает непрерывность функции при $x = 0$. Пусть x_0 — произвольная точка множества $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, а $\{x_n\}$ — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к точке x_0, $\{x'_n\}$ — последовательность иррациональных чисел, сходящаяся к точке x_0. Поскольку при $n \to \infty$ соответствующие последовательности значений функции сходятся к разным пределам

$$f(x_n) = x_n \to x_0, \quad f(x'_n) = -x'_n \to -x_0,$$

то предел функции f при $x \to x_0$ не существует. Поэтому все точки множества $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ являются точками разрыва второго рода.

Пример 2. Рассмотреть функции

$$x \mapsto \frac{\sin x}{x}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2}, \quad x \mapsto \sin\frac{1}{x},$$

областью определения которых является множество $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Здесь точка $x = 0$ является особой точкой для каждой из этих функций. Поскольку

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty,$$

а $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ не существует (см. пример 2, п. 6.1), то точка $x = 0$ для первой функции является устранимой особой точкой, для второй — полюсом, а для третьей — существенно особой точкой. В первом случае в качестве функции $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывной в точке $x = 0$ и имеющей сужение на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, совпадающее с функцией $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, можно принять функцию g, определенную равенством

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Для значений $x \neq 0$ функция g является частным двух непрерывных функций, а потому сама непрерывна. Следовательно, функция g непрерывна при всех значениях x.

7.3. Непрерывность монотонной функции. Рассмотрим некоторые свойства монотонных функций, имеющие большое применение как в теории, так и на практике.

Теорема 1. *Монотонная на интервале* $]a, b[$ *функция* f *может иметь не более чем счетное множество точек разрыва.*

◀ Предположим для определенности, что функция $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ неубывающая на $]a, b[$. Пусть E — множество точек разрыва функции f. Каждой точке $x \in E$ сопоставим такое рациональное число $r(x)$, что

$$f(x-0) < r(x) < f(x+0).$$

Ясно, что $r(x_1) \neq r(x_2)$, если $x_1 \neq x_2$, так как при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1+0) < f(x_2-0)$. Таким образом, между множеством E и подмножеством множества всех рациональных чисел установлено взаимно-однозначное соответствие. А так как всякая часть множества рациональных чисел не более чем счетна, то множество точек разрыва монотонной функции не более чем счетно. ▶

Теорема 2. *Если строго монотонная функция* $f :]a, b[\to]c, d[$ *сюръективна, т. е. если* $f(]a, b[) =]c, d[$, *то* f *— непрерывна на* $]a, b[$.

◀ Для доказательства предположим обратное, т. е. что функция f имеет разрыв в точке $x_0 \in]a, b[$. При этом в случае возрастающей функции следует, что $f(x_0-0) < f(x_0+0)$. А тогда функция f не может принимать значения, содержащиеся между числами $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$, что противоречит условию. ▶

Следствие 1. *Если функция* $f : [a, b] \to [c, d]$ *строго монотонна и* $f([a, b]) = [c, d]$, *то функция* f *непрерывна на сегменте* $[a, b]$.

◀ Пусть функция f возрастает. Тогда $c \leqslant f(x) \leqslant d$. Очевидно, $f(a) = c$, $f(b) = d$, так как в противном случае не могло бы выполняться равенство $f([a, b]) = [c, d]$.

Согласно теореме, функция f непрерывна на интервале $]a, b[$. Необходимо доказать, что функция f непрерывна в точке $x = a$ справа, а в точке $x = b$ — слева. Если предположить, что функция f терпит разрыв, например, при $x = b$, то, поскольку $f(b-0)$ существует, непременно должно выполняться неравенство $f(b-0) < f(b)$. Таким образом, приходим к выводу, что функция f не может принимать значения, лежащие между $f(b-0)$ и $f(b)$, что противоречит условию. ▶

Следствие 2. *Теорема справедлива, если интервал заменить на полуинтервал.*

7.4. Непрерывность функциональной матрицы. Рассмотрим отображение A области $D \subset \mathbb{R}^k$ в $\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — векторное нормированное пространство, элементами которого являются матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \dots & a_{mn}(x) \end{pmatrix}$$

размерности $m \times n$, которые кратко обозначим символом $(a_{ij}(x))$, так что $A(x) = (a_{ij}(x))$, $x \in D$.

Согласно определению 1, п. 7.1, отображение $A: x \to (a_{ij}(x))$ непрерывно в точке $x_0 \in D$, если

$$\lim_{x \to x_0} (a_{ij}(x)) = (a_{ij}(x_0)).$$

Доказано (теорема 2, п. 6.9), что при $x \to x_0$ матрица $(a_{ij}(x))$ имеет своим пределом матрицу $(a_{ij}(x_0))$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \to x_0} a_{ij}(x) = a_{ij}(x_0), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Таким образом, функциональная матрица $x \to (a_{ij}(x))$, $x \in D$, непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны все ее элементы $a_{ij}: D \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Непосредственно из теоремы 2, п. 6.9, вытекают следующие утверждения:

а) *если функциональные матрицы* $x \to A(x)$, $x \to B(x)$, $x \in D$, *непрерывны в* D *(одинакового размера), то их сумма* $x \to (A + B)(x)$ *также является непрерывной матрицей;*

б) *если непрерывные в* D *функциональные матрицы* A *и* B *таких размеров, что для них определены произведения*

$$x \to A(x) B(x), \quad x \to A(x) \beta(x), \quad x \in D,$$

где β *— непрерывная в* D *вектор-функция, то эти произведения непрерывны в* D.

Рассмотрим функциональный определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

где $x \in D$. В каждой точке $x \in D$ он равен сумме $n!$ слагаемых, каждое из которых является произведением n сомножителей, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Поэтому, если элементы определителя непрерывны в D, то он является непрерывной в D функцией. Если квадратная матрица непрерывна в D, то соответствующий ей определитель также будет непрерывен в области D.

7.5. Критерий непрерывности функции. Рассмотрим необходимое и достаточное условие непрерывности числовой функции в точке. С этой целью введем понятие колебания числовой функции в области $D \subset E$, где E — метрическое пространство.

Пусть $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset E$, $m(D) = \inf\limits_{x \in D} f(x)$, $M(D) = \sup\limits_{x \in D} f(x)$.

Определение 1. *Колебанием* $\omega(f(D))$ *функции* f *в области* D *называется разность (конечная или бесконечная)*

$$\omega(f(D)) = M(D) - m(D).$$

Если $M(D) = +\infty$ или $m(D) = -\infty$, то говорят, что функция f имеет бесконечное колебание в области D.

Теорема 1. *Если существует положительное число* $C \in \mathbb{R}$ *такое, что* $\forall x, y \in D$ *выполняется неравенство*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C, \tag{1}$$

то функция f *имеет конечное колебание в области* D, *причем*

$$\omega(f(D)) = \sup_{x,y \in D} \{|f(x) - f(y)|\}.$$

◀ Запишем неравенство (1) в виде

$$f(y) - C \leqslant f(x) \leqslant f(y) + C. \tag{2}$$

Фиксируем произвольное $y \in D$, а x заставим пробегать всю область D. Тогда из неравенств (2) следует, что функция f ограничена в D, а поэтому существуют конечные грани

$$m(D) = \inf_{x \in D} f(x), \quad M(D) = \sup_{x \in D} f(x).$$

Из свойств точных граней следует, что $\forall \varepsilon_n$, $\varepsilon_n = \frac{1}{2n}$, $\exists\, x_n$, $y_n \in D$, для которых

$$M(D) - \frac{1}{2n} < f(x_n) \leqslant M(D), \tag{3}$$

$$m(D) \leqslant f(y_n) < m(D) + \frac{1}{2n}. \tag{4}$$

Из неравенств (1), (3), (4) получаем неравенства

$$M(D) - m(D) - \frac{1}{n} < f(x_n) - f(y_n) \leqslant C,$$

из которых следует, что $\omega(f(D)) - \frac{1}{n} < C$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $\omega(f(D)) \leqslant C$. Таким образом, если C — произвольная верхняя грань множества $\{|f(x) - f(y)|\}$, $x, y \in D$, то всегда $\omega(f(D)) \leqslant C$. Из неравенств $m(D) \leqslant f(x) \leqslant M(D)$, $m(D) \leqslant f(y) \leqslant M(D)$ следует неравенство $|f(x) - f(y)| \leqslant M(D) - m(D) = \omega(f(D))$, т. е. $\omega(f(D))$ также является верхней гранью множества $\{|f(x) - f(y)|\}$. А из неравенства $\omega(f(D)) \leqslant C$ следует, что $\omega(f(D))$ наименьшая верхняя грань, т. е. $\omega(f(D)) = \sup_{x,y \in D} \{|f(x) - f(y)|\}$. ▶

Теорема 2 (критерий Бэра). *Функция* f *непрерывна в точке* $x_0 \in D$ *тогда и только тогда, когда* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ *такое, что в окрестности* $S(x_0, \delta)$ *колебание* $\omega(f(S(x_0, \delta))) < \varepsilon$.

◀ Пусть f непрерывна в точке $x_0 \in D$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x, y \in S(x_0, \delta)$ выполняются неравенства

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |f(x_0) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4};$$

отсюда

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\omega(f(S(x_0, \delta))) = \sup_{x,y \in S(x_0,\delta)} \{|f(x) - f(y)|\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Пусть теперь $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in S(x_0, \delta)$ выполняется неравенство $\omega(f(S(x_0, \delta))) < \varepsilon$. Тогда для этих значений x имеем

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \sup_{x \in S(x_0, \delta)} \{|f(x) - f(x_0)|\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x, y \in S(x_0, \delta)} \{|f(x) - f(y)|\} = \omega(f(S(x_0, \delta))) < \varepsilon. \blacktriangleright$$

Определение 2. *Верхним пределом* $\bar{f}(x_0)$ *функции* f *в точке* $x_0 \in D$ *называется величина (конечная или бесконечная)*

$$\bar{f}(x_0) = \lim_{\delta \to +0} \sup_{x \in S(x_0, \delta)} f(x). \tag{5}$$

Аналогично, *нижним пределом функции* f *в точке* $x_0 \in D$ *называется величина*

$$\underline{f}(x_0) = \lim_{\delta \to +0} \inf_{x \in S(x_0, \delta)} f(x). \tag{6}$$

Функция $\delta \mapsto M(S(x_0, \delta)) = \sup\limits_{x \in S(x_0, \delta)} f(x)$ не возрастает, а функция $\delta \mapsto m(S(x_0, \delta)) = \inf\limits_{x \in S(x_0, \delta)} f(x)$ не убывает при убывании δ; при этом выполняется неравенство

$$m(S(x_0, \delta)) \leqslant M(S(x_0, \delta)).$$

Если $m(S(x_0, \delta))$ ограничено снизу, а $M(S(x_0, \delta))$ — сверху, то, согласно теореме 4, п. 6.4, существуют конечные пределы (5) и (6).

Определение 3. *Колебанием* $\omega(f(x_0))$ *функции* f *в точке* x_0 *называется разность*

$$\bar{f}(x_0) - \underline{f}(x_0).$$

Очевидно,

$$\omega(f(x_0)) = \lim_{\delta \to +0} M(f(S(x_0, \delta))) - \lim_{\delta \to +0} m(f(S(x_0, \delta))) =$$

$$= \lim_{\delta \to +0} (M(f(S(x_0, \delta))) - m(f(S(x_0, \delta)))) = \lim_{\delta \to +0} \omega(f(S(x_0, \delta))).$$

Таким образом, колебание функции f в точке x_0 является *пределом колебания* функции f в шаре $S(x_0, \delta)$ с центром в точке x_0 и радиусом δ при условии, что радиус шара δ стремится к нулю.

Из теоремы 2 непосредственно следует следующее утверждение, которое сформулируем в виде следствия.

Следствие. *Функция* f *непрерывна в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда ее колебание в этой точке равно нулю, т. е.* $\omega(f(x_0)) = 0$; *другими словами: функция* f *непрерывна в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда в этой точке верхний и нижний пределы функции* f *совпадают, т. е.*

$$\bar{f}(x_0) = \underline{f}(x_0).$$

Теперь установим нелокальный критерий непрерывности.

Теорема 3. *Для того чтобы отображение* f *метрического пространства* E *в метрическое пространство* F *было непрерывным, необходимо*

и достаточно, чтобы прообраз при отображении f любой открытой части в F был открытой частью в E.

◀ *Необходимость.* Предположим, что f непрерывно на E, Y открытое множество в F. Покажем, что $f^{-1}(Y)$ открыто. Так как Y открыто, то $\forall x_0 \in f^{-1}(Y)$ $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $S(f(x_0), \varepsilon) \subset Y$, а так как отображение f непрерывно, то $\forall \varepsilon > 0$, в частности для ε указанного выше, $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in S(x_0, \delta)$ $f(x) \in S(f(x_0), \varepsilon)$.

Таким образом, $x \in f^{-1}(Y)$, $f^{-1}(Y) = \{x \in E : f(x) \in Y\}$, как только $x \in S(x_0, \delta)$. Следовательно, $x_0 \in f^{-1}(Y)$ вместе с некоторой окрестностью $S(x_0, \delta)$.

Достаточность. Пусть $f^{-1}(Y)$ открыто в E для всякого открытого множества Y из E. Для фиксированного $x_0 \in E$ и $\forall \varepsilon > 0$ рассмотрим открытый шар $S(f(x_0), \varepsilon)$. Множество $Y = S(f(x_0), \varepsilon)$ открыто, а поэтому и $f^{-1}(Y)$ открыто; значит, $\exists \delta > 0$ такое, что $x \in f^{-1}(Y)$, $f^{-1}(Y) = \{x \in E : f(x) \in Y\}$, как только $x \in S(x_0, \delta)$. Но если $x \in f^{-1}(Y)$, то $f(x) \in Y$, т. е. $f(x) \in S(f(x_0), \varepsilon)$ при $x \in S(x_0, \delta)$, или f непрерывно в точке x_0. А так как x_0 произвольная точка множества E, то f непрерывна на E. ▶

Пусть D область в метрическом пространстве E. Как уже отмечалось ранее, отображение $f : D \to F$ непрерывно в D, если оно непрерывно в каждой точке области D. Если область D объединить с ее границей L_D, то получим замыкание $\overline{D}$ множества D (см. п. 5.2), которое называют *замкнутой областью.*

Определение 3. *Отображение $f : \overline{D} \to F$ называется непрерывным в замкнутой области $\overline{D}$, если оно непрерывно как в каждой внутренней точке, т. е. в области D, так и в каждой точке границы L_D области $\overline{D}$. Отображение f называется непрерывным в точке $x_0 \in L_D$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in S(x_0, \delta) \cap \overline{D}$ выполняется неравенство*

$$\rho_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Если множество $D \subset E$ не является областью (например, не является связным множеством), то это множество, как часть метрического пространства E, само является метрическим пространством с метрикой индуцированной метрикой пространства E. Поэтому определение непрерывности отображения f на множестве D остается прежним.

Однако имеются некоторые различия в форме записи окрестности точки $x_0 \in D$. Если множество D не является связным, то окрестность $S_D(x_0, \delta)$ точки x_0 в множестве D определяется равенством

$$S_D(x_0, \delta) = \{x \in D : \rho_E(x, x_0) < \delta\}.$$

Окрестность этой же точки x_0, как точки множества E, определяется равенством

$$S_E(x_0, \delta) = \{x \in E : \rho_E(x, x_0) < \delta\}.$$

Ясно, что

$$S_D(x_0, \delta) \subset S_E(x_0, \delta). \tag{7}$$

Окрестность $S_D(x_0, \delta)$ можно записать и в другой форме

$$S_D(x_0, \delta) = S_E(x_0, \delta) \cap D.$$

Учитывая это, дадим определение непрерывности отображения $f : D \to F$ в точке $x_0 \in D$, где D — не связное множество.

Определение 4. *Отображение f называется непрерывным в точке $x_0 \in D$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in S_D(x_0, \delta)$ выполняется неравенство*

$$\rho_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon. \tag{8}$$

Заметим, что если отображение $f : E \to F$ непрерывно на E, то сужение его $f \mid D$ на любое (даже на не связное) множество D также непрерывно.

Это следует из того, что если неравенство (8) выполняется $\forall x \in S_E(x_0, \delta)$, то в силу включения (7) оно остается справедливым и $\forall x \in S_D(x_0, \delta)$.

Отметим также, что отображение $f : E \to F$ может терпеть разрыв в каждой точке множества E, а его сужение $f \mid D$ на множество $D \subset E$ может быть непрерывным на множестве D (или в некоторых его точках).

Например, функция Дирихле

$$\chi : x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально} \end{cases}$$

терпит разрыв в каждой точке пространства $\mathbb{R}$.

Однако ее сужение $\chi \mid \mathbb{Q} : x \mapsto 1$, $x \in \mathbb{Q}$, на множество рациональных точек $\mathbb{Q}$ и ее сужение $\chi \mid (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) : x \mapsto 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, на множество иррациональных точек непрерывны соответственно на $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

7.6. Свойства непрерывных функций. Изучим сначала свойства, присущие всем непрерывным функциям различной природы. При этом свойства числовых функций скалярного аргумента вытекают из соответствующих свойств более общих функций и отображений. Этим избежим повторения доказательств.

Сначала установим некоторые локальные свойства непрерывных функций.

Теорема 1. *Непрерывное в точке $x_0 \in D$ отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$, ограничено в некоторой окрестности этой точки.*

◀ Если отображение f непрерывно в точке $x_0 \in D$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $f(S(x_0, \delta)) \subset S(f(x_0), \varepsilon)$, а это означает, что $\forall x \in S(x_0, \delta)$

$$\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon. \ \blacktriangleright \tag{1}$$

Следствие. *Если $n = 1$, т. е. для случая непрерывной в точке $x_0 \in D$ числовой функции $f : D \to \mathbb{R}$, неравенство (1), справедливое $\forall x \in S(x_0, \delta)$, принимает вид*

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon. \tag{2}$$

Теорема 2. *Если числовая функция $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, непрерывна в точке $x_0 \in D$ и $f(x_0) \neq 0$, то существует такая окрестность*

$S(x_0, \delta)$ *точки* x_0, *что* $\forall x \in S(x_0, \delta)$ $f(x) < 0$, *если* $f(x_0) < 0$ *и* $f(x) > 0$, *если* $f(x_0) > 0$.

◀ Из условия следует, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in S(x_0, \delta)$ выполняется неравенство (2), где $f(x_0) \neq 0$. Если выбрать $\varepsilon < |f(x_0)|$, то $\forall x \in S(x_0, \delta)$ числа $f(x_0) - \varepsilon$, $f(x)$, $f(x_0) + \varepsilon$ имеют один и тот же знак, совпадающий со знаком числа $f(x_0)$. ▶

Из доказанной теоремы следует, что если значение непрерывной в точке x_0 функции f положительно (отрицательно), то оно остается таким же для всех значений $f(x)$ из некоторой окрестности точки $f(x_0)$. Поэтому теорему называют *теоремой об устойчивости знака непрерывной функции*.

Перейдем теперь к изучению глобальных свойств непрерывных функций. Сначала установим зависимость между понятиями непрерывности и связности.

Теорема 3. *Если f непрерывное отображение связной области D метрического пространства E в метрическое пространство F, то множество $f(D)$ связно.*

◀ Предположим обратное, т. е. что множество $f(D)$ несвязно. Тогда множество $f(D)$ можно разбить на две открытые непересекающиеся части A и B. Поскольку f непрерывно, то множества $f^{-1}(A) = \{x \in E : f(x) \in A\}$, $f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}$ открыты (теорема 3, п. 7.5) и объединение их совпадает с множеством D. При этом их пересечение пусто, поскольку пусто пересечение множеств A и B. Но это означает, что множество D несвязно, вопреки предположению. ▶

Следствие. *Если D связное множество метрического пространства E, а функция $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ непрерывна, то $f(D)$ является интервалом, полуинтервалом или сегментом.*

◀ Действительно, поскольку f непрерывная функция, а множество D связно, то, согласно доказанной теореме, множество $f(D)$ связно, а поэтому (теорема п. 5.5) является одним из множеств: интервалом, полуинтервалом или сегментом. ▶

Полученное следствие является свойством непрерывных функций принимать все промежуточные значения. Суть его состоит в том, что непрерывная на связном множестве числовая функция вместе с любыми своими двумя значениями принимает также все промежуточные значения.

Теорема 4 (К о ш и). *Если функция $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$, непрерывна на интервале $\mathcal{J}$ и в двух точках $x = a$, $x = b$ этого интервала принимает разные значения $f(a) = A$, $f(b) = B$, то для произвольного числа C, лежащего между A и B $\exists \xi \in]a, b[$, что $f(\xi) = C$.*

В частности, если между A и B содержится число нуль, то $\exists \eta \in]a, b[$ такое, что $f(\eta) = 0$.

Приведенную теорему часто применяют в качестве простого доказательства существования корня уравнения $f(x) = 0$. Например, покажем, что уравнение $e^x + 2x - 2 = 0$ имеет положительный корень. Действительно, непрерывная функция $f : x \mapsto e^x + 2x - 2$, $x \in$

$\in \mathbb{R}$, в точках $x = 0$ и $x = 1$ принимает значения различных знаков: $f(0) = -2$, $f(1) = e$. Интервал $]-2, e[$ содержит точку нуль, которая является значением функции в некоторой точке, т. е. $\exists \eta \in]0, 1[$ такая, что $f(\eta) = 0$.

Определение 1. *Дугой, соединяющей точки a и b метрического пространства E, называется такое непрерывное отображение f сегмента $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ в E, что $f(\alpha) = a$, $f(\beta) = b$.*

При этом точки a и b называются *началом* и *концом дуги*.

Теорема 5. *Если любые две точки метрического пространства E можно соединить некоторой дугой, то E связно.*

◀ Если это не так, то E можно разбить на два открытых непустых множества A и B, имеющие пустое пересечение. Пусть $a \in A$, $b \in B$. По предположению точки a и b можно соединить некоторой дугой. Пусть K — образ сегмента $[\alpha, \beta]$ при отображении f. Тогда $K \cap A$ и $K \cap B$ открытые множества (теорема 4, п. 5.1) и оба непустые, поскольку содержат точки a и b соответственно. Мы получили разбиение множества K на два открытых непересекающих множества, что противоречит теореме 3, в которой утверждалось, что образ связного множества $[\alpha, \beta]$ при непрерывном отображении является связным. ▶

Определение 2. *Пространство линейно связно, если любые две его точки могут быть соединены некоторой дугой.*

Из последней теоремы следует, что из линейной связности вытекает связность. Используя связность множества значений непрерывной функции, можно получить условия, при которых существует обратная непрерывная функция.

Теорема 6. *Пусть $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ — одно из множеств $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$, где a и b — числа или символы $-\infty$, $+\infty$.*

Если $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ строго монотонная, непрерывная функция, то образ $f(X) \subset \overline{\mathbb{R}}$ является связным множеством того же типа, что и X. Существует обратная функция $f^{-1}: f(X) \to X$ также строго монотонная и непрерывная на множестве $f(X)$.

◀ Доказательство теоремы будем проводить для случая возрастающей функции; если функция убывает, поступаем аналогично.

Пусть $X = [a, b]$. Обозначим $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$. Из непрерывности функции f на сегменте $[a, b]$, теоремы 3 и ее следствия вытекает, что $f([a, b]) = [\alpha, \beta]$, т. е. каждая точка сегмента $[\alpha, \beta]$ является значением функции при некотором $x \in [a, b]$. Обозначим $[\alpha, \beta] = \{y \in \mathbb{R} : \alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$; тогда $\forall y \in [\alpha, \beta]$ $\exists x \in [a, b]$ такое, что $f(x) = y$. Поэтому существует функция $f^{-1}: [\alpha, \beta] \to [a, b]$, которая каждому $y \in [\alpha, \beta]$ ставит в соответствие то значение $x \in [a, b]$, для которого $f(x) = y$. Покажем, что функция f^{-1} возрастает на $[\alpha, \beta]$. Пусть $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Если $y_1 = f(x_1) < f(x_2) = y_2$, то $x_1 < x_2$, так как если бы $x_1 > x_2$ или $x_1 = x_2$, то в связи с возрастанием f выполнялось бы неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ или $f(x_1) = f(x_2)$. Таким образом, из неравенства $y_1 < y_2$ вытекает, что $x_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) = x_2$ и, тем самым, возрастание функции f^{-1} установлено.

Функция f^{-1} непрерывна на $[\alpha, \beta]$, так как она возрастает на этом сегменте и множество ее значений сплошь заполняет сегмент $[a, b]$ (см. следствие 2 из теоремы 2, п. 7.3).

Пусть теперь $X = [a, b[$. Обозначим $f(a) = \alpha$, $f(b-0) = \beta$. В силу возрастания функции f и теоремы 4, п. 6. 4, $f(b-0) = \sup\limits_{[a,b[} \{f(x)\}$. Отсюда заключаем, что $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta \ \forall x \in [a, b[$. На самом деле $\alpha \leqslant f(x) < \beta \quad \forall x \in [a, b[$, так как если бы $\exists x_0 \in [a, b[$ такое, что $f(x_0) = \beta$, то в связи со строгой монотонностью $f \quad \forall x \in]x_0, b[$ выполнялось бы неравенство $f(x) > f(x_0) = \beta$, что противоречило бы определению числа β. Таким образом, $\forall x \in [a, b[$ имеем $\alpha \leqslant f(x) < \beta$. Более того, согласно теореме 3, имеем $f([a, b[) = [\alpha, \beta[$. Если обозначить $[\alpha, \beta[= \{y \in \overline{\mathbb{R}} : \alpha \leqslant y < \beta\}$, то $\forall y \in [\alpha, \beta[\ \exists x \in [a, b[$ такое, что $f(x) = y$. Поэтому существует функция $f^{-1} : [\alpha, \beta[\to [a, b[$. Как и в случае, когда $X = [a, b]$, показываем, что эта функция возрастает и непрерывна на $[\alpha, \beta[$.

Аналогично поступаем, когда $X =]a, b]$ или $X =]a, b[$. ▶

Из этой теоремы следует, что если функция $f : X \to f(X)$, $X \in \overline{\mathbb{R}}$, $f(X) \subset \overline{\mathbb{R}}$, имеет обратную функцию $f^{-1} : f(X) \to X$, то

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in X,$$

$$f(f^{-1}(f(x))) = f(x) \quad \forall f(x) \in f(X).$$

Теорема 7 (первая теорема Вейерштрасса). *Если функция $f : \bar{D} \to \mathbb{R}$, $\bar{D} \subset \mathbb{R}^m$, непрерывна в замкнутой ограниченной области $\bar{D}$, то она ограничена в этой области, т. е. $\exists m, M \in \mathbb{R}$ такие, что $\forall \boldsymbol{x} \in \bar{D}$ выполняется неравенство*

$$m \leqslant f(\boldsymbol{x}) \leqslant M.$$

◀ Докажем, что функция f ограничена сверху; ограниченность снизу доказывается аналогично. Предположим обратное; тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists \boldsymbol{x}_n \in \bar{D}$ такое, что

$$|f(\boldsymbol{x}_n)| > n. \tag{3}$$

Поскольку область $\bar{D}$ ограничена, то последовательность $\{\boldsymbol{x}_n\}$ также ограничена. А тогда, согласно теореме 2, п. 4.8, из ограниченной последовательности $\{\boldsymbol{x}_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}$, которая сходится к точке $\boldsymbol{x}_0$. Эта точка является предельной точкой области $\bar{D}$, а так как $\bar{D}$ замкнута, то $\boldsymbol{x}_0 \in \bar{D}$. В силу непрерывности функции f в точке $\boldsymbol{x}_0$ имеем

$$f(\boldsymbol{x}_{n_k}) \to f(\boldsymbol{x}) \text{ при } n_k \to \infty,$$

а это противоречит предположению (3). ▶

Теорема 8 (вторая теорема Вейерштрасса). *Если $f : \bar{D} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $\bar{D} \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная замкнутая область, а*

$$M = \sup_{\boldsymbol{x} \in \bar{D}} f(\boldsymbol{x}), \quad m = \inf_{\boldsymbol{x} \in \bar{D}} f(\boldsymbol{x}),$$

то существуют по меньшей мере две такие точки $x_M \in \overline{D}$, $x_m \in \overline{D}$, *что*

$$f(x_M) = M, \quad f(x_m) = m. \tag{4}$$

Другими словами: *непрерывная в замкнутой ограниченной области* $\overline{D}$ *функция* f *достигает своих точной верхней и точной нижней граней.*

◀ Для доказательства теоремы предположим обратное, т. е. что, например, $f(x) < M \quad \forall x \in \overline{D}$. Тогда функция g, определенная равенством

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}, \quad x \in \overline{D},$$

является непрерывной, как частное непрерывных функций со знаменателем, отличным от нуля. Согласно предыдущей теореме, функция g ограничена сверху некоторым числом μ, причем $\mu > 0$, так как $M - f(x) > 0$. Следовательно,

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leqslant \mu \quad \forall x \in \overline{D}.$$

Отсюда получаем неравенство $f(x) \leqslant M - \frac{1}{\mu}$, противоречащее определению числа M. Источник противоречия в предположении, что не существует точек $x_M \in \overline{D}$ и $x_m \in \overline{D}$, в которых выполнялись бы равенства (4). ▶

Теорема 9. *Непрерывное отображение* $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, *ограничено в замкнутой ограниченной области* $\overline{D}$ *тогда и только тогда, когда каждая из функций* $f_i : \overline{D} \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, *ограничена.*

◀ Пусть отображение f ограничено в $\overline{D}$, т. е. $\exists M \in \mathbb{R}$ такое, что

$$|f(x)| \leqslant M \quad \forall x \in \overline{D}.$$

Тогда ограниченность каждой из функций f_i, $i = \overline{1, n}$, вытекает из неравенства

$$|f_i(x)| \leqslant |f(x)|, \quad x \in \overline{D},$$

справедливого для любой из введенных норм в $\mathbb{R}^n$.

Пусть теперь каждая из функций f_i ограничена, например, числом M_i, $i = \overline{1, n}$. Тогда, если $|f(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i^2(x)}$, то

$$|f(x)| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} M_i^2} = M \quad \forall x \in \overline{D}. \ ▶$$

7.7. Равномерная непрерывность.

Определение 1. *Функция* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, *называется равномерно-непрерывной в области* D, *если* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ *такое, что* $\forall x \in D \wedge \forall y \in D$, *удовлетворяющих условию*

$$|x - y| < \delta, \tag{1}$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Внешне определение равномерной непрерывности похоже на определение непрерывности на «языке ε — δ». Однако имеется существенное различие. Во-первых, свойство функции быть равномерно-непрерывной является глобальным свойством, в то время как непрерывностью функция может обладать только в одной точке. Во-вторых, число δ, участвующее в определении непрерывности функции в каждой точке из области D, зависит не только от ε, но и от самой точки (разным точкам, вообще говоря, соответствуют разные δ). Если же функция f равномерно-непрерывна в области D, то, как следует из определения, число δ зависит только от заданного ε и не зависит от x (в определении участвует вся область, а не отдельные ее точки). Ясно, что если функция равномерно-непрерывна в области D, то она является непрерывной в каждой точке этой области.

Заметим, что если функция f не является равномерно-непрерывной в области D, то $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\forall \delta > 0$ $\exists x, y \in D$ такие, что $|x - y| < \delta$, однако $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$.

Пример 1. Показать, что функция $f: x \mapsto x + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, равномерно-непрерывная.

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ задано. Тогда

$$|f(x) - f(y)| = |x + \sin x - y - \sin y| \leqslant |x - y| + |\sin x - \sin y| = |x - y| + \left| 2 \sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2} \right| \leqslant |x - y| + |x - y| = 2|x - y| < \varepsilon,$$

если $|x - y| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Итак, среди неограниченных в области определения функций могут встречаться равномерно-непрерывные.

Пример 2. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f: x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $x \geqslant 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Если x и y такие, что

$$0 \leqslant x < \varepsilon^3, \quad 0 \leqslant y < \varepsilon^3, \tag{3}$$

то $|x - y| < \varepsilon^3 = \delta$ и $0 \leqslant \sqrt[3]{x} < \varepsilon$, $0 \leqslant \sqrt[3]{y} < \varepsilon$. Отсюда следует, что $|f(x) - f(y)| = |\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| < \varepsilon$. Если же условия (3) не выполняются, т. е. хотя бы одно из чисел x и y не меньше ε^3, то $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} > \varepsilon^2$. Тогда

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} < \frac{|x - y|}{\varepsilon^2} < \varepsilon,$$

как только $|x - y| < \varepsilon^3 = \delta$. Таким образом, $|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| < \varepsilon$, если $|x - y| < \varepsilon^3 = \delta$.

Пример 3. Показать, что функция $x \mapsto \ln x$, $0 < x < 1$, не является равномерно-непрерывной на интервале $]0, 1[$.

В самом деле, пусть $x_n = e^{-n}$, $y_n = e^{-2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $|y_n - x_n| \to 0$ при $n \to \infty$, то разность $|y_n - x_n|$ может стать меньше любого положительного числа. Однако

$$|\ln x_n - \ln y_n| = n \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

и, следовательно, не может быть меньше произвольного $\varepsilon > 0$.

Пример 4. Показать, что функция двух переменных $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ не является равномерно-непрерывной.

Для доказательства рассмотрим две последовательности точек

$$x_n = \left(n^2 + \frac{1}{n},\ n^2 + \frac{1}{n}\right),\quad y_n = (n^2,\ n^2),\quad n \in \mathbb{N},$$

пространства $\mathbb{R}^2$. Расстояние между этими точками

$$|x_n - y_n| = \frac{\sqrt{2}}{n}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$, а разность значений функции

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left|\left(n^2 + \frac{1}{n}\right)^2 - n^4\right| = 2n + \frac{1}{n^2}$$

стремится в бесконечность при $n \to \infty$. Поэтому функция f не является равномерно-непрерывной.

Последние два примера указывают на то, что непрерывная в области D функция может не быть равномерно-непрерывной. В каких случаях из непрерывности функции f следует ее равномерная непрерывность, устанавливает следующая теорема.

Теорема 1 (К а н т о р а). *Если функция* $f : \bar{D} \to \mathbb{R}$, $\bar{D} \subset \mathbb{R}^m$, *непрерывна в замкнутой ограниченной области* $\bar{D}$, *то она равномерно-непрерывна в этой области.*

◀ Применим метод доказательства от противного. Пусть $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\forall \delta > 0$ $\exists x, y \in \bar{D}$ такие, что $|x - y| < \delta$, однако $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$. Пусть $\{\delta_n\}$ — произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю при $n \to \infty$. Согласно предположению $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n, y_n \in \bar{D}$ такие, что $|x_n - y_n| < \delta$, однако

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Из ограниченной последовательности $\{x_n\}$, согласно теореме 2, п. 4.8, можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к точке x_0. В силу замкнутости области $\bar{D}$ $x_0 \in \bar{D}$, а поскольку $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, то из неравенства

$$|x_0 - y_{n_k}| \leqslant |x_0 - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}|$$

следует, что $y_{n_k} \to x_0$ при $k \to \infty$.

В силу непрерывности функции f в точке $x_0 \in \bar{D}$ из условий $x_{n_k} \to x_0$, $y_{n_k} \to x_0$ при $k \to \infty$ вытекает

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0),\ f(y_{n_k}) \to f(x_0),$$

так что

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

А это противоречит неравенству (4), полученному исходя из предположения, что функция f не является равномерно-непрерывной в области $\bar{D}$. ▶

При доказательстве этой теоремы использовано условие, что область $\bar{D}$ замкнута. Если в условии теоремы замкнутую область $\bar{D}$ заме-

нить на открытую ограниченную область D, то последовательность $\{x_n\}$, участвующая в доказательстве теоремы, будет оставаться ограниченной и из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Эта подпоследовательность сходится к точке $x_0 \in \mathbb{R}^m$, которая являясь предельной точкой области D, может и не принадлежать этой области. Поэтому не смогли бы получить противоречие. Рассмотренные примеры показывают, что в открытой ограниченной области функция может и не быть равномерно-непрерывной.

Пусть A — часть множества E. *Диаметром множества* называется точная верхняя грань множества всех расстояний между всевозможными парами точек этого множества.

Следствие. *Если числовая функция f непрерывна в замкнутой ограниченной области $\bar{D} \subset \mathbb{R}^m$, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что для любого разбиения области $\bar{D}$ на замкнутые части $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \ldots, \bar{D}_n$ без общих внутренних точек с диаметрами, меньшими δ, колебания ω_i, $i = \overline{1, n}$, функции f на $\bar{D}_i$, $i = \overline{1, n}$, будут меньшими ε.*

◀ Согласно теореме, функция f равномерно-непрерывна в замкнутой ограниченной области $\bar{D}$. Поэтому $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x, y \in D$, удовлетворяющих условию (1), выполняется неравенство (2). Поскольку диаметр частей $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \ldots, \bar{D}_n$ меньше δ, то расстояние между любыми двумя точками из $\bar{D}_i$ удовлетворяет условию (1), а тогда выполнено и неравенство (2). Если точки $x, y \in \bar{D}_i$ выбрать так, что $f(x)$ равно точной верхней грани функции f в $\bar{D}_i$, а $f(y)$ — точной нижней грани, то тогда колебание ω_i функции f в $\bar{D}_i$ будет меньшим ε. ▶

Определение 2. *Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$, называется равномерно-непрерывным в D, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in D$, удовлетворяющих условию*

$$|x - y| < \delta, \tag{5}$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{6}$$

Теорема 2. *Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, равномерно-непрерывно тогда и только тогда, когда каждая из функций*

$$f_i : D \to \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, n},$$

является равномерно-непрерывной в D.

◀ Если отображение f равномерно-непрерывно в D, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x, y \in D$, удовлетворяющих неравенству (5), выполняется неравенство (6). Тогда каждая из функций f_i, $i = \overline{1, n}$, равномерно-непрерывна в силу неравенств

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leqslant |f(x) - f(y)|,$$

непосредственно вытекающих из определения нормы в $\mathbb{R}^n$.

Обратно, если каждая из функций f_i равномерно-непрерывна, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x, \ y \in D \wedge |x - y| < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},$$

$i = \overline{1, n}$. Отсюда при указанных условиях

$$|f(x) - f(y)| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - f_i(y)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon. \blacktriangleright$$

Пусть E и F — произвольные метрические пространства, а $D \subset E$.

Определение 3. *Отображение $f : D \to F$ равномерно-непрерывно на D, если* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что

$$\forall x, y \in D \wedge \rho_E(x, y) < \delta \Rightarrow \rho_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Определение 4. *Отображение $f : D \to F$ удовлетворяет условию Гельдера или условию Липшица порядка α, $0 < \alpha \leqslant 1$, если $\exists k \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall x, y \in D$ выполняется неравенство*

$$\rho_F(f(x), f(y)) \leqslant k(\rho_E(x, y))^{\alpha}. \tag{7}$$

Если $\alpha = 1$, то отображение f удовлетворяет условию Липшица.

Теорема 3. *Отображение, удовлетворяющее условию Гельдера порядка α и тем более условию Липшица, равномерно-непрерывно.*

◀ Пусть отображение $f : D \to F$, $D \subset E$, удовлетворяет условию Гельдера порядка α. Если $k = 0$, то утверждение очевидно. В случае, когда $k > 0$, $\forall \varepsilon > 0$ положим $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Тогда $\forall x, y \in D \wedge \rho_E(x, y) < \delta$, согласно неравенству (7), получаем $\rho_F(f(x), f(y)) < \varepsilon$, т. е. отображение f равномерно-непрерывно в D. ▶

Обратное утверждение неверно. Например, функция $f : x \mapsto \frac{1}{\ln x}$, $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ и $f(0) = 0$, непрерывна на сегменте $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, а следовательно, согласно теореме 1, равномерно-непрерывна на этом сегменте. Однако условию Гельдера эта функция не удовлетворяет. Действительно, при $x = e^{-\frac{n}{\alpha}}$, где $n \in \mathbb{N}$ и такое, что $x < \frac{1}{2}$, и при $y = 0$ имеем

$$|f(x) - f(y)| = \frac{k}{n}, \ k|x - y| = \frac{k}{e^n}, \ \frac{k}{n} > \frac{k}{e^n}.$$

Следовательно, неравенство (7) не выполняется.

Теорема 4. *Пусть отображение $f : D \to F$, $D \subset E$, непрерывно, а множество D компактно. Тогда отображение f равномерно-непрерывно на D.*

◀ Предположим, что отображение f не является равномерно-непрерывным на D. Это означает, что $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in D$ такие, что

$$\rho_E(x, y) < \delta \Rightarrow \rho_F(f(x), f(y)) \geqslant \varepsilon.$$

Согласно предположению, $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n, y_n \in D \wedge \rho_E(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \Rightarrow \rho_F(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon$. Поскольку D компактно, то, согласно теореме 5, п. 5. 4, последовательность $\{x_n\}$ имеет предельную точку

$x \subset D$. Тогда существует подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, сходящаяся к точке x, а в силу неравенства $\rho_E(x_{k_n}, y_{k_n}) < \frac{1}{k_n}$ соответствующая последовательность $\{y_{k_n}\}$ также сходится к этой точке. А так как отображение f непрерывно, то $f(x_{k_n}) \to f(x)$, $f(y_{k_n}) \to f(x)$ при $n \to \infty$. Следовательно, для указанного выше $\varepsilon > 0$ $\exists N \subset \mathbb{N}$ такое, что

$$\rho_F(f(x_{k_n}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \rho_F(f(x), f(y_{k_n})) < \frac{\varepsilon}{2},$$

а следовательно, $\rho_F(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) < \varepsilon$, что противоречит выбору точек x_{k_n}, y_{k_n}. ▶

Следующая теорема устанавливает связь между непрерывностью и компактностью. Она является обобщением теорем Вейерштрасса (см. теоремы 7 и 8, п. 7.6).

Теорема 5. *Если $f : E \to F$ — непрерывное отображение компактного метрического пространства E в метрическое пространство F, то множество $f(E)$ компактно.*

◀ Пусть $\{v_\alpha\}$ — произвольное открытое покрытие метрического пространства E. Поскольку отображение f непрерывно, то, согласно теореме 3, п. 7.5, все множества $f^{-1}(v_\alpha) \subset E$ открыты, а так как E компактно, то для него существует конечное покрытие, т. е. существует конечный такой набор индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, что

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(v_{\alpha_i}).$$

Отсюда, ввиду равенства $f(f^{-1}(D)) = D \quad \forall D \in F$ следует, что

$$f(E) \subset \bigcup_{i=1}^{n} v_{\alpha_i}. \blacktriangleright$$

7.8. Классификация и непрерывность элементарных функций. Основные элементарные функции следующие:

1) постоянная $x \mapsto \text{const}$, $x \in \mathbb{R}$;

2) степенная $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, или $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$, $x \geqslant 0$, если $n \in \mathbb{N}$ четное, и $x \in \mathbb{R}$, если $n \in \mathbb{N}$ нечетное, или в общем виде $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$;

3) показательная $x \mapsto a^x$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$;

4) логарифмическая $x \mapsto \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$;

5) тригонометрические

$$x \mapsto \sin x, \ x \in \mathbb{R}; \quad x \mapsto \cos x, \ x \in \mathbb{R};$$

$$x \mapsto \operatorname{tg} x, \ x \in \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x \mapsto \operatorname{ctg} x, \ x \in]n\pi, \pi + n\pi[, \quad n \in \mathbb{Z};$$

6) обратные тригонометрические

$$x \mapsto \arcsin x, \quad x \in [-1, 1]; \quad x \mapsto \arccos x, \quad x \in [-1, 1];$$
$$x \mapsto \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}; \quad x \mapsto \operatorname{arcctg} x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Элементарными функциями называют функции, которые образованы из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций.

Элементарные функции классифицируются следующим образом:

а) Функции, образованные из функций $f_1 : x \mapsto 1$, $f_2 : x \mapsto x$, $x \in \mathbb{R}$, с помощью конечного числа операций сложения, умножения и умножения на постоянные числа, называются *многочленами,* или *полиномами.* Общий вид многочлена n-й степени можно записать следующим образом:

$$P_n : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку f_1 и f_2 непрерывны в $\mathbb{R}$, то, согласно теореме 3, п. 7.1, многочлен является непрерывной функцией в $\mathbb{R}$.

б) Отношение двух многочленов называется *дробно-рациональной функцией*

$$\frac{P_n}{Q_m} : x \mapsto \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

определенной на множестве всех точек из $\mathbb{R}$, в которых знаменатель отличен от нуля. Согласно теореме 3, п. 7.1, дробно-рациональная функция непрерывна в области определения.

в) Функции, образованные из функций $f_1 : x \mapsto 1$, $f_2 : x \mapsto x$, $x \in \mathbb{R}$, с помощью операций, указанных в а), операции деления и операции извлечения корня, называются *алгебраическими.* Алгебраические функции, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными.*

Ранее (пример 2, п. 7.1) показано, что степенная функция $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$, непрерывна. Отсюда и из теоремы непрерывности суперпозиции непрерывных функций (теорема 1, п. 7.1), а также теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций (теорема 3, п. 7.1) заключаем, что алгебраическая функция непрерывна в области существования.

г) Элементарные функции, которые не являются алгебраическими, называются *трансцендентными.*

Доказано (примеры 1, 3, п. 7.1), что показательная, логарифмическая и все тригонометрические функции непрерывны в области их определения. Ниже будет показано, что непрерывными являются обратные тригонометрические функции. Тем самым, согласно теоремам п. 7.1 и теореме 3, п. 7.3, все элементарные функции непрерывны в области определения.

Покажем, что обратные тригонометрические функции непрерывны.

1) Функция $f: x \mapsto \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, непрерывна, возрастает и отображает сегмент $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ на сегмент $[-1, 1]$. Поэтому, согласно теореме 6, п. 7.6, она имеет непрерывную, возрастающую обратную функцию $f^{-1}: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, которую обозначают символом $x \mapsto \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$ (читается *арксинус*).

2) Аналогично, непрерывная функция $f: x \mapsto \cos x$, $x \in [0, \pi]$ убывает и отображает сегмент $[0, \pi]$ на сегмент $[-1, 1]$. Поэтому, согласно теореме 6, п. 7. 6, она имеет непрерывную убывающую обратную функцию $f^{-1}: [-1, 1] \to [0, \pi]$; ее обозначают символом $x \mapsto \arccos x$, $x \in [-1, 1]$ (читается *арккосинус*)

3) Пусть $f: x \mapsto \operatorname{tg} x$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Эта функция непрерывна как частное двух непрерывных функций. Покажем, что она возрастает на указанном интервале. Действительно, если $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, то $0 < x_2 - x_1 < \pi$, а тогда $\sin(x_2 - x_1) > 0$, $\cos x_1 > 0$, $\cos x_2 > 0$. Отсюда следует неравенство

$$\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cos x_2} > 0$$

и, тем самым, возрастание функции f установлено. При этом $f\left(-\frac{\pi}{2} + 0\right) = -\infty$, $f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = +\infty$. Поэтому, согласно теореме 6, п. 7. 6, непрерывная, возрастающая функция $f: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to]-\infty, +\infty[$ имеет непрерывную, возрастающую функцию $f^{-1}:]-\infty, +\infty[\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, которую обозначают символом $x \mapsto \operatorname{arctg} x$, $x \in]-\infty, +\infty[$ (читается *арктангенс*).

4) Функция $f: x \mapsto \operatorname{ctg} x$, $x \in]0, \pi[$, непрерывна как частное двух непрерывных функций. Поскольку $\forall x_1, x_2 \in]0, \pi[$ выполняется неравенство

$$\operatorname{ctg} x_2 - \operatorname{ctg} x_1 = \frac{\sin(x_1 - x_2)}{\sin x_1 \sin x_2} < x_1 - x_2 < 0$$

при $x_1 < x_2$, то функция убывает на интервале $]0, \pi[$. Далее, $f(+0) = +\infty$, $f(\pi - 0) = -\infty$. Поэтому $f:]0, \pi[\to]-\infty, +\infty[$. Согласно теореме 6, п. 7. 6, существует убывающая и непрерывная обратная функция $f^{-1}:]-\infty, +\infty[\to]0, \pi[$, которую обозначают символом $x \mapsto \operatorname{arcctg} x$, $x \in]-\infty, +\infty[$ (читается *арккотангенс*).

Непрерывность логарифмической функции доказали непосредственно (пример 1, п. 7.1), использовав при этом конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0$, $x_0 > 0$. Однако можно доказать непрерывность логарифмической функции тем же способом, что и при доказательстве непрерывности обратных тригонометрических функций.

Рассмотрим функцию $f: x \mapsto e^x$, $x \in]-\infty, +\infty[$. Она возрастает, причем $f(-\infty) = 0$, $f(+\infty) = +\infty$, а поскольку она непрерывна, то $f(]-\infty, +\infty[) =]0, +\infty[$. Тогда, согласно теореме 6, п. 7.6, существует непрерывная, возрастающая обратная ей функция $f^{-1}:]0, +\infty[\to]-\infty, +\infty[$. Эта функция называется *логарифмической* и обозначается $x \mapsto \ln x$, $x > 0$; каждому положительному числу x она ставит в соответствие такое действительное число $\ln x$, что $e^{\ln x} = x$. Число e называется *основанием логарифмической функции*. В качестве основания можно брать любое положительное число, отличное от единицы, например, число 10, или какое-либо другое число $a > 0$. В этом случае, как известно, справедливо равенство $\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x$, из которого вытекает непрерывность логарифмической функции при произвольном основании $a > 0$, $a \neq 1$.

В заключение рассмотрим функции, называемые *гиперболическими: косинус гиперболический*

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in]-\infty, +\infty[;$$

синус гиперболический

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in]-\infty, +\infty[;$$

тангенс гиперболический

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in]-\infty, +\infty[.$$

Ясно, что гиперболические функции непрерывны в $\mathbb{R}$. Функции, обратные к гиперболическим, называются *обратными гиперболическими* функциями.

Непосредственной проверкой устанавливаем, что функция $f: x \mapsto \operatorname{ch} x$ четная, $f(0) = 1$, $f(-\infty + 0) = +\infty$, $f(+\infty - 0) = +\infty$, на бесконечном полуинтервале $]-\infty, 0]$ убывает, а на $[0, +\infty[$ возрастает. А так как функция f непрерывна, то сужения ее на каждый из указанных полуинтервалов

$$f_1:]-\infty, 0] \to [1, +\infty[, \ f(x) = f_1(x) \ \ \forall x \in]-\infty, 0],$$

$$f_2: [0, +\infty[\to [1, +\infty[, \ f(x) = f_2(x) \ \ \forall x \in [0, +\infty[$$

имеют обратные непрерывные функции

$$f_1^{-1}: [1, +\infty[\to]-\infty, 0],$$

$$f_2^{-1}: [1, +\infty[\to [0, +\infty[.$$

Чтобы найти функции f_1^{-1} и f_2^{-1}, обозначим

$$\operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = x, \quad y \in]-\infty, 0], \quad x \in [1, +\infty[,$$

$$\operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = x, \quad y \in [0, +\infty[, \quad x \in [1, +\infty[.$$

Отсюда получим уравнение

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0,$$

из которого находим

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1},$$

а затем и

$$y = \ln (x \pm \sqrt{x^2 - 1}).$$

Поскольку $x - \sqrt{x^2 - 1} = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$, получим $y = \pm \ln (x + \sqrt{x^2 - 1})$. Здесь берем знак «+» для случая, когда $y \in [0, +\infty[$ и знак «—», когда $y \in]-\infty, 0]$.

Таким образом, функция

$$f_1^{-1} : x \mapsto -\ln (x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \in [1, +\infty[,$$

является обратной функцией для сужения косинуса гиперболического на бесконечный полуинтервал $]-\infty, 0]$, а функция

$$f_2^{-1} : x \mapsto \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \in [1, +\infty[,$$

— обратной функцией для сужения косинуса гиперболического на бесконечный полуинтервал $[0, +\infty[$. Для функции f_2^{-1} принято обозначение

$$\operatorname{arch} x = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \in [1, +\infty[,$$

(читается *ареакосинус гиперболический*).

Рассмотрим синус гиперболический

$$f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in]-\infty, +\infty[.$$

Эта функция непрерывна, возрастает и $f(]-\infty, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$, поэтому она имеет обратную функцию $f^{-1} :]-\infty, +\infty[\to]-\infty, +\infty[$, которая также возрастает и непрерывна. Обозначая

$$\frac{e^y - e^{-y}}{2} = x, \quad x, \ y \in]-\infty, +\infty[,$$

приходим к уравнению $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$, из которого находим $e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$. Поскольку $e^y > 0$, то здесь следует брать знак «+». Следовательно, $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ и, прологарифмировав обе части, получаем обратную функцию

$$y = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in]-\infty, +\infty[.$$

Для функции, обратной к синусу гиперболическому, принято обозначение

$$\operatorname{arsh} x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in]-\infty, +\infty[$$

(читается *ареасинус гиперболический*).

Наконец, рассмотрим тангенс гиперболический

$$f(x) = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in]-\infty, +\infty[.$$

Тангенс гиперболический является непрерывной возрастающей функцией; поскольку $f(-\infty + 0) = -1$, $f(+\infty - 0) = 1$, то

$$f:]-\infty, +\infty[\to]-1, 1[.$$

Согласно теореме 6, п. 7.6, существует обратная непрерывная и возрастающая функция $f^{-1} :]-1, 1[\to]-\infty, +\infty[$.

Обозначая

$$\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^y} = x, \quad y \in]-\infty, +\infty[, \quad x \in]-1, 1[,$$

находим функцию

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in]-1, 1[,$$

которая является обратной для тангенса гиперболического. Ее обозначают символом

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in]-1, 1[$$

(читается *ареатангенс гиперболический*).

Для гиперболических функций справедливы тождества

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y.$$

Из двух последних формул при $x = y$ получаем

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x,$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x.$$

Здесь видна аналогия с обыкновенными тригонометрическими функциями $\cos x$, $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$; отсюда происходят наименования «косинус», «синус», «тангенс».

§ 8. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

8.1. Функциональные метрические и векторные нормированные пространства.

Определение. *Функциональным пространством называем множество* $\mathcal{C} = \{f, g, h, \ldots\}$, *элементами которого являются отображения множества* E *в множество* F.

В случае, когда множество F является векторным пространством над полем $\mathbb{K}$, тогда в множестве $\mathcal{C}$ можно также ввести структуру векторного пространства над полем $\mathbb{K}$ (см. пример г), п. 1.5).

Предположим, что множество F является метрическим пространством, а отображения множества $\mathcal{C}$ ограничены. Тогда в множестве $\mathcal{C}$

можно ввести метрику, обратив тем самым его в метрическое пространство. С этой целью $\forall f, g \in \mathcal{C}$ поставим в соответствие действительное число $\rho(f, g)$, которое назовем расстоянием между элементами f и g пространства $\mathcal{C}$ и которое определяется по формуле

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in E} \rho(f(x), g(x)), \tag{1}$$

где $\rho(f(x), g(x))$ — расстояние между точками $f(x)$ и $g(x)$ в пространстве F. Поскольку все отображения из $\mathcal{C}$ ограниченные, то расстояние между двумя ограниченными отображениями f и g из $\mathcal{C}$ конечно.

Действительно, если отображения f и g ограниченные, то (см. определение 2, п. 2. 3) $f(E) \subset S(a, r_1)$, а $g(E) \subset S(b, r_2) \subset S(a, r_2 + \rho(a, b))$. Тогда $\forall x \in E$ $\rho(f(x), g(x)) \leqslant r_1 + r_2 + \rho(a, b)$ и $\rho(f, g) = \sup\limits_{x \in E} (f(x), g(x)) \leqslant r_1 + r_2 + \rho(a, b)$, т. е. $\rho(f, g)$ конечно.

Проверим, что отображение $\rho : (f, g) \to \rho(f, g)$, где $\rho(f, g)$ определено равенством (1), действительно является расстоянием в $\mathcal{C}$. Для этого достаточно проверить выполнение трех аксиом метрики (см. п. 2.1). Положительность расстояния очевидна, ибо, с одной стороны, для различных f и g найдется хотя бы один элемент $x \in E$ такой, что $\rho(f(x), g(x)) > 0$ и тогда тем более $\rho(f, g) > 0$, а с другой, $\rho(f, g) = \sup\limits_{x \in E} \rho(f(x), g(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ $\forall x \in E$. Симметрия расстояния также очевидна. Остается проверить выполнение неравенства треугольника.

Пусть $f, g, h \in \mathcal{C}$. Тогда $\forall x \in E$ имеем

$$\rho(f(x), g(x)) \leqslant \rho(f(x), h(x)) + \rho(h(x), g(x)) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \in E} \rho(f(x), h(x)) + \sup_{x \in E} \rho(h(x), g(x)) = \rho(f, h) + \rho(h, g).$$

Поскольку неравенство $\rho(f(x), g(x)) \leqslant \rho(f, h) + \rho(h, g)$ справедливо для любого $x \in E$, то оно остается справедливым при замене $\rho(f(x), g(x))$ на $\sup\limits_{x \in E} \rho(f(x), g(x)) = \rho(f, g)$, т. е. $\rho(f, g) \leqslant \rho(f, h) + \rho(h, g)$.

Наконец, если F имеет структуру векторного нормированного пространства, тогда в пространстве $\mathcal{C}$ можно также ввести структуру векторного нормированного пространства, положив

$$\|f\| = \sup_{x \in E} \|f(x)\|, \tag{2}$$

где через $\|f(x)\|$ обозначена норма элемента множества F, равного значению $f(x)$ отображения f.

Если $\mathcal{C}$ — множество отображений вида $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n$, $D \in \mathbb{R}^m$, то расстояние между элементами $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ (норма разности $\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}$) в пространстве $\mathcal{C}$ определяется равенством

$$\rho(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) = \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}\| = \sup_{x \in D} |\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{g}(x)|,$$

где $|\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{g}(x)|$ — одна из норм в $\mathbb{R}^n$, например,

$$|\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{g}(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_i(x) - g_i(x))^2}.$$

В частности, если $m = 1$, $n = 1$, $D = \mathcal{J}$, где $\mathcal{J}$ — сегмент, полуинтервал или интервал конечный или бесконечный, то

$$\rho(f, g) = \|f - g\| = \sup_{x \in \mathcal{J}} |f(x) - g(x)|.$$

Норма элемента $f \in \mathcal{C}$, когда $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$, определяется равенством

$$\|f\| = \rho(f, \theta) = \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

Если же $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, то

$$\|f\| = \rho(f, 0) = \sup_{x \in \mathcal{J}} |f(x)|.$$

8.2. Полнота функциональных пространств.

Теорема. *Если метрическое пространство F полно, то метрическое пространство $\mathcal{C}$ ограниченных отображений E в F также полно.*

◀ Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность элементов пространства $\mathcal{C}$. Тогда $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall\, m > N \wedge \forall\, n > N$ выполняется неравенство

$$\rho(f_m, f_n) < \varepsilon. \tag{1}$$

Из определения метрики в пространстве $\mathcal{C}$ следует, что

$$\rho(f_m(x), f_n(x)) \leqslant \rho(f_m, f_n) < \varepsilon, \tag{2}$$

а следовательно, $\forall\, x \in E$ последовательность $\{f_n(x)\}$ является фундаментальной последовательностью в пространстве F.

Поскольку, согласно условию, пространство F полно, то последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к некоторой точке пространства F, которую обозначим через $f(x)$. Тем самым определили отображение $f : E \to F$.

Докажем, что $f \in \mathcal{C}$. Для этого покажем прежде всего, что это отображение ограничено. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно задано. Тогда существует $N \subset \mathbb{N}$ такое, что $\forall\, m > N \wedge \forall\, n > N$ выполняется неравенство (1), а следовательно, и неравенство (2) $\forall\, x \in E$. Зафиксировав x из E, перейдем в неравенстве $\rho(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon$ к пределу при m, стремящемся к ∞. Учитывая непрерывность функции расстояния в F (см. п. 7.1), получим неравенство $\rho(f(x), f_n(x)) \leqslant \varepsilon$ $\forall\, n \geqslant N$. Так как f_N ограничено, то множество $f_N(E)$ содержится в некотором шаре $\overline{S}(a_N, r_N)$. Из неравенства

$$\rho(a_N, f(x)) \leqslant \rho(a_N, f_N(x)) + \rho(f_N(x), f(x))$$

следует, что множество $f(E)$ содержится в шаре с центром в точке a_N радиуса $r_N + \varepsilon$, т. е. $f(E) \subset \overline{S}(a_N, r_N + \varepsilon)$; тем самым ограниченность f доказана. Таким образом, отображение f является элементом пространства $\mathcal{C}$.

Остается доказать, что $\{f_n\}$ сходится к f при $n \to \infty$. Действительно, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \subset \mathbb{N} : \forall\, x \in E \wedge \forall\, n > N \Rightarrow \rho(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$. Отсюда следует неравенство $\rho(f, f_n) \leqslant \varepsilon$, означающее сходимость $\{f_n\}$ к f.

Таким образом показали, что всякая фундаментальная последовательность элементов метрического пространства $\mathscr{C}$ сходится в этом пространстве. Следовательно, $\mathscr{C}$ является полным метрическим пространством. ▶

Следствие. *Если F является пространством Банаха, то нормированное векторное пространство $\mathscr{C}$, элементами которого есть ограниченные отображения, также является пространством Банаха.*

В частности, если $\mathscr{C}$ — множество ограниченных отображений одного из видов:

$$f: D \to \mathbb{R}^n, \quad D \subset \mathbb{R}^m;$$
$$f: D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^m;$$
$$f: \mathcal{J} \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{J} \subset \mathbb{R},$$

то пространство $\mathscr{C}$ является *пространством Банаха.*

8.3. Равномерная сходимость. Пусть задана последовательность $\{f_n\}$, элементами которой являются отображения метрического пространства E в метрическое пространство F.

Определение 1. *Последовательность $\{f_n\}$ отображений $f_n : E \to F$, $n \in \mathbb{N}$, сходится в точке $x \in E$, если последовательность $\{f_n(x)\}$ элементов пространства F сходится при $n \to \infty$ к точке $f(x) \in F$.*

Если последовательность $\{f_n\}$ сходится в каждой точке множества E, то говорят, что она сходится на E.

С помощью логических знаков это определение запишем следующим образом:

$$\forall x \in E \bigwedge \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : \forall n > m \Rightarrow \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon. \qquad (1)$$

Заметим, что в определении 1 выбор числа $m \in \mathbb{N}$ зависит от фиксированного элемента $x \in E$ и от числа ε.

Такую сходимость называют *простой,* или *поточечной, сходимостью.*

Например, последовательность функций $\{f_n\}$, где $f_n : x \mapsto x^n$, $x \in [0, 1]$, сходится на сегменте $[0, 1]$ к функции

$$f: x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Определение 2. *Последовательность $\{f_n\}$ отображений $f_n : E \to F$, $n \in \mathbb{N}$, сходится равномерно на множестве E к отображению $f : E \to F$* при $n \to \infty$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : \forall n > m \Rightarrow \sup_{x \in E} \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Другими словами, *последовательность отображений $\{f_n\}$ называется равномерно сходящейся на множестве E к отображению f, если числовая последовательность* $\sup\limits_{x \in E} \rho(f_n(x), f(x))$ *стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности.*

Очевидно, равномерная сходимость влечет за собой простую сходимость. Обратное утверждение, как сейчас увидим, неверно. Равно-

мерная сходимость является более сильным свойством, чем обычная сходимость.

Если последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно к f на множестве E, то пишут: $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} f$ при $n \to \infty$.

Рассмотренная выше последовательность $\{f_n\}$ функций $f_n : x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$, сходится просто на $[0, 1]$ к функции

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [0, 1[, \\ 1, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Однако эта сходимость не является равномерной, поскольку

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |x^n| = 1,$$

т. е. числовая последовательность не стремится к нулю при $n \to \infty$. То, что $\sup\limits_{x \in [0,1]} |x^n| = 1$ следует из того, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon$, например, $x_\varepsilon = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$, для которого $1 - \varepsilon < x_\varepsilon^n \leqslant 1$.

Последовательность $\{f_n\}$ числовых функций $f_n : x = (x_1, x_2) \mapsto \left(x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $x \in \mathbb{R}^2$, сходится на $\mathbb{R}^2$ к функции $f : x \mapsto x_1^2 + x_2^2$, $x \in \mathbb{R}^2$.

Действительно,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \left(\sqrt{x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 + \frac{1}{n^2}} - x_1^2 - x_2^2 \right) =$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{n^2 \left(\sqrt{x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 + \frac{1}{n^2}} + x_1^2 + x_2^2 \right)} = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема 1. *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность отображений $f_n : D \to \mathbb{R}^p$, $D \subset \mathbb{R}^m$, $f_n = (f_{1n}, \ldots, f_{pn})$, а $f = (f_1, \ldots, f_p)$ отображение множества D в пространство $\mathbb{R}^p$. Тогда*

$$f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow f_{jn} \overset{D}{\rightrightarrows} f_j \quad \forall j = \overline{1, p}.$$

◀ *Необходимость* следует из неравенства

$$\sup_{x \in D} \rho(f_{jn}(x), f_j(x)) \leqslant \sup_{x \in D} \rho(f_n(x), f(x)) \quad j = \overline{1, p},$$

вытекающего из формулы (1), п. 8.1.

Достаточность. Пусть $f_{jn} \overset{D}{\rightrightarrows} f_j$, $j = \overline{1, p}$, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N \Rightarrow \sup\limits_{x \in D} \rho(f_{jn}(x), f_j(x)) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}$. Тогда имеем

$$\rho(f_n(x), f(x)) = \left(\sum_{j=1}^{p} (f_{jn}(x) - f_j(x))^2\right)^{\frac{1}{2}} <$$

$$< \left(\sum_{j=1}^{p} \sup_{x \in D} \rho^2(f_{jn}(x), f_j(x)\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Отсюда

$$\sup_{x \in D} \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \forall n > N,$$

т. е. $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$. ▶

Равномерная сходимость последовательности $\{f_n\}$ элементов метрического пространства $\mathscr{C}$ эквивалентна тому, что $\exists f \in \mathscr{C}$, для которого $\rho(f_n, f) \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, сходимость в пространстве $\mathscr{C}$, элементами которого являются ограниченные отображения метрического пространства E в метрическое пространство F, означает равномерную сходимость последовательности $\{f_n\}$ на множестве E.

Теорема 2 (критерий Коши равномерной сходимости). *Последовательность ограниченных функций $f_n : D \to \mathbb{R}^q$, $D \subset \mathbb{R}^p$, $n \in \mathbb{N}$, сходится равномерно на множестве D тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall m > N \wedge \forall n > N \Rightarrow \rho(f_m, f_n) < \varepsilon.$$

◀ Поскольку равномерная сходимость последовательности $\{f_n\}$ является сходимостью в пространстве $\mathscr{C}$ отображений метрического пространства D в метрическое пространство $\mathbb{R}$, то необходимость условия сходимости следует из теоремы 1, п. 4.10.

Достаточное условие вытекает из теоремы пункта 8.2, где доказано, что всякая фундаментальная последовательность пространства $\mathscr{C}$ сходится в этом пространстве ▶

8.4. Функциональные свойства предельных отображений. Пусть $\mathscr{C}$ является множеством отображений вида $f : \mathbb{R} \to F$, где F — метрическое пространство.

Определение 1. *Последовательность $\{f_n\}$ отображений $f_n : \mathbb{R} \to F$, $n \in \mathbb{N}$, называется равномерно сходящейся к отображению f на каждом ограниченном сегменте $[a, b] \subset \mathbb{R}$, если последовательность сужений f_n на этот сегмент сходится равномерно к сужению f на этот же сегмент.*

Если сужения отображений обозначать так же, как и сами отображения, то с помощью логических символов определение 1 запишется так:

$$\forall [a, b] \subset \mathbb{R} \wedge \forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N} : \forall n > m \Rightarrow \rho(f_n, f) < \varepsilon,$$

где $\rho(f_n, f) = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)|$, а натуральное число m не зависит от x, но является функцией числа ε и сегмента $[a, b]$. В этом

определении действительную ось $\mathbb{R}$ можно заменить на $\mathbb{R}^n$, а сегмент $[a, b]$ на замкнутое ограниченное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. В более общем случае $\mathbb{R}$ можно заменить на произвольное метрическое пространство E, а сегмент $[a, b]$ — на ограниченную замкнутую окрестность точки $a \in E$.

Пусть $\mathscr{C}$ является множеством отображений метрического пространства E в метрическое пространство F.

Определение 2. *Последовательность $\{f_n\}$ отображений $f_n : E \to F$, $n \in \mathbb{N}$, локально равномерно сходится в метрическом пространстве E к отображению $f : E \to F$, если*

$$\forall a \in E\, \exists \overline{S}(a, \delta) \wedge \forall \varepsilon > 0\, \exists m \in \mathbb{N} : \forall n > m \Rightarrow \rho(f_n, f) < \varepsilon,$$

где $\rho(f_n, f) = \sup\limits_{x \in \overline{S}(a,\delta)} \rho(f_n(x), f(x))$.

Определение 3. *Метрическое пространство называется л о к а л ь н о - к о м п а к т н ы м, если каждая его точка имеет по крайней мере одну компактную окрестность.*

Например, любое конечномерное нормированное векторное пространство локально-компактно, поскольку компактен замкнутый шар такого пространства.

Если E локально-компактно, то локальная равномерная сходимость эквивалентна равномерной сходимости на каждом компакте множества E.

Действительно, если последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f равномерно на каждом компакте, то поскольку каждая точка $a \in E$ имеет компактную окрестность, на которой последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно, сходимость последовательности $\{f_n\}$ является локально-равномерной. Предположим, что сходимость локально-равномерна, и пусть K — некоторый компакт из E. Для любой точки $a \in K$ $\exists \overline{S}(a, \delta)$, на котором сходимость равномерна.

Множество K покрывается бесконечной системой открытых множеств

$$S(a, \delta_a), \quad a \in K.$$

Поскольку K — компактное множество, то существует такое конечное число точек $a_j \in K$, $j = \overline{1, n}$, что

$$K \in \bigcup_{j=1}^{n} S(a_n \delta_{a_n}).$$

Следовательно, сходимость последовательности $\{f_n\}$ является равномерной на множестве K.

Теорема 1. *Пусть E и F — метрические пространства, $\{f_n\}$ — последовательность отображений $f_n : E \to F$, $n \in \mathbb{N}$, локально равномерно сходится к отображению $f : E \to F$. Тогда:*

а) *если все отображения f_n непрерывны в точке $a \in E$, то и предельное отображение f непрерывно в точке a;*

б) *если все отображения f_n непрерывны на E, то отображение f также непрерывно на E;*

в) *если сходимость последовательности* $\{f_n\}$ *равномерна на* E *и все* f_n *равномерно-непрерывны на* E, *то* f *также равномерно-непрерывна на* E.

◀ а) Пусть $a \in E$ и последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно в окрестности $\overline{S}(a, \delta)$ точки a. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists m \in \mathbb{N}; \forall n > m \Rightarrow \rho(f_n, f) = \sup_{x \in \overline{S}(a,\delta)} \rho(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда, $\forall n > m \wedge \forall x \in \overline{S}(a, \delta)$

$$\rho(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1}$$

Зафиксировав $n > m$, заметим, что отображение f_n по условию непрерывно в точке a. Следовательно, существует окрестность $S(a, \delta_0) \subset \subset \overline{S}(a, \delta)$ точки a такая, что $\forall x \in S(a, \delta_0)$ выполняется неравенство

$$\rho(f_n(x), f_n(a)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

Но тогда $\forall x \in S(a, \delta_0)$

$$\rho(f(x), f(a)) \leqslant \rho(f(x), f_n(x)) + \rho(f_n(x), f_n(a)) + \rho(f_n(a), f(a)).$$

Отсюда, согласно неравенствам (1) и (2), получаем $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$ $\forall x \in S(a, \delta_0)$, т. е. отображение f непрерывно в точке a.

б) Из доказанного в пункте а) следует, что если все f_n непрерывны на E, то отображение f также непрерывно на E.

в) Предположим теперь, что все отображения f_n равномерно-непрерывны на E, а последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на E. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : \forall n > m \Rightarrow \rho(f_n, f) = \sup_{x \in E} \rho(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

Пусть $n > m$ и n — фиксировано. Согласно условию, отображение f_n равномерно-непрерывно; следовательно, $\exists \delta > 0$ такое, что

$$\forall x \in E \wedge \forall y \in E : \rho(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(f_n(x), f_n(y)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

На основании неравенств (3) и (4) заключаем, что $\forall x \in E \wedge \forall y \in E$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x, y) < \delta$, выполняется неравенство

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \rho(f(x), f_n(x)) + \rho(f_n(x), f_n(y)) + \rho(f_n(y), f(y)) < \varepsilon,$$

что и доказывает равномерную непрерывность отображения f. ▶

Замечание. Последовательность непрерывных функций может сходиться просто к разрывной функции (см. п. 8.3).

Символом $C(E)$ обозначим множество всех непрерывных ограниченных отображений метрического пространства E в метрическое пространство F. Очевидно, $C(E)$ является подпространством пространства $\mathscr{B}$, а поэтому само является метрическим пространством, метрика в

котором определена равенством

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in E} \rho(f(x), g(x)). \tag{5}$$

Следствие 1. *Подпространство $C(E)$, метрика в котором определена равенством* (5), *замкнуто.*

◀ Действительно, равномерно сходящаяся последовательность $\{f_n\}$ непрерывных отображений $f_n : E \to F$ сходится к непрерывному отображению $f : E \to F$. Таким образом, $f \in C(E)$. ▶

Следствие 2. *Если F полно, то подпространство $C(E)$ полно.*

◀ В самом деле, множество $C(E)$ замкнуто в полном метрическом пространстве $\mathscr{C}$ (теорема п. 8.2), а поэтому полно, так как содержит все свои предельные точки (пределы фундаментальных последовательностей). ▶

Следствие 3. *Если F является пространством Банаха, то пространство $C(E)$ непрерывных ограниченных отображений, снабженных нормой*

$$\|f\| = \sup_{x \in E} \|f(x)\|, \tag{6}$$

где $\|f(x)\|$ — норма элемента пространства F, является пространством Банаха.

Особенно важен частный случай, когда $F = \mathbb{R}$ или $F = \mathbb{R}^n$.

Тогда пространство $C(E)$ непрерывных ограниченных в метрическом пространстве E функций является пространством Банаха.

В частности, пространство $C[a, b]$, элементами которого являются непрерывные функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ или непрерывные вектор-функции $\boldsymbol{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, является пространством Банаха; пространство $C(\bar{D})$, где $\bar{D}$ — замкнутая ограниченная область пространства $\mathbb{R}^m$, а элементами $C(\bar{D})$ есть непрерывные отображения $\boldsymbol{f} : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$, является пространством Банаха.

Наконец, пусть K — компактное множество метрического пространства E, а $C(K)$ — множество непрерывных функций $f : K \to \mathbb{R}$ (или отображений $\boldsymbol{f} : K \to \mathbb{R}^n$). Тогда пространство $C(K)$ является пространством Банаха.

◀ Во всех перечисленных выше случаях множество $C(E)$ состоит из непрерывных ограниченных функций (или из непрерывных на компактных множествах, а поэтому также ограниченных). Следовательно, пространство $C(E)$, снабженное нормой (6), является пространством Банаха согласно следствию из теоремы пункта 8.2. ▶

Теорема 2. *Пусть E и F — метрические пространства, причем F полно, $A \subset E$, $\{f_n\}$ — последовательность отображений $f_n : A \to F$, $n \in \mathbb{N}$, равномерно сходящаяся к отображению $f : A \to F$; $a \in E$ — предельная точка множества A.*

Если $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f_n(x) = l_n$, *то* $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} l_n$. *Другими словами, в данном случае*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f_n(x). \tag{7}$$

◀ Пусть $\varepsilon > 0$ задано произвольно. В силу равномерной сходимости $\{f_n\}$ на множестве A

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall m > N \wedge \forall n > N \Rightarrow \rho(f_n, f) < \varepsilon,$$

а, следовательно, $\forall x \in A$ выполняется неравенство

$$\rho(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon.$$

Перейдем в последнем неравенстве к пределу при $x \to a$ по значениям в A; учитывая непрерывность функции расстояния в F, получаем неравенство

$$\rho(l_m, l_n) \leqslant \varepsilon,$$

справедливое $\forall m > N \wedge \forall n > N$. Таким образом, $\{l_n\}$ является фундаментальной последовательностью в F. А поскольку F полное метрическое пространство, то последовательность $\{l_n\}$ сходится в F. Обозначим ее предел через l.

Воспользовавшись неравенством треугольника, получим

$$\rho(f(x), l) \leqslant \rho(f(x), f_n(x)) + \rho(f_n(x), l_n) + \rho(l_n, l). \tag{8}$$

Поскольку $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$, то число $n \in \mathbb{N}$ можно выбрать так, что $\rho(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{3}$, а тогда $\forall x \in A$

$$\rho(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}; \tag{9}$$

число n возьмем таким, чтобы, кроме того, выполнялось неравенство

$$\rho(l_n, l) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10}$$

Так как $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} \rho(f_n(x), l_n) = 0$, то для указанного ранее $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in A$, удовлетворяющих неравенству $0 < \rho(x, a) < \delta$, выполняется неравенство

$$\rho(f(x_n), l_n) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{11}$$

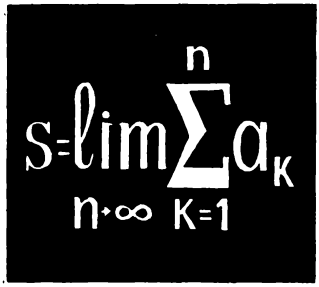
Подставляя неравенства (9), (10) и (11) в (8), получаем неравенство

$$\rho(f(x), l) < \varepsilon,$$

справедливое при $0 < \rho(x, a) < \delta$, $x \in A$. Следовательно, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l$, что равносильно равенству (7). ▶

Следствие. *Пусть* $\{f_n\}$ — *последовательность функций* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *сходящаяся равномерно на* $\mathbb{R}$ *при* $n \to \infty$ *к функции* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Если* $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = l_n$, *то*

$$\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = l \wedge \exists \lim_{n \to \infty} l_n = l.$$



3

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 1. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

1.1. Сходимость ряда и его сумма. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ некоторая последовательность действительных чисел, то выражение

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

или, короче,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

называется *бесконечным числовым рядом*. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются *членами ряда*, причем элемент a_n называется *общим членом ряда*.

Определение 1. *Последовательностью частичных сумм ряда* (1) *называется последовательность*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Член s_n этой последовательности называется *n-й частичной суммой ряда*. Таким образом,

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \ldots, \quad s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Если задана последовательность частичных сумм ряда, то можно восстановить последовательность членов ряда:

$$a_1 = s_1, \quad a_2 = s_2 - s_1, \quad \ldots, \quad a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Определение 2. *Бесконечный числовой ряд* (1) *называется сходящимся, если его последовательность частичных сумм* (2) *имеет конечный предел. Суммой бесконечного сходящегося числового ряда называется число*

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Если ряд (1) сходится к сумме s, то вместо

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

пишут

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если последовательность частичных сумм бесконечного числового ряда при $n \to \infty$ стремится к $+\infty$ (или к $-\infty$) или вовсе не имеет предела, то бесконечный числовой ряд называется *расходящимся*.

В дальнейшем бесконечный числовой ряд кратко будем называть *числовым рядом* или даже просто *рядом*.

Теорема 1 (необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд* (1) *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

◀ Пусть $s_n \to s$ при $n \to \infty$. Тогда при этом условии $s_{n-1} \to s$, и

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0. \blacktriangleright$$

О том, что доказанное условие не является достаточным, видим из следующего примера. Общий член ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

называемого *гармоническим,* стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, необходимое условие сходимости выполнено. Однако этот ряд расходится. Действительно, частичную сумму этого ряда можно записать в виде (пример 2, п. 4.4, гл. 2)

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \gamma_n,$$

где C — постоянная Эйлера, а $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда $s_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Из определения суммы числового ряда следует, что он сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность частичных сумм. Применяя теорему 2, п. 4.10, гл. 2, получаем необходимое и достаточное условие сходимости ряда.

Теорема 2 (критерий Коши сходимости ряда). *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *такое, что* $\forall n > n_0 \wedge \forall p \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$|s_{n+p} - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon. \tag{3}$$

◀ Последовательность $\{s_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > n_0 \wedge \forall p \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$|s_{n+p} - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon. \blacktriangleright$$

Следствие 1. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то определена последовательность* $n \mapsto r_n$, *где* $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$, *которую будем называть* n*-м остатком ряда и которая стремится к нулю при* n *стремящемся к бесконечности.*

◀ Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то, согласно критерию Коши, для каждого фиксированного n сходится и n-й остаток ряда. Пусть r_n — сумма n-го остатка ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, s — его сумма, а s_n — его частичная сумма. Тогда $s = s_n + r_n$. Поскольку $s_n \to s$ при $n \to \infty$, то $r_n = s - s_n \to 0$ при $n \to \infty$. ▶

Следствие 2. *Сходимость или расходимость ряда не изменится, если в начале ряда дописать или вычеркнуть любое конечное число членов.*
◀ В самом деле, в разности

$$s_{n+p} - s_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$$

при достаточно большом n дописанные члены взаимно уничтожаются, а вычеркнутые, естественно, не могут увеличить этой разности. Поэтому в том и другом случае неравенство (3) остается справедливым. ▶

Теорема 3. а) *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится и имеет сумму* s, *то для произвольного* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ *также сходится и имеет сумму* λs.

б) *Если ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся и имеют соответственно суммы* s *и* σ, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *также сходится и имеет сумму* $s + \sigma$.

◀ а) Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = s$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \lambda s$.

б) Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = s$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \sigma$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = s + \sigma$. ▶

Из доказанной теоремы вытекает, что множество всех сходящихся числовых рядов образует векторное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Заметим, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$, $\lambda \neq 0$, и, наоборот, из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 1. Исследовать на сходимость числовой ряд

$$a + aq + \cdots + aq^{n-1} + \cdots,$$

члены которого образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q.

Вычисляя сумму n первых членов этого ряда, находим

$$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q},$$

если $q \neq 1$, $s_n = na$, если $q = 1$, и $s_n = a\,\frac{1 - (-1)^n}{2}$, если $q = -1$. В случае, если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$, $s_n \to \frac{a}{1 - q}$, и ряд сходится к сумме $s = \frac{a}{1 - q}$. Если же $|q| > 1$ или $q = 1$, то $s_n \to \infty$ при $n \to \infty$, а если $q = -1$, то s_n вовсе не имеет предела при $n \to \infty$. В этих случаях ряд расходится. Итак, рассматриваемый ряд сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geqslant 1$.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n} + \cdots$$

Для удобства записи частичной суммы ряда воспользуемся равенством (пример 2, п. 4.4, гл. 2)

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \gamma_n.$$

Имеем для частичных сумм с четными индексами

$$s_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= C + \ln 2n + \gamma_{2n} - C - \ln n - \gamma_n = \ln 2 + \gamma_{2n} - \gamma_n,$$

а для частичных сумм с нечетными индексами получаем

$$s_{2n+1} = \ln 2 + \gamma_{2n} - \gamma_n - \frac{1}{2n+1}.$$

Поскольку в обоих случаях предел частичных сумм равен $\ln 2$, то $s_n \to \ln 2$ при $n \to \infty$, и ряд сходится к сумме $s = \ln 2$.

1.2. Признаки сравнения числовых рядов. Рассмотрим числовые ряды, членами которых являются положительные действительные

числа. В этом случае частичные суммы ряда являются возрастающими последовательностями и поэтому к ним применима теорема Вейерштрасса (п. 4.3, гл. 2), аналог которой имеет место и для рядов.

Теорема 1. *Ряд с положительными членами сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы образуют ограниченную последовательность.*

Пусть заданы два ряда

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{A}$$

и

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \tag{B}$$

с положительными членами.

Теорема 2. а) *Если ряд* (B) *сходится и* $a_n \leqslant b_n \ \forall\, n > n_0,\ n_0 \in \mathbb{N}$, *то ряд* (A) *также сходится.*

б) *Если ряд* (A) *расходится и* $a_n \leqslant b_n \ \forall\, n > n_0,\ n_0 \in \mathbb{N}$, *то ряд* (B) *также расходится.*

◀ а) Пусть ряд (B) сходится; тогда, согласно критерию Коши для ряда, $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists N$ такое, что $\forall\, n > N \wedge \forall\, p \in \mathbb{N} \ \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} b_k < \varepsilon$. Возьмем $N > n_0$. Тогда, согласно условию $a_k \leqslant b_k$,

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k < \varepsilon,$$

и ряд (A) сходится в силу выполнения для него критерия Коши.

б) Ряд (B) расходится, так как если бы он сходился, то из пункта а) следовало бы, что ряд (A) также сходится, что невозможно. ▶

Теорема 3. *Пусть существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K, \quad 0 < K < +\infty,$$

тогда: а) *из сходимости ряда* (B) *при* $K < +\infty$ *вытекает сходимость ряда* (A); б) *из расходимости ряда* (B) *при* $K > 0$ *вытекает расходимость ряда* (A).

Таким образом, при $0 < K < +\infty$ оба ряда одновременно сходятся или расходятся.

◀ а) Пусть ряд (B) сходится и $K < +\infty$. Тогда $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0$ такое, что

$$\forall\, n > n_0 \quad \frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon \quad \text{или} \quad a_n < (K + \varepsilon)\, b_n.$$

Отсюда и из теоремы 2, а) вытекает сходимость ряда (A).

б) Пусть ряд (B) расходится и $K > 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} < +\infty$. Ряд (A) расходится, так как если бы он сходился, то, согласно уже доказанному в пункте а), сходился бы и ряд (B), что противоречит предположению. ▶

Теорема 4. *Пусть*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \forall\, n > n_0. \tag{1}$$

Тогда из сходимости ряда (B) *вытекает сходимость ряда* (A), *а из расходимости ряда* (A) *вытекает расходимость ряда* (B).

◀ Не ограничивая общности, предположим, что неравенства (1) выполняются для всех значений $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leqslant \frac{b_3}{b_2}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Перемножив почленно эти неравенства, получим

$$\frac{a_n}{a_1} \leqslant \frac{b_n}{b_1} \quad \text{или} \quad a_n \leqslant \frac{a_1}{b_1} b_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку, согласно пункту (1.1), ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_n = \frac{a_1}{b_1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится или расходится вместе с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, то утверждение теоремы непосредственно вытекает из теоремы 2. ▶

Доказанные признаки сравнения очень удобны в применении, однако для успешного их использования необходимо иметь достаточно широкий набор рядов, о которых заранее известно, сходятся они, или расходятся. Выше было установлено, в каком случае сходится ряд, члены которого образуют геометрическую прогрессию. Известно также, что гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, а поэтому, согласно теореме 2, расходящимся является всякий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, для которого выполняется условие $a_n \geqslant \frac{1}{n} \quad \forall\, n > n_0$.

Рассмотрим ряды, члены которых не возрастают. Сходимость или расходимость этих рядов зависит от сходимости или расходимости ряда, образованного из довольно «редкой» подпоследовательности, выделенной из последовательности $\{a_n\}$.

Теорема 5. *Пусть* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots \geqslant 0$. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k} + \cdots. \tag{2}$$

◀ Обозначим

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

$$\sigma_k = a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k}.$$

Тогда при $n < 2^k$

$$s_n \leqslant a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \leqslant$$
$$\leqslant a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} = \sigma_k.$$

Следовательно, при $n < 2^k$

$$s_n \leqslant \sigma_k. \tag{3}$$

Если $n > 2^k$, то

$$s_n \geqslant a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} \sigma_k,$$

т. е.

$$s_n \geqslant \frac{1}{2} \sigma_k. \tag{4}$$

Если ряд (2) сходится, то его частичные суммы σ_k ограничены, а тогда из неравенства (3) вытекает, что частичные суммы s_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также ограничены и, согласно теореме 1, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если ряд (2) расходится, то, согласно теореме 1, $\sigma_k \to +\infty$ при $n \to \infty$, а тогда из (4) вытекает, что $s_n \to +\infty$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. ▶

Следствие 1. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\lambda}$ *сходится, если* $\lambda > 1$, *и расходится, если* $\lambda \leqslant 1$.

◀ Если $\lambda \leqslant 0$, то $a_n = n^{-\lambda} \geqslant 1$, и ряд расходится, так как его общий член не стремится к нулю с возрастанием n.

Если $\lambda > 0$, то, применяя доказанную теорему, получаем ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{k\lambda}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k(\lambda-1)}}, \tag{5}$$

члены которого являются геометрической прогрессией со знаменателем

$$q = \frac{1}{2^{\lambda-1}}.$$

Поэтому если $\lambda > 1$, то $q < 1$, и ряд (5) сходится, а если $\lambda \leqslant 1$, то $q \geqslant 1$, и ряд (5) расходится. Таким образом, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}$$

сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda \leqslant 1$. ▶

Следствие 2. *Если* $a_n = O\left(\frac{1}{n^\lambda}\right)$ *при* $n \to \infty$, *то при* $\lambda > 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, а при* $\lambda \leqslant 1$ *— расходится.*

◀ Достаточно в теореме 3 положить $b_n = \frac{1}{n^\lambda}$ и применить следствие 1. ▶

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k (\ln 2^k)^p} = \frac{1}{\ln^p 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}.$$

А этот ряд, согласно следствию 2, сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

Пример 2. Показать, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right), \quad a > 0,$$

расходятся.

Поскольку при $n \to \infty$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4n} = \frac{\pi}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{n} \ln a + o\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

(см. пример 2, п. 6. 6, гл. 2), а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то расходятся и данные ряды.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Имеем

$$1 - \cos \frac{\pi}{n} = \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(см. пример 2, п. 6.6, гл. 2).

Далее из неравенства $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ (см. неравенство (6) п. 4.4, гл. 2) следует

$$\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то данные ряды также сходятся.

Пример 4. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2$ сходится.

В самом деле

$$\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2<\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\cdot\frac{1}{n^2}<\frac{e^2}{n^2},$$

т. е. $\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $n\to\infty$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, поэтому сходится и данный ряд.

Пример 5. Доказать логарифмический признак: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, если $\exists\,\alpha>0$ такое, что $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n}\geqslant 1+\alpha\ \ \forall\, n>n_0$, и расходится, если $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n}\leqslant 1$ $\forall\, n>n_0$.

Пусть $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n}\geqslant 1+\alpha\ \ \forall\, n>n_0$, $\alpha>0$. Тогда из этого неравенства следует, что $\forall\, n>n_0$ выполняется неравенство $a_n\leqslant\frac{1}{n^{1+\alpha}}$. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}$ сходится (см. следствие 1 из теоремы 5), то согласно теореме 2 сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Пусть теперь $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n}\leqslant 1\ \ \forall\, n>n_0$. Тогда $a_n\geqslant\frac{1}{n}\ \ \forall\, n>n_0$, а так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится (см. п. 1.1), то, согласно теореме 2, расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Пример 6. Доказать, что ряд с общим членом $a_n=(\ln\ln n)^{-\ln n}$, $n=3, 4, \ldots$, сходится.

Поскольку

$$\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n}=\frac{\ln(\ln\ln n)^{\ln n}}{\ln n}=\ln\ln\ln n>2$$

при $n>\exp(\exp(\exp 2))$, где обозначено $\exp a=e^a$, то, согласно логарифмическому признаку, ряд сходится.

1.3. Признаки Коши и д'Аламбера.

Теорема 1 (признак Коши). *Пусть задан ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $a_n\geqslant 0$ *и* $\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$. *Тогда:*

а) *если* $l<1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *сходится;*

б) *если* $l>1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *расходится;*

в) *существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых* $l = 1$.

◀ а) Пусть $l < 1$; выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $l + \varepsilon < 1$. В силу существования конечного верхнего предела $\exists n_0$ такое, что $\sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon \ \forall n > n_0$. Обозначим $l + \varepsilon = q$, $0 < q < 1$; тогда $\forall n > n_0$ выполняется неравенство $a_n < q^n$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится (см. пример 1, п. 1.1), то по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

б) Пусть $l > 1$. Поскольку верхний предел является наибольшим частичным пределом, то существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, для которой

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = l.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $l - \varepsilon > 1$. Тогда $|\sqrt[n_k]{a_{n_k}} - l| < \varepsilon \ \forall k > k_0$. Отсюда следует, что

$$l - \varepsilon < \sqrt[n_k]{a_{n_k}} < l + \varepsilon, \text{ т. е. } 1 < (l-\varepsilon)^{n_k} < a_{n_k} < (l+\varepsilon)^{n_k},$$

и последовательность $\{a_n\}$ не может при $n \to \infty$ стремиться к нулю. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

в) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится (см. п. 1.1); однако поскольку $\sqrt[n]{n} \to 1$ при $n \to \infty$ (см. п. 4.2, гл. 2), то в обоих случаях $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ при $n \to \infty$. ▶

Следствие. *Теорема остается справедливой, если в ее условии верхний предел* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$ *заменить пределом* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, *предполагая, что он существует.*

Теорема 2 (признак д'Аламбера). *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$:

а) *сходится, если* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$;

б) *расходится, если* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \ \forall n > n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$;

в) *если*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \qquad (1)$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *может как сходиться, так и расходиться.*

◀ а) Пусть задано $\varepsilon > 0$ такое, что $0 < l + \varepsilon = q < 1$. В силу существования конечного верхнего предела $\exists n_0$: $\forall n > n_0$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. Отсюда

$$a_{n_0+1} < qa_{n_0},$$
$$a_{n_0+2} < qa_{n_0+1} < q^2 a_{n_0},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n_0+k} < q^k a_{n_0},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и, следовательно, для a_n справедлива оценка $a_n < a_{n_0} q^{-n_0} q^n$ $\forall n > n_0$, причем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_0} q^{-n_0} q^n = a_{n_0} q^{-n_0} \sum_{n=1}^{\infty} q^n, \quad 0 < q < 1,$$

сходится. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится согласно признаку сравнения.

б) Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ $\forall n > n_0$, то $a_{n+1} \geqslant a_n > 0$ $\forall n > n_0$, что исключает возможность выполнения необходимого условия сходимости ряда, а поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

в) Для доказательства рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1-(-1)^n}{2}}} = 1 + 1 + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{5} + \cdots$$

Для первого ряда

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Для второго ряда

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+2}}{a_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} (2n-1) = \infty,$$

т. е. соотношения (1) выполнены для обоих рядов. Однако первый ряд сходится, а второй в силу неравенства

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n^{\frac{1-(-1)^n}{2}}} > \frac{n}{2}$$

расходится. ▶

В качестве примера рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{4^6} + \cdots$$

Выясним сходимость ряда, применив признак Коши. Имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{\frac{1}{2^{2n-1}}} = \frac{1}{2} < 1;$$

следовательно, ряд сходится.

Поскольку отношение

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = 2^{2n-1}$$

не ограничено при возрастании n, то признак д'Аламбера не позволяет сделать никаких заключений о сходимости ряда.

Заметим, что расходимость ряда по признакам Коши и д'Аламбера устанавливается на основании того, что a_n не стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому оба признака являются довольно грубыми при исследовании ряда на расходимость (так как существуют расходящиеся ряды, у которых $a_n \to 0$ при $n \to \infty$). Для установления факта расходимости ряда самыми удобными все еще остаются признаки, рассмотренные в пункте 1.2.

Установим более тонкие признаки сходимости рядов с положительными членами.

1.4. Признаки Куммера, Раабе и Гаусса.

Теорема 1 (признак Куммера). *Пусть для ряда*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

существует последовательность $\{b_n\}$ положительных чисел, для которой выполняются условия:

1) *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ *расходится;*

2) *числа* $v_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1}$ *одного знака.*

Тогда ряд (1) *при* $v_n > l > 0$ *сходится, а при* $v_n \leqslant 0$ *расходится.*

◀ Пусть $v_n > l > 0$. Тогда $la_{n+1} < a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1}$. Полагая здесь последовательно $n = 1, 2, \ldots$, получаем неравенства

$$\begin{aligned} la_2 &< a_1 b_1 - a_2 b_2, \\ la_3 &< a_2 b_2 - a_3 b_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ la_{n+1} &< a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1}, \end{aligned}$$

складывая которые, приходим к неравенствам

$$l(a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}) < a_1 b_1 - a_{n+1} b_{n+1} < a_1 b_1.$$

Поскольку число l положительное, то из последнего неравенства получаем оценку

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1} < \frac{a_1 b_1}{l}$$

или

$$s_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} < \frac{a_1 b_1}{l} + a_1.$$

Следовательно, последовательность частичных сумм ряда ограничена и поэтому, согласно теореме 1, п. 1.2, ряд (1) сходится.

Пусть теперь $v_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} \leqslant 0$. Тогда $a_n b_n \leqslant a_{n+1} b_{n+1}$ и $a_1 b_1 \leqslant a_2 b_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{n+1} b_{n+1}$. Таким образом, $a_{n+1} \geqslant \frac{a_1 b_1}{b_{n+1}}$, а поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 b_1}{b_{n+1}} = a_1 b_1 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_{n+1}}$ расходится, то, согласно теореме 2, п. 1.2, ряд (1) также расходится. ▶

Следствие (признак Куммера в предельной форме). *Если для ряда* (1) *существует последовательность* $\{b_n\}$ *положительных чисел такая, что*

1) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ *расходится;*

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} \right) = l,$

то при $l > 0$ *ряд* (1) *сходится, а при* $l < 0$ *ряд* (1) *расходится.*

◀ В самом деле, при $l > 0$ $\exists n_0 : \forall n > n_0$ $v_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} > \frac{l}{2} > 0$, и, согласно признаку Куммера, ряд (1) сходится.

Если $l < 0$, то $\exists n_0 : \forall n > n_0$ $v_n < \frac{l}{2} < 0$, а тогда, согласно признаку Куммера, ряд (1) расходится. ▶

Теорема 2 (признак Раабе). *Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = r.$$

Тогда при $r > 1$ *ряд* (1) *сходится, а при* $r < 1$ *— расходится.*

◀ Для доказательства теоремы воспользуемся признаком Куммера в предельной форме. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то в качестве последовательности $\{b_n\}$ возьмем $b_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$v_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} n - (n+1) = n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1,$$

и

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1 = r - 1 = l.$$

Если $r > 1$, то $l > 0$, и ряд (1) сходится, а если $r < 1$, то $l < 0$, и ряд (1) расходится. ▶

Теорема 3 (признак Гаусса). *Пусть отношение* $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ *представимо в виде*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\varepsilon}}, \tag{2}$$

где α, β, ε — *постоянные числа, и* $\varepsilon > 0$, *а* γ_n — *ограничено* $|\gamma_n| \leqslant M \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Тогда при $\alpha > 1$ *или* $\alpha = 1$, $\beta > 1$ *ряд* (1) *сходится, а при* $\alpha < 1$ *или* $\alpha = 1$, $\beta \leqslant 1$ — *расходится.*

◀ Поскольку $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to \alpha$ при $n \to \infty$, то, согласно признаку д'Аламбера, ряд (1) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha < 1$.

Пусть теперь $\alpha = 1$, тогда $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\varepsilon}}$ или $n \times \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \beta + \frac{\gamma_n}{n^{\varepsilon}} \to \beta$ при $n \to \infty$. Согласно признаку Раабе, ряд (1) сходится при $\beta > 1$ и расходится при $\beta < 1$

Остается рассмотреть случай, когда $\alpha = \beta = 1$. В этом случае $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\varepsilon}}$. Применим признак Куммера в предельной форме. Поскольку ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

расходится (см. пример 1, п. 1.2), то положим $b_n = n \ln n$. Имеем

$$v_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\varepsilon}}\right) n \ln n - (n+1)\ln(n+1) =$$

$$= (n+1)\ln n + \frac{1}{n^{\varepsilon}}\gamma_n \ln n - (n+1)\ln(n+1) =$$

$$= \gamma_n \frac{\ln n}{n^{\varepsilon}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Так как $\frac{\ln n}{n^{\varepsilon}} \to 0$ при $n \to \infty$ (см. пример 3, п. 6.6, гл. 2), $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \to \ln e = 1$ при $n \to \infty$, то $v_n = \gamma_n \frac{\ln n}{n^{\varepsilon}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \to -1$ при $n \to \infty$, и ряд (1) расходится согласно признаку Куммера в предельной форме. ▶

Пример 1. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

сходится.

Для доказательства применим признак Раабе. Обозначим $a_n = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} \times \frac{1}{2n+1}$; тогда при $n \to \infty$ имеем

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{4n^2+10n+6}{4n^2+4n+1} - 1\right) = \frac{n(6n+5)}{4n^2+4n+1} \to \frac{3}{2} > 1.$$

Следовательно, $r > 1$ и ряд сходится.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}\right)^{\lambda},$$

применив признак Гаусса.

Обозначим $a_n = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}\right)^{\lambda}$, тогда $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{\lambda} \to 1$ при $n \to \infty$. Поскольку $\alpha = 1$, то для выяснения сходимости найдем число β. Имеем

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\frac{(2n+2)^{\lambda} - (2n+1)^{\lambda}}{(2n+1)^{\lambda}} = n\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\lambda} - \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\lambda}}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\lambda}}.$$

Пользуясь асимптотическими равенствами $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\lambda} = 1 + \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\lambda} = 1 + \frac{\lambda}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, находим при $n \to \infty$

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) + n\frac{\frac{\lambda}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{1 + \frac{\lambda}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \to \frac{\lambda}{2}.$$

Таким образом, $\beta = \frac{\lambda}{2}$, в силу чего при $\lambda > 2$ по признаку Раабе ряд сходится; если же $\lambda < 2$, то ряд расходится по тому же признаку. Если $\lambda = 2$, то $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2$ и $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\gamma_n}{n^2}$, где $\gamma_n = \frac{-n-1}{4n+4+\frac{1}{n}} \to -\frac{1}{4}$ при $n \to \infty$. Следовательно, при $\lambda = 2$ ряд сходится согласно признаку Гаусса.

Пример 3. Доказать признак Бертрана: если

$$\lim_{n\to\infty} \ln n \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) = b,$$

то при $b > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $b < 1$ — расходится.

Для доказательства воспользуемся признаком Куммера в предельной форме, где в качестве последовательности $\{b_n\}$ возьмем последовательность $\{n \ln n\}$. Такой выбор допустим, поскольку ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ расходится (см. п. 1.2). Имеем

$$v_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} n \ln n - (n+1)\ln(n+1) = \ln n \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Отсюда, приняв во внимание условия признака и равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = 1$, получим

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \ln n \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) - 1 = b - 1.$$

По признаку Куммера ряд сходится при $b - 1 > 0$, т. е. при $b > 1$, и расходится при $b - 1 < 0$, т. е. при $b < 1$.

§ 2. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

2.1. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. В предыдущих пунктах подробно рассмотрены ряды с положительными членами и доказаны для них достаточные признаки сходимости. Рассмотрим теперь ряды с произвольными членами.

Пусть ряд

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

имеет как положительные, так и отрицательные члены.

Определение 1. *Ряд* (1) *называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд*

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots, \tag{2}$$

составленный из абсолютных величин соответствующих членов ряда (1).

Теорема. *Всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.*

◀ Пусть ряд (1) сходится абсолютно, т. е. сходится ряд (2). Тогда $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n_0$ такое, что $\forall\, n > n_0$ и $\forall\, p > 0$

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Отсюда для этих значений n и p имеем

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon,$$

т. е. ряд (1) сходится согласно критерию Коши. ▶

Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\lambda}}$, $\lambda > 1$, сходится, поскольку сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}$, $\lambda > 1$ (см. п. 1.2).

Заметим, что обратная теорема неверна: например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \tag{3}$$

сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, расходится (см. п. 1.1).

Для исследования ряда (1) на абсолютную сходимость необходимо исследовать на сходимость ряд (2), члены которого положительны. Поэтому к нему применимы все признаки сходимости рядов с положительными членами.

Определение 2. *Ряд* (1) *называется условно сходящимся, если он сходится, в то время как ряд* (2) *расходится.*

Другими словами: *не абсолютно сходящийся ряд называется условно сходящимся.*

Например, ряд (3) условно сходящийся.

2.2. Зависимость суммы ряда от порядка суммирования. Пусть задан числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots. \tag{1}$$

Определение. *Если* $b_n = a_{k_n}$, *где* $\{k_n\}$ — *последовательность, в которой каждое положительное число встречается один и только один раз, то ряд*

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \tag{2}$$

называется перестановкой ряда (1).

Теорема 1. *Если ряд* (1) *сходится абсолютно и имеет сумму* s, *то ряд* (2) *также сходится и имеет ту же сумму* s.

◀ Абсолютная сходимость ряда (2) вытекает из того, что частичные суммы

$$|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n|, \quad n \in \mathbb{N},$$

монотонно возрастают и ограничены сверху суммой $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, которая конечна в силу абсолютной сходимости ряда (1). Остается показать, что ряды (1) и (2) имеют равные суммы. Поскольку ряд (1) сходится абсолютно, то, согласно критерию Коши, $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0$ такое, что $\forall\, p > 0$

$$|a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + \cdots + |a_{n_0+p}| < \varepsilon. \tag{3}$$

Обозначим через m_0 наибольший из индексов, который имеют числа $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$, будучи членами ряда (2). Ясно, что $m_0 > n_0$. Если $n > m_0$, то в разности

$$\gamma_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

члены $a_1, a_2, \ldots, a_n$ взаимно уничтожаются и остаются члены ряда (1) со знаком «+» или «—» и номерами большими, чем n_0. Поэтому, согласно (3), сумма произвольного числа таких членов не превосходит числа ε. Следовательно, $|\gamma_n| < \varepsilon \quad \forall\, n > m_0$, а тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \lim_{n\to\infty} ((a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - \gamma_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - \lim_{n\to\infty}\gamma_n =$$
$$= \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = s. \blacktriangleright$$

Пусть ряд (1) содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов. Обозначим через $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ положительные, а через $-v_1, -v_2, \ldots, -v_n, \ldots$ — отрицательные члены ряда (1).

Лемма. *Если ряд* (1) *сходится абсолютно, то оба ряда*

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{4}$$

и

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots \tag{5}$$

одновременно сходятся.

Если ряд (1) *сходится условно, то оба ряда* (4) *и* (5) *одновременно расходятся.*

◀ Пусть ряд (1) сходится абсолютно и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \omega$. Обозначим через s_n, $n \in \mathbb{N}$, частичные суммы ряда (4), а через σ_n, $n \in \mathbb{N}$, частичные суммы ряда (5). Тогда обе последовательности $\{s_n\}$ и $\{\sigma_n\}$ монотонно возрастают и ограничены сверху числом ω, а поэтому ряды (4) и (5) сходятся.

Пусть теперь ряд (1) сходится условно. Если бы оба ряда (4) и (5) одновременно сходились, то ряд (1) сходился бы абсолютно, что невозможно по предположению. Предположим, что только один из рядов (4) или (5) сходится, а другой расходится. Пусть, например, ряд (4) сходится и имеет сумму s, а ряд (5) расходится. В этом случае $\sigma_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Если через t_n обозначим частичную сумму ряда (1), то тогда из равенства $t_n = s_p - \sigma_q$, $n = p + q$, и того, что $\lim\limits_{p\to\infty} s_p = s$, $\lim\limits_{q\to\infty} \sigma_q = +\infty$, следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = -\infty$. А это противоречит предположению об условной сходимости ряда (1). ▶

Следствие. *Если ряд* (1) *сходится условно, то* $\forall A \in \mathbb{R}$, $\forall B \in \mathbb{R}$ *и* $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ $\exists p, q \in \mathbb{N}$ *такие, что*

$$\begin{aligned} &u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \cdots + u_{n_0+p} > A, \\ &-v_{n_0+1} - v_{n_0+2} + \cdots - v_{n_0+q} < B. \end{aligned} \tag{6}$$

◀ Если бы $\forall p \in \mathbb{N}$ неравенства (6) выполнялись в обратную сторону, то ряды (4) и (5) сходились бы согласно теореме 1 п. 1.2. ▶

Теорема 2 (Р и м а н а). *Если ряд* (1) *сходится условно, то для произвольного* $l \in \mathbb{R}$ *существует перестановка* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *сходящаяся к* l.

◀ Пусть $l \in \mathbb{R}$ задано произвольно. Если, как и выше, $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ положительные, а $-v_1, -v_2, \ldots, -v_n, \ldots$ — отрицательные члены ряда (1), то для l (согласно следствию) существует целое число p_1 такое, что

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{p_1} > l,$$

а

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{p_1-1} \leqslant l.$$

Далее, по той же причине существует целое число q_2 такое, что

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{p_1} - v_1 - v_2 - \cdots - v_{q_2} < l,$$

а

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{p_1} - v_1 - v_2 - \cdots - v_{q_2-1} \geqslant l.$$

Снова, согласно следствию, существует число r_3 такое, что

$$u_1 + \cdots + u_{p_1} - v_1 - \cdots - v_{q_2} + u_{p_1+1} + \cdots + u_{r_3} > l,$$

а

$$u_1 + \cdots + u_{p_1} - v_1 - \cdots - v_{q_2} + u_{p_1+1} + \cdots + u_{r_3-1} \leqslant l.$$

Неограниченно продолжая описанный процесс для ряда (1), получим перестановку

$$u_1 + \cdots + u_{p_1} - v_1 - \cdots - v_{q_2} + u_{p_1+1} + \cdots + u_{r_3} - \cdots, \quad (7)$$

частичные суммы которой колеблются около значения l. Поскольку число l заключено между частичными суммами s_{k_n} и s_{k_n-1}, то это число отличается от s_{k_n} на последнее слагаемое, равное u_{k_n} или $-v_{k_n}$. Поскольку ряд (1) сходится, то общий член его стремится к нулю при $n \to \infty$, а поэтому u_{k_n} и v_{k_n} также стремятся к нулю с возрастанием n. Следовательно, $l - s_{k_n} \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. перестановка (7) имеет своей суммой число l. ▶

2.3. Достаточные признаки сходимости рядов с произвольными членами. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$; $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — произвольные действительные числа; $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$; $n, p \in \mathbb{N}$. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} s_k (v_k - v_{k+1}) + s_{n+p} v_{n+p} - s_n v_{n+1}, \quad (1)$$

которое называется *преобразованием Абеля*.

Действительно, поскольку $u_k = s_k - s_{k-1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, то

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (s_k - s_{k-1}) v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} s_k v_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} s_{k-1} v_k =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} s_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} s_k v_{k+1} = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} s_k v_k + s_{n+p} v_{n+p} - s_n v_{n+1} -$$

$$- \sum_{k=n+1}^{n+p-1} s_k v_{k+1} = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} s_k (v_k - v_{k+1}) + s_{n+p} v_{n+p} - s_n v_{n+1}.$$

Преобразование Абеля можно использовать для получения достаточно тонких признаков сходимости ряда вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n. \quad (2)$$

Теорема 1 (признак Дирихле). *Ряд* (2) *сходится, если частичные суммы* $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ *ограничены, т. е.* $\exists M \in \mathbb{R}$ *такое, что* $|s_n| \leqslant M \ \forall n \in \mathbb{N}$, *а члены последовательности* $\{v_n\}$ *положительны и, не возрастая, стремятся к нулю при* $n \to \infty$.

◀ Поскольку последовательность $\{v_n\}$ не возрастает и при $n \to \infty$ стремится к нулю, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n > n_0 \quad 0 < v_n < \frac{\varepsilon}{2M}$, где M — число, указанное в теореме. Далее, пользуясь преобразованием Абеля, ограниченностью частичных сумм s_n и тем, что $v_k - v_{k+1} \geqslant 0$, получим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} s_k (v_k - v_{k+1}) + s_{n+p} v_{n+p} - s_n v_{n+1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |s_k| (v_k - v_{k+1}) + |s_{n+p}| v_{n+p} + |s_n| v_{n+1} \leqslant$$

$$\leqslant M\left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (v_k - v_{k+1}) + v_{n+p} + v_{n+1}\right) =$$

$$= M\,(v_{n+1} - v_{n+2} + v_{n+2} - v_{n+3} + \cdots + v_{n+p-1} - v_{n+p} + v_{n+p} +$$

$$+ v_{n+1}) = 2M v_{n+1} < 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \quad \forall n > n_0, \ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, согласно критерию Коши, следует сходимость ряда (2). ▶

Теорема 2 (признак Абеля). *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится, а последовательность* $\{a_n\}$ *монотонная и ограниченная, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n \tag{3}$$

сходится.

◀ Монотонная и ограниченная последовательность $\{a_n\}$ имеет конечный предел, который обозначим через a.

Пусть последовательность $\{a_n\}$ неубывающая; тогда последовательность $\{a - a_n\}$, не возрастая, стремится к нулю при $n \to \infty$. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ частичные суммы s_n ограничены, а поэтому, согласно теореме 1, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n (a - a_n) \tag{4}$$

сходится. Из сходимости рядов (4) и $\sum_{n=1}^{\infty} a u_n = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, согласно пункту 1.1, вытекает сходимость ряда (3).

Если последовательность $\{a_n\}$ невозрастающая, то последовательность $\{a_n - a\}$ при $n \to \infty$, не возрастая, стремится к нулю. Повторяя приведенные выше рассуждения, убеждаемся, что ряд (3) сходится. ▶

Определение. *Ряд называется знакочередующимся, если его члены поочередно то положительные, то отрицательные.*

Знакочередующийся ряд можно записать в виде

$$a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots, \tag{5}$$

где $a_k > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Теорема 3 (признак Лейбница). *Знакочередующийся ряд* (5) *сходится, если*

$$0 < a_{n+1} \leqslant a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ и } \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

◀ Сходимость ряда (5) вытекает из признака Дирихле, если положить $u_k = (-1)^{k-1}$, $v_k = a_k$, $k \in \mathbb{N}$. ▶

Следствие. *Если сумму* s *сходящегося знакочередующегося ряда* (5) *заменить ее частичной суммой*

$$s_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n-1} a_n,$$

то абсолютная погрешность $\Delta = |s - s_n|$ *не превосходит абсолютной величины первого из отброшенных членов, т. е.*

$$\Delta = |s - s_n| \leqslant a_{n+1}.$$

◀ Действительно, поскольку $|a_k - a_{k+1}| \geqslant 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, то

$$\begin{aligned}\Delta = |s - s_n| &= |(-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots)| = \\ &= |(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots| = \\ &= (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots = \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots \leqslant a_{n+1}. \end{aligned}$$ ▶

Пример 1. Показать, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin nx$$

сходятся, если $0 < \varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi - \varepsilon$, а последовательность $\{v_n\}$, монотонно не возрастая, стремится к нулю при $n \to \infty$.

Действительно, поскольку частичные суммы

$$\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\cos \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}},$$

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

на сегменте $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ ограничены числом $\sin^{-1} \frac{\varepsilon}{2}$, то, согласно признаку Дирихле, ряды сходятся.

Например, если $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, то ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}, \quad x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon],$$

сходятся.

Пример 2. Доказать, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^\alpha n}$, $\alpha > 0$, сходятся.

Поскольку они знакочередующиеся, а их члены, убывая, стремятся к нулю при $\to \infty$, то по признаку Лейбница они сходятся.

Пример 3. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$ сходится.

Здесь ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ сходится, а последовательность $\left\{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right\}$ монотонно убывающая (см. пример 2, п. 4.4, гл. 2) и ограничена снизу постоянной Эйлера C. Следовательно, по признаку Абеля ряд сходится.

Пример 4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды из примеров 2 и 3.

Мы уже показали, что все они сходятся при $\alpha > 0$. Покажем, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^\alpha n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right),$$

составленные из абсолютных величин указанных рядов, сходятся при $\alpha > 1$ и расходятся при $\alpha \leqslant 1$. Для первых двух рядов это уже доказано (см. п. 1.2). Далее, поскольку

$$\frac{\frac{1}{n^\alpha}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)}{\frac{1}{n^\alpha}} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = C + \gamma_n \to C$$

при $n \to \infty$ (см. п. 4.4, гл. 2), то третий ряд сходится при тех же условиях, что и первый. Таким образом, все три ряда сходятся, но не абсолютно, а условно при $0 < \alpha < 1$.

Пример 5. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + (-1)^n)^p}. \tag{6}$$

Если $p < 0$, то общий член ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$, а поэтому ряд расходится. Пусть $p > 0$. Согласно асимптотическому равенству для $(1 + x)^\mu$ при $x \to 0$ (см. п. 6.6, гл. 2), общий член ряда (1) запишем в виде

$$\frac{(-1)^n}{(n + (-1)^n)^p} = \frac{(-1)^n}{n^p}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{-p} = \frac{(-1)^n}{n^p}\left(1 - p\,\frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

при $n \to \infty$. Ряды

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{p}{n^{1+p}} + o\left(\frac{1}{n^{1+p}}\right)\right) \tag{7}$$

сходятся при $p > 0$; первый уже рассмотрен в примере 2, а второй сходится по признаку сравнения:

$$\frac{p}{n^{1+p}} + o\left(\frac{1}{n^{1+p}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{1+p}}\right).$$

Поэтому частичные суммы рядов (7) имеют конечные пределы, а тогда и частичная сумма ряда (6) имеет конечный предел и, следовательно, он сходится при $\alpha > 0$. Составим ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n + (-1)^n)^p}$$

из абсолютных величин ряда (6). Для его общего члена справедлива оценка

$$\frac{1}{(n+1)^p} \leqslant \frac{1}{(n + (-1)^n)^p} \leqslant \frac{1}{(n-1)^p}, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Отсюда, поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$, заключаем, что ряд (6) сходится абсолютно при $p > 1$. Следовательно, при $0 < p \leqslant 1$ ряд (6) сходится условно.

2.4. Ряды с комплексными членами. В этом пункте рассмотрим ряды, членами которых являются комплексные числа.

Итак, пусть задан ряд

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots, \tag{1}$$

где $z_n = x_n + iy_n$, $z_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Для рядов вида (1) остается в силе определение сходимости ряда и его суммы (определение 2, п. 1.1). Далее, остается справедливым необходимое условие сходимости ряда (1) (теорема 1, п. 1.1), а также критерий Коши сходимости ряда (теорема 2, п. 1.1) и его следствия. Для исследования сходимости рядов с комплексными членами могут быть использованы доказанные ранее достаточные признаки сходимости числовых рядов с действительными членами. Для этого достаточно заметить, что частичные суммы

$$S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \tag{2}$$

ряда (1) могут быть записаны в виде

$$S_n = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + i(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = s_n + i\sigma_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Здесь

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad \sigma_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n \tag{3}$$

являются, соответственно, частичными суммами рядов

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots \tag{4}$$

и

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n + \cdots \tag{5}$$

с действительными членами. Последовательность (2) частичных сумм ряда (1) сходится тогда и только тогда, когда сходятся последовательности (3) частичных сумм рядов (4) и (5) (см. п. 4.13, гл. 2). Поэтому

исследование сходимости ряда (1) сводится к исследованию сходимости рядов (4) и (5), составленных из действительных и мнимых частей соответствующих членов ряда (1).

Как и в случае рядов с действительными членами, ряд (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из модулей его членов:

$$|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + \cdots \tag{6}$$

Теорема 1. *Каждый абсолютно сходящийся ряд сходится.*

◀ Доказательство аналогично доказательству теоремы из пункта 2.1. ▶

Теорема 2. *Ряд* (1) *абсолютно сходится тогда и только тогда, когда одновременно абсолютно сходятся ряды* (4) *и* (5).

◀ Утверждение теоремы вытекает из очевидных неравенств

$$|x_n| \leqslant |z_n| \leqslant |x_n| + |y_n|,$$
$$|y_n| \leqslant |z_n| \leqslant |x_n| + |y_n|,$$

справедливых для всех натуральных n. ▶

Для абсолютно сходящихся рядов с комплексными членами остается справедливой теорема 1, п. 2.2, согласно которой произвольное изменение порядка суммирования абсолютно сходящегося ряда не влияет на его сумму.

Заметим еще, что для исследования абсолютной сходимости рядов с комплексными членами применимы все достаточные признаки сходимости рядов с действительными положительными членами.

Пример 1. Показать, что ряд с комплексными членами

$$e^i + \frac{e^{i2}}{2} + \frac{e^{i3}}{3} + \cdots + \frac{e^{in}}{n} + \cdots$$

сходится.

Поскольку

$$e^{in} = \cos n + i \sin n$$

(см. пример 5, п. 6.6, гл. 2), а ряды с действительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$$

сходятся (см. пример 1, п. 2.3), то сходится данный ряд.

Пример 2. Показать, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+z)\ln^2 n},$$

где $z = x + iy$, сходится.

Действительно, при $n \to \infty$ имеем

$$a_n = \frac{1}{(n+z)\ln^2 n} = \frac{n+x-iy}{((n+x)^2+y^2)\ln^2 n} = \frac{n+x}{((n+x)^2+y^2)\ln^2 n} -$$
$$- i\frac{y}{((n+x)^2+y^2)\ln^2 n} = O\left(\frac{1}{n\ln^2 n}\right) + iO\left(\frac{1}{n^2\ln^2 n}\right),$$

а ряды

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln^2 n}$$

сходятся согласно теореме 5, п. 1.2, поэтому по теореме 2 ряд сходится.

Пример 3. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{\frac{i}{n}}$ расходится.

Поскольку

$$\frac{1}{n} e^{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} + i \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$$

(см. пример 5, п. 6.6, гл. 2) и при $n \to \infty$ справедлива оценка

$$\frac{1}{4n} < \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n}$ расходится, следовательно, согласно теореме 2, исследуемый ряд также расходится.

§ 3. УМНОЖЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Теорема 1. *Если числовые ряды*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

и

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \tag{2}$$

сходятся абсолютно и имеют суммы, соответственно равные s *и* σ, *то ряд*

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots, \tag{3}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ — *произведения вида*

$$\begin{array}{l} a_1b_1, \quad a_1b_2, \quad a_1b_3, \ldots, a_1b_q, \ldots, \\ a_2b_1, \quad a_2b_2, \quad a_2b_3, \ldots, a_2b_q, \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_pb_1, \quad a_pb_2, \quad a_pb_3, \ldots, a_pb_q, \ldots, \end{array} \tag{4}$$

взятые в произвольном порядке, сходится абсолютно и имеет сумму $s\sigma$.

◀ По условию ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ сходятся; пусть их суммы равны соответственно s^* и σ^*. Тогда из очевидного неравенства

$$|c_1| + |c_2| + \cdots + |c_n| \leqslant$$

$$\leqslant (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m|)(|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_m|) \leqslant s^*\sigma^*,$$

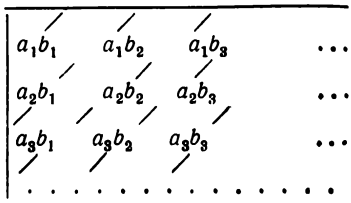
где m наибольший из индексов p и q в произведениях $|a_pb_q|$, которые входят в частичную сумму $|c_1| + \ldots + |c_n|$, следует ограниченность, а значит, и сходимость частичных сумм $|c_1| + \ldots + |c_n|$. Следова-

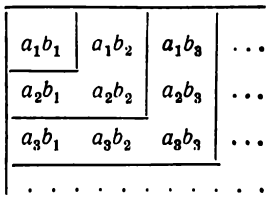
тельно, ряд (3) сходится абсолютно, а тогда его сумма не зависит от порядка суммирования произведений вида (4). Так как подпоследовательность

$$s_{n^2} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

сходящейся последовательности частичных сумм ряда (3) сходится к $s\sigma$, то ряд (3) имеет сумму, равную $s\sigma$. ▶

Члены ряда (3) обычно записывают в порядке следования произведений (4) по диагоналям или по квадратам:





Теорема 2. *Пусть ряды*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{5}$$

и

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \tag{6}$$

сходятся и имеют суммы соответственно s *и* σ, *причем один из них, например,* (5), *сходится абсолютно. Тогда ряд*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

где $u_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$, *сходится и имеет сумму* $s\sigma$.

◀ Положим

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Тогда

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} (a_1b_k + a_2b_{k-1} + \cdots a_kb_1) = a_1\sigma_n + a_2\sigma_{n-1} + \cdots + a_n\sigma_1. \tag{7}$$

Вычитая (7) из тождества

$$s_n\sigma_n = s_n\sigma_n,$$

получим равенство

$$s_n\sigma_n - v_n = a_1\sigma_n + a_2\sigma_{n-1} + \cdots + a_n\sigma_1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\sigma_n =$$
$$= a_2(\sigma_n - \sigma_{n-1}) + \cdots + a_{p+1}(\sigma_n - \sigma_q) +$$
$$+ a_{p+2}(\sigma_n - \sigma_{q-1}) + \cdots + a_n(\sigma_n - \sigma_1),$$

где $p + q = n$, а затем и оценку

$$|s_n\sigma_n - v_n| \leqslant |a_1| \cdot |\sigma_n - \sigma_{n-1}| + \cdots + |a_{p+1}| \cdot |\sigma_n - \sigma_q| +$$
$$+ |a_{p+2}| \cdot |\sigma_n - \sigma_{q-1}| + \cdots + |a_n| \cdot |\sigma_n - \sigma_1|. \tag{8}$$

Поскольку последовательность $\{\sigma_n\}$ сходится, а ряд (5) сходится абсолютно, то разности

$$|\sigma_n - \sigma_{q-1}|, \ldots, |\sigma_n - \sigma_1|$$

$\forall\, q \in \mathbb{N}$ ограничены некоторым числом M, а суммы

$$|a_2| + \cdots + |a_{p+1}|$$

$\forall\, p \in \mathbb{N}$ ограничены некоторым числом K. В силу сходимости ряда (6) $\sigma_n - \sigma_q \to 0$ при $q \to \infty$, где $p + q = n$; поэтому $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, q_0$ такое, что $\forall\, q > q_0$ разности

$$|\sigma_n - \sigma_{q-1}|, \ldots, |\sigma_n - \sigma_q|$$

меньше ε, а в силу абсолютной сходимости ряда (5) целое число p можно выбрать таким, чтобы

$$|a_{p+2}| + \cdots + |a_n| < \varepsilon.$$

Пользуясь этими оценками, из (8) получим неравенство

$$|s_n\sigma_n - v_n| \leqslant \varepsilon\,(|a_2| + \cdots + |a_{p+1}|) + \\ + M\,(|a_{p+2}| + \cdots + |a_n|) < \varepsilon K + \varepsilon M,$$

справедливое при $n > q_0 + p = n_0$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} s_n\sigma_n = \lim_{n\to\infty} s_n \cdot \lim_{n\to\infty} \sigma_n = s\sigma. \ \blacktriangleright$$

§ 4. ДВОЙНЫЕ И КРАТНЫЕ РЯДЫ

4.1. Сходимость и сумма двойного ряда.

Определение 1. *Двойной числовой последовательностью называется отображение*

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R} : (m, n) \mapsto a_{mn}, \qquad (1)$$
$$m \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_{mn} \in \mathbb{R}.$$

Числа a_{mn}, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, называются *членами* двойной последовательности. Числа двойной последовательности удобно расположить в таблицу (матрицу)

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \qquad (2)$$

Такую бесконечную таблицу (бесконечную прямоугольную матрицу) называют таблицей с двумя входами. Каждое число из этой таблицы определяется двумя натуральными числами (индексами). Кроме того, эти же числа указывают место, где расположен данный элемент последовательности (1) в таблице (2): первое число указывает номер строки, а второе — номер столбца.

Желая придать определенный смысл выражению

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}, \tag{3}$$

где a_{mn} элементы последовательности (1), назовем его двойным числовым рядом или просто двойным рядом.

Элементы последовательности (1) называются *членами ряда*, а a_{mn} — *общим членом ряда*.

Конечные суммы

$$s_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} = a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} + \\ + a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} + \cdots + \\ + a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn}, \quad m,\ n \in \mathbb{N}$$

называются *частичными суммами* ряда (3).

Определение 2. *Двойная последовательность* $\{s_{mn}\}$ *частичных сумм ряда* (3) *имеет конечный предел, если* $\exists\, s \in \mathbb{R}$ *и* $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}$ *такое, что неравенство*

$$|s_{mn} - s| < \varepsilon \tag{4}$$

выполняется, как только $m > N$, $n > N$.

Определение 3. *Если последовательность частичных сумм имеет конечный предел* s, *то двойной ряд* (3) *называется* с х о д я щ и м с я, *и при этом число* s *называется* с у м м о й д в о й н о г о р я д а.

В этом случае записывают

$$s = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m,n} a_{mn}.$$

Если частичные суммы стремятся к бесконечности или вообще не имеют предела, то двойной ряд (3) *называется* р а с х о д я щ и м с я.

Теорема 1. *Если двойной ряд* (3) *сходится, то*

$$\lim_{(m,n)\to\infty} a_{mn} = 0.$$

◀ Из определения s_{mn} следует

$$a_{mn} = s_{mn} - s_{m\,n-1} - s_{m-1\,n} + s_{m-1\,n-1};$$

тогда $a_{mn} \to s - s - s + s = 0$ при $(m, n) \to \infty$. ▶

В некоторых случаях сумму двойного ряда (3) можно вычислить одним из следующих двух способов.

Суммируем члены ряда (3) сначала по строкам таблицы (2)

$$a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} + \cdots = u_1,$$
$$a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} + \cdots = u_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn} + \cdots = u_m,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

а затем находим сумму ряда

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_m + \cdots .$$

И, наоборот, суммируя члены ряда (3) сначала по столбцам таблицы (2)

$$\begin{aligned}
&a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{m1} + \cdots = v_1,\\
&a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{m2} + \cdots = v_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{mn} + \cdots = v_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

затем вычислить сумму

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots .$$

В каких случаях такое суммирование приводит к сумме ряда (3), устанавливает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть двойной ряд* (3) *сходится. Тогда:*

а) *если сходятся ряды по строкам*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = u_m, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

то ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \right) \tag{6}$$

также сходится, и сумма его равна сумме двойного ряда;

б) *если сходятся ряды по столбцам*

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = v_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \right) \tag{8}$$

также сходится, и сумма его равна сумме двойного ряда.

Ряды (6) и (8) называются *повторными рядами.*

◀ а) Пусть s — сумма двойного ряда (3), тогда $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall\, m,\ n > N$

$$s - \varepsilon < s_{mn} < s + \varepsilon.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\varepsilon &< \sum_{k=1}^{m} \sum_{p=1}^{n} a_{kp} - \sum_{k=1}^{m} u_k + \sum_{k=1}^{m} u_k - s =\\
&= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{p=1}^{n} a_{kp} - u_k \right) + \sum_{k=1}^{m} u_k - s < \varepsilon.
\end{aligned}$$

При фиксированном $m > N$ и $n \to \infty$ получим

$$s - \varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{m} u_k \leqslant s + \varepsilon,$$

т. е.

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} u_k = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \right) = s.$$

б) Аналогично доказывается, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{l=1}^{n} v_l = \lim_{n\to\infty} \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \right) = s. \blacktriangleright$$

Суммирование двойного ряда по строкам или по столбцам, т. е. нахождение суммы повторных рядов не всегда приводит к сумме двойного ряда.

Например, ряд $\sum\limits_{m,n} a_{mn}$, для которого

$$s_{mn} = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \sin \frac{\pi m}{2} \sin \frac{\pi n}{2},$$

сходится и его сумма равна нулю.

Действительно, $\forall\, \varepsilon > 0$ неравенство

$$|s_{mn}| = \left| \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \sin \frac{\pi m}{2} \sin \frac{\pi n}{2} \right| \leqslant \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \varepsilon$$

справедливо при $\forall\, m,\ n > N > \dfrac{2}{\varepsilon}$. Однако для этого ряда суммы рядов с членами

$$u_m = s_{mn} - s_{m-1\, n}, \quad v_n = s_{mn} - s_{m\, n-1}$$

не существуют, т. е. ряды по строкам и столбцам расходятся.

Обратная теорема к теореме 2 не верна. Например, ряд $\sum\limits_{m,n} a_{mn}$, для которого

$$s_{mn} = \frac{mn}{(m+n)^2},$$

имеет сходящиеся повторные ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \right) = \lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} s_{mn} \right) = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} s_{mn} \right) = 0.$$

Однако двойной ряд расходится, так как его частичные суммы не имеют предела при $m \to \infty$, $n \to \infty$. В самом деле, пусть $m = k$, $n = k$, $k \to \infty$, тогда

$$s_{mn} = s_{kk} = \frac{k^2}{4k^2} \to \frac{1}{4};$$

если же $m = 2k$, $n = k$, $k \to \infty$, то

$$s_{mn} = s_{2kk} = \frac{2k^2}{9k^2} \to \frac{2}{9} \neq \frac{1}{4}, \quad k \to \infty.$$

4.2. Двойные ряды с положительными членами. Пусть члены a_{mn} двойного ряда

$$\sum_{m,n} a_{mn} \tag{1}$$

неотрицательны. Такие ряды называются положительными.

Теорема 1. *Двойной ряд* (1) *с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены.*

◀ Если двойной ряд сходится, то существует конечный предел его частичных сумм, поэтому они ограничены.

Пусть теперь частичные суммы s_{mn} ограничены:

$$s_{mn} \leqslant M \quad \forall\, m,\ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\exists \sup s_{mn} = s$. Покажем, что s является суммой двойного ряда. Из определения точной верхней грани следует, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists (m_0, n_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : s_{m_0 n_0} > s - \varepsilon$. В силу возрастания s_{mn} $\forall\, m,\ n > N$, $N = \max\{m_0, n_0\}$, $s_{mn} > s - \varepsilon$, отсюда $|s_{mn} - s| < \varepsilon$ $\forall\, m,\ n > N$, т. е. $\lim\limits_{(m,n)\to\infty} s_{mn} = s$. ▶

Теорема 2. *Из сходимости одного из трех положительных рядов*

$$\sum_{m,n} a_{mn}, \quad \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}\right)$$

вытекает сходимость двух других рядов.

◀ Пусть сходится двойной ряд (1) и его сумма равна s. Тогда, согласно предыдущей теореме,

$$s_{mn} \leqslant s \tag{2}$$

и, следовательно,

$$a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn} \leqslant s_{mn} \leqslant s,$$

а отсюда вытекает, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ сходятся при любом m. Обозначим $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn} = u_m$; тогда $\lim\limits_{n\to\infty} s_{mn} = \sum\limits_{k=1}^{m} u_k$. Переходя в неравенстве (2) к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\sum_{k=1}^{m} u_k \leqslant s, \quad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

а поскольку эти суммы ограничены с возрастанием m, то сходится повторный ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\right) = \sigma$$

и его сумма σ не превосходит суммы двойного ряда:

$$\sigma \leqslant s. \tag{3}$$

Теперь предположим, что сходится повторный ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\right)=\sigma.$$

Для доказательства сходимости двойного ряда заметим, что

$$s_{mn}=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{m} u_k\leqslant\sigma,$$

т. е. частичные суммы двойного ряда ограничены. На основании предыдущей теоремы двойной ряд (1) сходится, причем его сумма удовлетворяет неравенству

$$s\leqslant\sigma. \tag{4}$$

Из (3) и (4) вытекает, что $\sigma = s$.

При доказательстве сходимости второго повторного ряда рассуждения аналогичны. ▶

Пусть члены a_{mn} двойного ряда (1) расположены в таблицу с двумя входами (см. п. 4.1). Согласно теореме 2, п. 12.2, гл. I, множество чисел, расположенных в таблице с двумя входами, счетно, поэтому его можно расположить в виде последовательности

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots\ .$$

Это можно сделать различными способами, например, в порядке следования по диагоналям или по квадратам (см. § 3). Таким способом будут перенумерованы все члены двойного ряда (1), так что двойной ряд можно переписать в виде простого ряда

$$b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots\ . \tag{5}$$

Ряд (5) называется *представлением* двойного ряда (1) в виде простого ряда.

Теорема 3. *Пусть задан двойной ряд и задано его представление в виде простого ряда. Тогда из сходимости одного ряда вытекает сходимость другого.*

◀ Пусть двойной ряд сходится

$$\sum_{m,n} a_{mn}=s.$$

Для любой частичной суммы σ_p простого ряда,

$$\sigma_p=b_1+b_2+\cdots+b_p,$$

$\exists\, m_0,\ n_0\in\mathbb{N}$ такие, что $s_{m_0n_0}$ содержит все члены частичной суммы σ_p. Тогда

$$b_1+b_2+\cdots+b_p\leqslant s_{m_0n_0}\leqslant s,$$

т. е. частичные суммы σ_p ограничены. А так как члены простого ряда неотрицательны и его частичные суммы ограничены, то он сходится и его сумма

$$\sigma\leqslant s. \tag{6}$$

Предположим теперь, что сходится простой ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_p = \sigma.$$

Для любых m и n $\exists\, p_0$ такое, что все члены суммы s_{mn} содержатся в сумме σ_{p_0}; тогда

$$s_{mn} \leqslant \sigma_{p_0} \leqslant \sigma.$$

Отсюда и из теоремы 1 следует, что двойной ряд (1) сходится и его сумма

$$s \leqslant \sigma. \tag{7}$$

Из (6) и (7) вытекает, что $s = \sigma$. ▶

4.3. Абсолютно сходящиеся ряды.

Определение 1. *Двойной ряд* $\sum\limits_{m,n} a_{mn}$ *называется* ***абсолютно сходящимся,*** *если сходится ряд* $\sum\limits_{m,n} |a_{mn}|$.

Теорема 1. *Всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.*

◀ Обозначим

$$s_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}, \quad \sigma_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} |a_{kl}|,$$

$$\sigma = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sigma_{mn}.$$

Сначала покажем, что последовательность

$$s_{11}, \quad s_{22}, \quad \ldots, \quad s_{mm}, \quad \ldots \tag{1}$$

сходится. В самом деле, $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, N \in \mathbb{N}$ такое что, $\forall\, m,\ n > N$

$$|s_{nn} - s_{mm}| \leqslant |\sigma_{nn} - \sigma_{mm}| \leqslant |\sigma_{nn} - \sigma| + |\sigma - \sigma_{mm}| < \varepsilon.$$

Поэтому, согласно критерию Коши, последовательность (1) сходится. Теперь покажем, что $s = \lim\limits_{m\to\infty} s_{mm}$ является суммой двойного ряда. Действительно, $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, K \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall\, m,\ n > K$

$$|s_{mn} - s| \leqslant |s_{mn} - s_{mm}| + |s_{mm} - s| \leqslant$$

$$\leqslant |\sigma_{mn} - \sigma_{mm}| + |s_{mm} - s| \leqslant |\sigma_{mn} - \sigma| + |\sigma_{mm} - \sigma| + |s_{mm} - s| < 3\varepsilon.$$

Отсюда непосредственно следует, что число s является суммой двойного ряда ▶

Теорема 2. *Если двойной ряд*

$$\sum_{m,n} a_{mn} \tag{2}$$

сходится абсолютно, то ряды по строкам $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn} = u_m$, $m \in \mathbb{N}$, $\left(\text{по столбцам } \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{mn} = v_n,\ n \in \mathbb{N}\right)$ *также сходятся абсолютно. Кроме*

того, сходится абсолютно ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_m \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n\right)$ *и имеет ту же сумму, что и двойной ряд.*

◀ Если ряд (2) сходится абсолютно, то, согласно теореме 2, п. 4.2, сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|\right).$$

Из очевидного неравенства

$$\left|\sum_{n=1}^{p} a_{mn}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{p} |a_{mn}|$$

при $p \to \infty$ получаем неравенство

$$|u_m| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|,$$

из которого, согласно теореме 2, п. 1.2, вытекает сходимость ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} |u_m| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|\right).$$

Первая часть теоремы доказана.

Далее, из сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|$, $m \in \mathbb{N}$, вытекает сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

(см. п. 2.1). Согласно теореме 2, п. 4.1, ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\right)$$

сходится и его сумма равна сумме двойного ряда. Аналогично доказывается утверждение для ряда по столбцам. ▶

Теорема 3. *Пусть задан двойной ряд* (2) *и задано его представление в виде простого ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{4}$$

Тогда из абсолютной сходимости одного из них вытекает абсолютная сходимость другого, а также равенство их сумм.

◀ Согласно теореме 3, п. 4.2, из сходимости одного из рядов

$$\sum_{m,n} |a_{mn}|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

вытекает сходимость другого.

Поскольку ряд (4) сходится абсолютно, то его сумма не зависит от порядка суммирования. Суммируя члены ряда (4) по квадратам, для его частичных сумм $B_k = \sum_{p=1}^{mn} b_p$, где $k = mn$ получаем равенство

$$B_k = s_{mn}.$$

Отсюда при $m \to \infty$, $n \to \infty$ получаем равенство сумм рядов (2) и (4) ▶

4.4. Кратные ряды. Понятие p-кратного ($p > 2$) ряда вводится в полной аналогии с двойным рядом.

Определение. *p-кратной числовой последовательностью называется отображение*

$$\underbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{p \text{ множителей}} \to \mathbb{R} : (i, j, \ldots, k) \mapsto a_{i,j,\ldots,k},$$

где $i, j, \ldots, k \in \mathbb{N}$, $a_{i,j,\ldots,k} \in \mathbb{R}$.

Числа $a_{i,j,\ldots k}$ называются *членами последовательности*. Символ

$$\sum_{i,j,\ldots,k=1}^{\infty} a_{i,j,\ldots,k} \tag{1}$$

называется *p-кратным числовым рядом*. Сумма

$$s_{m,n,\ldots,r} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \cdots \sum_{k=1}^{r} a_{i,j,\ldots,k} \tag{2}$$

называется *частичной суммой ряда* (1).

Частичная сумма (2) имеет конечный предел, если $\exists\, s \in \mathbb{R}$ и $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall\, m, n, \ldots, r > N$ выполняется неравенство

$$|s_{m,n,\ldots,r} - s| < \varepsilon.$$

Если последовательность частичных сумм (2) имеет конечный предел s, то p-кратный ряд (1) называется *сходящимся*, а число s *суммой p-кратного ряда*.

Основные результаты, полученные для двойных рядов, переносятся на p-кратные ряды.

§ 5. БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

5.1. Сходимость бесконечного произведения. В предыдущих параграфах операция сложения действительных чисел была распространена на бесконечное число слагаемых. Теперь покажем, как операция умножения распространяется на бесконечное число множителей.

Пусть задана последовательность чисел

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_n, \quad \ldots .$$

Из членов этой последовательности составим символ

$$b_1 \cdot b_2 \ldots b_n \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} b_n, \tag{1}$$

который называется *бесконечным произведением* или просто *произведением*. Числа $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ называются *членами бесконечного произведения*, а

$$p_1 = b_1, \quad p_2 = b_1 \cdot b_2, \quad \ldots, \quad p_n = b_1 \cdot b_2 \ldots b_n$$

— *частичными произведениями*.

Определение 1. *Если частичные произведения p_n при $n \to \infty$ имеют конечный предел p, отличный от нуля, то произведение называется сходящимся.*

В этом случае число p назовем *значением произведения* и запишем

$$p = \prod_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Если предел частичных произведений равен нулю или бесконечности или вообще не существует, то произведение называется расходящимся.

Если хотя бы один из членов произведения равен нулю, то все частичные произведения, начиная с некоторого номера, равны нулю, а поэтому произведение расходится. В дальнейшем будем считать, что все члены произведения отличны от нуля.

Рассмотрим произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^n}, \quad x \neq 0, \quad \frac{x}{2^n} \neq k\pi, \quad k, \ n \in \mathbb{N}.$$

Для вычисления частичных произведений

$$p_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2} \ldots \cos\frac{x}{2^n}$$

умножим и разделим p_n на $\sin\frac{x}{2^n}$, затем последовательно n раз применим формулу $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$; в результате получим

$$p_n = \frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2} \ldots \cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2^n}}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2} \ldots \cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} \cdot \sin x.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x},$$

так что произведение сходится и его значение $p = \frac{\sin x}{x}$.

Следующая теорема устанавливает *необходимое условие сходимости* произведения.

Теорема 1. *Если произведение сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

◀ Если произведение сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$, $p \neq 0$, $p \neq \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} p_{n-1} = p$; поэтому

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{p}{p} = 1. \blacktriangleright$$

Полагая $b_n = 1 + a_n$, произведение (1) можно записать в виде

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n). \tag{2}$$

Из теоремы 1 следует, что для сходимости произведения (2) необходимо, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \blacktriangleright \tag{3}$$

Например, произведение $\prod\limits_{n=2}^{\infty} (1 - \sqrt[n]{n})$ расходится, поскольку $a_n = \sqrt[n]{n} \to 1$ при $n \to \infty$. То, что условие (3) является только необходимым, видно из следующего примера. Для произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ необходимое условие выполнено: $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. Однако это произведение расходится, поскольку

$$p_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n} = n + 1 \to \infty \quad \text{при } n \to \infty.$$

Из определения сходимости произведения следует, что отбрасывание или приписывание в начале произведения конечного числа отличных от нуля сомножителей не изменяет сходимости или расходимости произведения. А из необходимого условия сходимости произведения вытекает, что $b_n > 0 \quad \forall\, n > n_0$. Поэтому, не ограничивая общности, предположим, что все члены произведения (1) (или (2)) положительны.

Теорема 2. *Произведение* (1) *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln b_n. \tag{3}$$

Причем, если s сумма ряда, то значение произведения (1) равно $p = e^s$; если p значение произведения (1), то сумма ряда (3) равна $s = \ln p$.

◀ Если через s_n обозначим частичные суммы ряда (3), а через p_n частичные произведения (1), то

$$s_n = \ln p_n, \quad p_n = e^{s_n}.$$

Если произведение (1) сходится, то $p_n \to p$ при $n \to \infty$, а тогда, в силу непрерывности логарифмической функции, $\ln p_n \to \ln p$ и поэтому существует конечный предел частичной суммы ряда (3) $s = \ln p$. Если же ряд (3) сходится, то $s_n \to s$ при $n \to \infty$, а тогда, в силу непрерывности показательной функции $n \mapsto e^{s_n}$, частичные произведения p_n имеют конечный предел $p = e^s$. ▶

Теорема 3. *Если хотя бы начиная с некоторого номера n, $a_n > 0$ ($a_n < 0$), то произведение (2) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{4}$$

◀ Для сходимости ряда (4) и произведения (2) необходимо, чтобы $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть это условие выполнено; тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1. \tag{5}$$

Отсюда, считая, что члены ряда (4) одного знака, согласно теореме 2, п. 1.2, заключаем, что ряды (4) и (3), где $b_n = 1 + a_n$, сходятся или расходятся одновременно. Поэтому на основании предыдущей теоремы ряд (4) и произведение (2) сходятся или расходятся одновременно. ▶

5.2. Критерий Коши. Установим необходимое и достаточное условие сходимости бесконечного произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n), \tag{1}$$

где a_n — действительные числа произвольного знака.

Теорема. *Бесконечное произведение (1) сходится тогда и только тогда, когда* $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 : \forall\, n > n_0 \wedge \forall\, m \in \mathbb{N}$

$$|(1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2}) \ldots (1 + a_{n+m}) - 1| < \varepsilon. \tag{2}$$

◀ *Необходимость.* Пусть произведение (1) сходится; тогда $a_n \neq -1$ и $\exists\, \beta > 0$, такое, что $|p_n| > \beta \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Согласно критерию Коши для последовательности (см. теорема 2, п. 4.10, гл. 2) $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n_0 : \forall\, n > n_0 \wedge \forall\, m \in \mathbb{N}$

$$|p_{n+m} - p_n| < \varepsilon\beta.$$

Отсюда

$$|p_{n+m} - p_n| < \varepsilon\beta < \varepsilon\,|p_n|$$

или

$$\frac{|p_{n+m} - p_n|}{p_n} < \varepsilon$$

или, что то же самое,

$$\left|\frac{p_{n+m}}{p_n} - 1\right| = |(1 + a_{n+1}) \ldots (1 + a_{n+m}) - 1| < \varepsilon.$$

Достаточность. Предположим теперь, что неравенство (2) выполнено и по заданному ε указано число n_0. Тогда из (2) при $\forall\, m \in \mathbb{N}$

получим неравенство

$$|(1 + a_{n+1}) \dots (1 + a_{n+m}) - 1| = \left| \frac{p_{n+m}}{p_n} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Отсюда

$$|p_{n+m}| < (1 + \varepsilon)|p_n| = A \quad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

так что последовательность $\{p_n\}$ ограничена. Согласно условию теоремы, $\exists\, N > n_0$ такое, что $\forall\, n > N \wedge \forall\, m \in \mathbb{N}$ имеем

$$|(1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2}) \dots (1 + a_{n+m}) - 1| = \left| \frac{p_{n+1}}{p_n} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{A},$$

или, поскольку $|p_n| < A \ \forall\, n > n_0$, то

$$|p_{n+m} - p_n| < \frac{\varepsilon}{A}|p_n| < \varepsilon.$$

Тогда, согласно критерию Коши для последовательности (теорема 2, п. 4.10, гл. 2), заключаем, что последовательность частичных произведений $\{p_n\}$ сходится. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p \neq 0$. В самом деле, если бы $p = 0$, то из неравенства

$$\left| \frac{p_{n_0+m}}{p_{n_0}} - 1 \right| < \varepsilon, \quad \varepsilon < 1,$$

справедливого $\forall\, m \in \mathbb{N}$ при $m \to \infty$, следовало бы, что $1 < \varepsilon$, а это невозможно. ▶

5.3. Абсолютно сходящиеся произведения.

Определение. *Произведение*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \tag{1}$$

называется абсолютно сходящимся, если сходится произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|). \tag{2}$$

Теорема 1. *Всякое абсолютно сходящееся произведение сходится.*

◀ Пусть произведение (1) сходится абсолютно. Тогда сходится произведение (2) и, согласно критерию Коши (см. п. 5.2), $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0$: $\forall\, n > n_0 \wedge \forall\, m \in \mathbb{N}$

$$|(1 + |a_{n_0+1}|)(1 + |a_{n_0+2}|) \dots (1 + |a_{n_0+m}|) - 1| < \varepsilon.$$

Поскольку $\forall\, n > n_0 \wedge \forall\, m \in \mathbb{N}$

$$|(1 + a_{n_0+1})(1 + a_{n_0+2}) \dots (1 + a_{n_0+m}) - 1| =$$

$$= |1 + a_{n_0+1}a_{n_0+2} + \dots + a_{n_0+1}a_{n_0+m} + \dots + a_{n_0+1}a_{n_0+2} \dots a_{n_0+m} -$$

$$- 1| \leqslant |a_{n_0+1}||a_{n_0+2}| + \dots + |a_{n_0+1}||a_{n_0+m}| + \dots +$$

$$+ |a_{n_0+1}||a_{n_0+2}| \dots |a_{n_0+m}| = 1 + |a_{n_0+1}||a_{n_0+2}| + \dots +$$

$$+|a_{n_0+1}||a_{n_0+m}|+\cdots+|a_{n_0+1}||a_{n_0+2}|\ldots|a_{n_0+m}|-1=$$
$$=(1+|a_{n_0+1}|)(1+|a_{n_0+2}|)\ldots(1+|a_{n_0+m}|)-1<\varepsilon,$$

то произведение (1) сходится согласно критерию Коши. ▶

Из теоремы 3, п. 5.1, получаем следующую теорему, относящуюся к абсолютной сходимости произведения.

Теорема 2. *Произведение* (1) *сходится абсолютно тогда и только тогда, когда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно.*

Например, произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\right)$ сходится абсолютно, поскольку абсолютно сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

§ 6. МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ

6.1. Линейные методы суммирования. Пусть задан числовой ряд

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \qquad (1)$$

В пункте 1.1 определена сумма ряда (1) как конечный предел последовательности частичных сумм. Если же последовательность частичных сумм не имеет конечного предела, но $s_n\to+\infty$ (или $s_n\to-\infty$) при $n\to\infty$, то $+\infty$ (или $-\infty$) можно принять за сумму ряда и в этом случае говорят, что ряд (1) сходится к $+\infty$ (или $-\infty$). Если же предел последовательности частичных сумм вообще не существует, то ряд (1) называют расходящимся. Таким образом, в этом случае ряд (1) оказывается лишенным суммы. В то же время целый ряд задач математики приводит к необходимости оперировать с расходящимися рядами, что, в свою очередь, приводит к необходимости приписывать «сумму» расходящимся рядам. Приемы, позволяющие приписывать «сумму» расходящемуся ряду, называют *методами суммирования рядов*.

Наиболее распространенные методы суммирования строятся по следующему принципу: пусть A матрица с бесконечным числом строк и столбцов

$$A=\begin{Vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \ldots & a_{0n} & \ldots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \ldots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix}.$$

Вместо обычных частичных сумм s_n ряда (1) рассматривают суммы вида

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}s_k, \quad n\in\mathbb{Z}_0, \quad \mathbb{Z}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}, \qquad (2)$$

где ряды в правой части этих равенств сходятся.

Если при этом существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s,$$

то число s называют «суммой» ряда (1), и говорят, что метод, определяемый матрицей A, суммирует ряд (1) к числу s. Это число s в дальнейшем будем называть *обобщенной суммой ряда* (1).

Определение обобщенной суммы ряда обычно подчиняется двум требованиям.

Во-первых, если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ имеет обобщенную сумму s, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ имеет обобщенную сумму t, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$, где λ, $\mu \in \mathbb{R}$, также имеет обобщенную сумму $\lambda s + \mu t$. Метод суммирования, для которого выполняется данное требование, называется *линейным методом суммирования*. Множество всех рядов, для которых определены обобщенные суммы с помощью линейного метода суммирования, образуют векторное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Во-вторых, если ряд (1) сходится в обычном смысле и имеет сумму s, то и обобщенная его сумма также должна равняться числу s. Метод суммирования, обладающий таким свойством, называется *регулярным*.

Следующая теорема обобщает теорему 1, п. 4.6, гл. I, которая доказана для случая, когда матрица A треугольная, т. е.

$$A = \begin{Vmatrix} a_{00} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ a_{10} & a_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k0} & a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}.$$

Теорема (Т е п л и ц а). *Линейный метод суммирования, определяемый матрицей A, регулярен тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия (условия Теплица):*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$, $k \in \mathbb{Z}_0$;

2) *если* $A_n = a_{n0} + a_{n1} + \dots + a_{nk} + \dots$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 1$;

3) *если* $K_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|$, *то* $K_n < C$, $n \in \mathbb{Z}_0$, *где* C — *постоянное.*

◀ Докажем только достаточность условий Теплица (доказательство необходимости см. в кн.: Харди Г. Расходящиеся ряды. М., ИЛ. 1951).

Пусть $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Положим $s_n = s + \varepsilon_n$; тогда $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поскольку

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k = s \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \varepsilon_k = sA_n + \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \varepsilon_k,$$

а, согласно условию 2), $A_n \to 1$ при $n \to \infty$, то остается доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk}\varepsilon_k = 0$. Для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ выберем k_0 столь большим, чтобы $|\varepsilon_k| < \varepsilon \ \forall k > k_0$.

Тогда

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\varepsilon_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{k_0} a_{nk}\varepsilon_k\right| + \varepsilon \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |a_{nk}|. \tag{3}$$

В первой сумме в правой части неравенства количество членов ограничено, $a_{nk} \to 0$ при $n \to \infty$, числа ε_k ограничены в совокупности; поэтому $\left|\sum\limits_{k=0}^{k_0} a_{nk}\varepsilon_k\right| \to 0$ при $n \to \infty$. Вторая сумма не превосходит εC, где C — постоянное число из условия 3) теоремы, а ε — произвольно малое. Поэтому правая часть неравенства (3) может быть сделана как угодно малой с возрастанием n. Следовательно, $\sigma_n \to s$ при $n \to \infty$. ▶

6.2. Метод Чезаро (метод средних арифметических). Один из простейших классических методов суммирования с помощью матрицы A (см. п. 6.1) предложил Чезаро. Согласно методу Чезаро, в качестве суммы расходящегося ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

(если задан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, то в качестве a_0 берем число 0) принимают число s, где $s = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$,

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1},$$

а s_n — частичные суммы ряда (1).

Здесь

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & \text{если } k = 0, 1, \ldots, n, \\ 0, & \text{если } k > n, \end{cases}$$

поэтому бесконечная матрица $A = (a_{nk})$ удовлетворяет условиям теоремы пункта 6.1 и, следовательно, метод Чезаро является регулярным методом. Впрочем, регулярность метода средних арифметических непосредственно вытекает из следствия теоремы 2, п. 4.6, гл. 2.

Заметим, что метод Чезаро является не только регулярным, но и вполне регулярным, т. е. если $s_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, то и $\sigma_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

В самом деле, $\forall M > 0 \ \exists n_0$, такое, что $s_n > M \ \forall n > n_0$. Тогда

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n_0}}{n+1} + \frac{s_{n_0+1} + \cdots + s_n}{n+1}.$$

Первое слагаемое стремится к нулю при $n \to \infty$, а для второго слагаемого справедливо неравенство

$$\frac{s_{n_0+1} + s_{n_0+2} + \cdots + s_n}{n+1} > M\,\frac{n-n_0}{n+1} > \frac{M}{2}$$

$\forall\, n > 2n_0 + 1$. Следовательно, $\sigma_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Пример 1. Рассмотреть расходящийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n + \cdots .$$

Имеем

$$s_n = \frac{1+(-1)^n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}_0, \quad \sigma_{2n} = \frac{n}{2n+1}, \quad \sigma_{2n-1} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда $\sigma_n \to \frac{1}{2}$ при $n \to \infty$. Следовательно, ряд суммируем методом Чезаро к числу $\sigma = \frac{1}{2}$.

Пример 2. Показать, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta, \quad 0 < |\theta| < \pi, \tag{2}$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta, \quad |\theta| < \pi \tag{3}$$

расходятся в обычном смысле.

Действительно, если предположить, например, что ряд (2) сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} \sin n\theta = 0. \tag{4}$$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+1)\theta = 0$ или $\lim\limits_{n\to\infty} (\sin n\theta \cos\theta + \cos n\theta \sin\theta) = 0$. Используя (4), заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \cos n\theta = 0. \tag{5}$$

Из (4) и (5) вытекает равенство

$$\lim_{n\to\infty} (\sin^2 n\theta + \cos^2 n\theta) = 0,$$

противоречащее тождеству $\sin^2 n\theta + \cos^2 n\theta = 1$.

Итак, $\sin n\theta$ не может стремиться к нулю с возрастанием n, а тогда из тождества $\cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos\theta - \sin n\theta \sin\theta$ следует, что $\cos n\theta$ также не может стремиться к нулю при $n \to \infty$.

Для ряда (2) частичной суммой (см. п. 2.3) будет выражение

$$s_n = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta \sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \theta < \pi.$$

Далее,

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right) =$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2(n+1)\sin\frac{\theta}{2}} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta =$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4(n+1)\sin^2\frac{\theta}{2}} \sum_{k=1}^{n} (\sin(k+1)\theta - \sin k\theta) =$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(n+1)\theta - \sin\theta}{4(n+1)\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(n+1)\theta - \sin\theta}{4(n+1)\sin^2\frac{\theta}{2}}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}.$$

Так как $\varepsilon > 0$ — произвольно, то $\sigma = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$ при $0 < |\theta| < \pi$.

Для частичной суммы s_n ряда (3) имеем (см. п. 2.3)

$$s_n = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Далее

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta =$$

$$= \frac{1}{4(n+1)\sin^2\frac{\theta}{2}} \sum_{k=1}^{n} (\cos k\theta - \cos(k+1)\theta) =$$

$$= \frac{1}{4(n+1)\sin^2\frac{\theta}{2}} (\cos\theta - \cos(n+1)\theta).$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0 = \sigma.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то обобщенная сумма $\sigma = 0$ при $0 < |\theta| < \pi$.

6.3. Метод суммирования Пуассона — Абеля. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ — числовой ряд и x — действительное число, $0 \leqslant x < 1$.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируется методом Пуассона — Абеля к числу s, если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $x \in [0, 1[$, и

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s. \tag{1}$$

Пример 1. Показать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ методом Пуассона—Абеля суммируется к числу $\frac{1}{2}$.

Действительно,

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \lim_{x \to 1-0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} = s.$$

Пример 2. Установить, к каким числам методом Пуассона — Абеля суммируются ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta, \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta, \quad 0 < |\theta| < \pi.$$

С этой целью образуем ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin n\theta, \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta,$$

где число $x \in [0, 1[$. Первый из этих рядов умножим на i, $i = \sqrt{-1}$, и результат сложим со вторым рядом. В результате получим ряд

$$-\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} x^n (\cos n\theta + i \sin n\theta),$$

который, начиная со второго слагаемого, является суммой членов геометрической прогрессии, знаменатель которой $q = x(\cos\theta + i \sin\theta)$ по модулю меньше единицы. Следовательно, его сумма равна

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{1-q} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1 - x(\cos\theta + i\sin\theta)} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1 - x\cos\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2} + i\,\frac{x\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}.$$

Отсюда, сравнивая действительные и мнимые части, получаем

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} x^k \cos k\theta = -\frac{1}{2} + \frac{1 - x\cos\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2} \to 0 \text{ при } x \to 1 - 0,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k \sin k\theta = \frac{x\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2} \to \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} \text{ при } x \to 1 - 0.$$

Обобщенная сумма ряда синусов равна $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$, $0 < |\theta| < \pi$, а обобщенная сумма ряда косинусов равна нулю. Таким образом, все три ряда методом Пуассона — Абеля суммируются к тем же суммам, что и методом Чезаро. Ниже покажем, что равенство этих сумм не случайно.

Условие (1) можно переписать в другой форме. С этой целью докажем некоторые тождества.

Обозначим $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$; тогда $a_k = s_k - s_{k-1}$, и

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = s_0 + (s_1 - s_0)\, x + \cdots + (s_n - s_{n-1})\, x^n =$$

$$= s_0 (1 - x) + s_1 (x - x^2) + \cdots + s_{n-1} (x^{n-1} - x^n) + s_n x^n,$$

или

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = (1 - x) \sum_{k=0}^{n-1} s_k x^k + s_n x^n. \tag{2}$$

Равенство (2) называется *преобразованием Абеля,* которое уже было рассмотрено в несколько иной форме.

Покажем, что для $0 \leqslant x < 1$ справедливо тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = (1 - x) \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k, \tag{3}$$

если ряд левой части равенства (3) сходится.

Действительно, пусть $x < r < 1$. Так как ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится, то $|a_k r^k| \leqslant C$, $k \in \mathbb{Z}_0$, где C — некоторое постоянное.

Поэтому

$$|s_n x^n| = |(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) x^n| =$$

$$= \left| \left(a_0 + a_1 r \frac{1}{r} + a_2 r^2 \frac{1}{r^2} + \cdots + a_n r^n \frac{1}{r^n} \right) x^n \right| \leqslant$$

$$\leqslant C x^n \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^n} \right) < C x^n \frac{1}{r^n} \cdot \frac{1}{1 - r},$$

а это выражение стремится к нулю при $n \to \infty$. Тогда из (2) и условия $s_n x^n \to 0$ при $n \to \infty$ следует (3). Равенство (3) также называется преобразованием Абеля. Условие (1) можно записать в виде

$$\lim_{x \to 1-0} (1 - x) \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k = s. \tag{4}$$

Теорема (Фробениуса). *Если ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *суммируем методом Чезаро к числу* s, *то он суммируем и методом Пуассона — Абеля к тому же числу.*

◀ Поскольку

$$(n + 1)\, \sigma_n = s_0 + s_1 + \cdots + s_n,$$

то, применяя преобразование Абеля к правой части равенства (3), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = (1 - x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1)\, \sigma_k x^k. \tag{5}$$

Но так как для $0 < x < 1$ справедливо равенство

$$1 = (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, x^k, \tag{6}$$

то, умножая обе его части на s и вычитая из (5), находим

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - s = (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(\sigma_k - s)\, x^k =$$

$$= (1-x)^2 \sum_{k=0}^{m} (k+1)(\sigma_k - s)\, x^k + (1-x)^2 \sum_{k=m+1}^{\infty} (k+1)(\sigma_k - s)\, x^k. \tag{7}$$

Если $\varepsilon > 0$ — задано произвольно, то можно указать такое m, что

$$|\sigma_{k+1} - s| < \varepsilon \quad \forall\, k > m.$$

Тогда, согласно (6), имеем

$$\left|(1-x)^2 \sum_{k=m+1}^{N} (k+1)(\sigma_k - s)\, x^k\right| \leqslant$$

$$\leqslant (1-x)^2 \sum_{k=m+1}^{N} (k+1)\,|\sigma_k - s|\, x^k <$$

$$< \varepsilon (1-x)^2 \sum_{k=m+1}^{N} (k+1)\, x^k < \varepsilon (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, x^k = \varepsilon$$

и при $N \to \infty$

$$\left|(1-x)^2 \sum_{k=m+1}^{\infty} (k+1)(\sigma_k - s)\, x^k\right| < \varepsilon.$$

Первое слагаемое правой части (7) стремится к нулю, так как число слагаемых фиксировано. Отсюда вытекает выполнение равенства (1), в котором число s является обобщенной суммой по методу Чезаро. ▶

Для метода Чезаро целесообразно рассматривать вместо матрицы (a_{nk}) (см. п. 6.1) совокупность функций $x \to a_k(x)$, где $k \in \mathbb{Z}_0$ и $0 \leqslant x < 1$. Если положим

$$\sigma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\, s_k,$$

предполагая, что ряд в правой части сходится при $x \to 1-0$ и если

$$\lim_{x \to 1-0} \sigma(x) = s,$$

то можно рассматривать s как обобщенную сумму ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, определенную методом суммирования с непрерывным параметром $x \to 1-0$.

По аналогии с теоремой Теплица (см. п. 6.1) предложенный метод будет регулярным, если:

1) $\lim_{x \to 1-0} a_k(x) = 0$, $k \in \mathbb{Z}_0$;

2) $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$, $0 \leqslant x < 1$, и $A(x) \to 1$ при $x \to 1 - 0$;

3) $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(x)| = f(x)$ и $|f(x)| < C$, $0 \leqslant x < 1$, где C — постоянное.

В частности, метод Пуассона — Абеля регулярен, так как в этом случае

$$a_k(x) = x^k - x^{k+1}$$

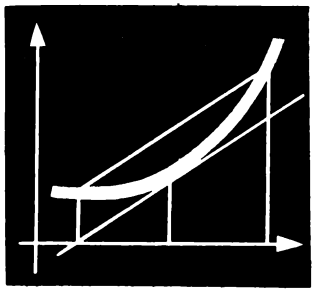
и сразу видно, что все три условия удовлетворены.

Более того, метод Пуассона — Абеля вполне регулярен, поскольку $s_k \to +\infty$, то $\forall M > 0 \quad \exists k_0$ такое, что $s_k > M \quad \forall k > k_0$. Тогда

$$(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k = (1-x)\sum_{k=0}^{k_0} s_k x^k + (1-x)\sum_{k=k_0+1}^{\infty} s_k x^k >$$

$$> (1-x)\sum_{k=0}^{k_0} s_k x^k + M x^{k_0+1}.$$

Если $x \to 1 - 0$, то первое слагаемое правой части есть $o(1)$, поскольку k_0 фиксировано, а второе стремится к M, а поэтому $(1 - x)\sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k$ может стать больше любого наперед заданного положительного числа, если x достаточно близко к 1. А это означает, что ряд методом Пуассона — Абеля суммируется к $+\infty$.



4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ И ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Прежде чем переходить к основным определениям — понятиям дифференцируемой функции, ее дифференциала и производной — напомним, что множество числовых функций f, определенных на множестве $X \subset \mathbb{R}$, образует векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Поэтому на множестве $\{f\}$ определено отношение $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $x \in X \setminus \{x_0\}$.

1.1. Дифференцируемые функции. Пусть $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, и $x_0 \in X$ — предельная точка множества X.

Определение 1. *Функция f называется дифференцируемой в точке x_0, если существует такое линейное (однородное) относительно h отображение $h \mapsto Lh$ пространства $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, что*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)}{x-x_0} = 0. \tag{1}$$

Согласно этому определению, приращение дифференцируемой в точке x_0 функции f имеет вид

$$f(x)-f(x_0) = L(x-x_0) + \alpha(x, x_0)(x-x_0), \tag{2}$$

где $\alpha \to 0$ при $x \to x_0$.

Равенство (2) записывают также в виде

$$f(x)-f(x_0) = L(x-x_0) + o(x-x_0), \quad x \to x_0. \tag{3}$$

Определение 2. *Если функция f дифференцируема в точке x_0, то линейная (однородная) функция $h \mapsto Lh$, $h \in \mathbb{R}$, называется дифференциалом функции f в этой точке и обозначается $df(x_0)$:*

$$df(x_0)(h) = Lh, \quad h \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Анализируя формулу (3), делаем вывод о том, что приращение дифференцируемой в точке x_0 функции равно сумме двух слагаемых, одно из которых является значением дифференциала этой функции, вычисленного при $h = x - x_0$, а другое есть бесконечно малая при $x \to x_0$ функция более высокого порядка, чем $x - x_0$.

Из определения дифференцируемой в точке x_0 функции следует, что отношение $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $x \in X \setminus \{x_0\}$, имеет при $x \to x_0$ конечный предел, равный числу L. Следовательно, дифференциал функции f в точке x_0 определен однозначно.

Дадим теперь определение производной числовой функции одной переменной в фиксированной точке.

Пусть $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, и $x_0 \in X$ — предельная точка множества X.

Определение 3. *Производной $f'(x_0)$ функции f в точке x_0 называется предел*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad f'(x_0) \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

если он существует.

Согласно определению 3, дифференциал Lh дифференцируемой в точке $x_0 \in X$ функции f имеет вид

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h, \quad h \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Поскольку приращение функции $\varphi: x \mapsto x$, $x \in \mathbb{R}$, в любой точке из $\mathbb{R}$ имеет вид $\varphi(x) - \varphi(x_0) = x - x_0$, то $d\varphi(x)(h) = dx(h) = h$, $h \in \mathbb{R}$, и поэтому дифференциал $df(x_0)(h)$ дифференцируемой в точке x_0 функции f записывают в виде

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)\,dx(h), \quad dx(h) \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Следует иметь в виду, что дифференциал dx, который называют дифференциалом независимой переменной, от x не зависит.

Справедливо утверждение: *если функция f имеет производную в точке x_0, то она дифференцируема в этой точке.*

◀ Предельное соотношение

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0), \quad f'(x_0) \in \mathbb{R},$$

можно записать в виде

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + \alpha(x, x_0), \quad \alpha \to 0 \quad \text{при } x \to x_0. \ ▶$$

Таким образом, для числовой функции одной переменной понятия дифференцируемости в точке и существования производной в этой точке отождествляются.

Определение 4. *Функция $f: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ называется дифференцируемой на интервале $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$, если она дифференцируема в каждой его точке.*

Если функция f дифференцируема на интервале $\mathcal{J}$, то на нем определена числовая функция $x \mapsto f'(x)$, обозначаемая символом f'.

Справедливо утверждение: *для того чтобы функция f была дифференцируемой в точке x_0, необходимо, чтобы она была непрерывна в этой точке.*

◀ Если функция f дифференцируема в точке x_0, то из равенства (1) получаем соотношение $f(x) - f(x_0) \to 0$ при $x \to x_0$, которое означает, что f непрерывна при $x = x_0$. ▶

Однако не всякая непрерывная функция дифференцируема. Например, функция $f(x) = |\sin x|$, $x \in \mathbb{R}$, не дифференцируема ни в одной из точек $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, так как $\Delta f(x_k) = |\sin(x - x_k)|$ и $\lim\limits_{x \to x_k} \frac{|\sin(x - x_k)|}{x - x_k}$ не существует.

Рассмотрим случай, когда функция f непрерывна в точке $x_0 \in \mathcal{J}$, не дифференцируема в этой точке, однако существует бесконечный предел отношения $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ при $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty.$$

Тогда говорят, что функция f имеет бесконечную производную в точке x_0 и соответственно пишут $f'(x_0) = +\infty$, $f'(x_0) = -\infty$. Например, для функции $f: x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $-1 < x < 1$, имеем $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = +\infty$, следовательно, $f'(0) = +\infty$.

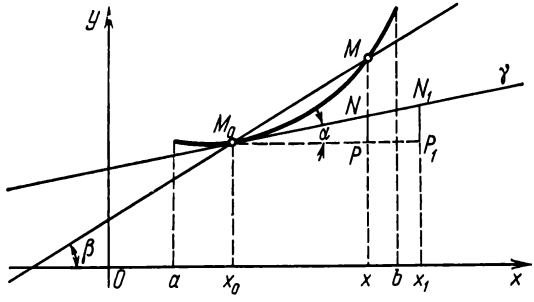
Отметим, что из дифференцируемости функции f в точке $x_0 \in \mathcal{J}$ следует дифференцируемость в этой точке сужения f на любой интервал $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}$, содержащий x_0, причем производная этого сужения равна $f'(x_0)$. И наоборот, если в точке $x_0 \in \mathcal{J}_1$ сужение функции f на этот интервал дифференцируемо, то и сама функция дифференцируема при $x = x_0$. Таким образом, понятие производной носит локальный характер.

Процесс вычисления производной функции называется *дифференцированием* ее, а раздел математического анализа, изучающий свойства функций, имеющих производные,— *дифференциальным исчислением*.

Понятие производной — одно из важнейших в анализе, поскольку к нему приводят многие прикладные задачи из геометрии, механики, физики, биологии, экономики и т. д. Здесь ограничимся рассмотрением двух примеров таких задач.

1) Пусть $s(t)$ означает положение движущейся точки в пространстве $\mathbb{R}$ в момент времени $t > 0$. Тогда отношение $\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ называется *средней скоростью движения* между моментами времени t_0 и t, а предел этого отношения при $t \to t_0$, если он существует, обозначаемый $v(t_0)$ и равный $s'(t_0)$, называется *мгновенной скоростью точки* в момент времени t_0. Получаем физическую интерпретацию производной функции: она характеризует скорость изменения пути s при изменении времени t.

2) Пусть $f: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $f \in C(\mathcal{J})$. Рассмотрим график G этой функции (рис. 13). Пусть $M_0 = (x_0, f(x_0))$ и $M = (x, f(x))$ — точки на графике G. Рассмотрим секущую, проходящую через точки M_0 и M и образующую угол β с положительным направлением оси Ox. При $x \to x_0$ точка M будет двигаться по кривой G в направлении точки M_0. Если существует предельное положение секущей (на рис. 13 — прямая γ), то назовем эту прямую касательной к графику G функции f в точке M_0. Если касательная в этой точке существует и образует с



При $x \to x_0$ подвижная точка M перемещается по кривой G в направлении точки M_0.

Рис. 13

положительным направлением оси Ox угол $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, то тогда имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{M \to M_0} \operatorname{tg}\beta = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \tag{6}$$

а уравнение касательной принимает вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Если $f \in C(\mathcal{J})$ и график G функции f имеет касательную в точке M_0, причем $f'(x_0) = \infty$, то эта касательная параллельна оси Oy.

Этот пример геометрически интерпретирует производную как тангенс угла наклона к оси Ox касательной к графику G функции f в данной точке.

1.2. Односторонние производные.

Определение. *Пусть $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathcal{J}$. Функция f дифференцируема в точке x_0 справа (слева), если сужение f на полуинтервал $\mathcal{J} \cap [x_0, +\infty[$ ($\mathcal{J} \cap]-\infty, x_0]$), не сводящийся к точке, дифференцируемо в точке x_0.*

Значение производной этого сужения в точке x_0 называется *правой (левой) производной* функции f в точке x_0 и обозначается $f'_+(x_0)$ ($f'_-(x_0)$).

Таким образом, согласно определению имеем

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \left(f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right).$$

Односторонние производные могут быть и бесконечными.

1.3. Критерий дифференцируемости функции.

Теорема. *Для того чтобы непрерывная функция $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ была дифференцируемой в точке $x_0 \in \mathcal{J}$, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечные левую и правую производные и при этом $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.*

◀ Рассмотрим функцию $\varphi : x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x \in \mathcal{J} \setminus \{x_0\}$.

Согласно теореме пункта 6.2, гл. 2, она имеет конечное предельное значение в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существуют конечные односторонние пределы $\varphi(x_0 - 0)$ и $\varphi(x_0 + 0)$, равные друг другу. Поскольку

$$\varphi(x_0 - 0) = f'_-(x_0), \quad \varphi(x_0 + 0) = f'_+(x_0),$$

то для существования конечного предела

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\exists \lim_{x \to x_0 - 0} \varphi(x) = f'_-(x_0), \quad f'_-(x_0) \in \mathbb{R}, \quad \exists \lim_{x \to x_0 + 0} \varphi(x) = f'_+(x_0), \quad f'_+(x_0) \in \mathbb{R},$$

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0). \blacktriangleright$$

В рассмотренном ранее примере для функции $f(x) = |\sin x|$, $x \in \mathbb{R}$, имеем

$$f'_-(x_k) = \lim_{x \to x_k - 0} \frac{|\sin(x - x_k)|}{x - x_k} = -1,$$

$$f'_+(x_k) = \lim_{x \to x_k + 0} \frac{|\sin(x - x_k)|}{x - x_k} = 1, \quad f'_-(x_k) \neq f'_+(x_k),$$

следовательно, функция f не дифференцируема в точках $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.4. Дифференциал функции и приближенные вычисления. В пункте 1.1 дифференциал $df(x_0)$ функции $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, дифференцируемой в точке $x_0 \in X$, предельной для множества X, определен как линейная (однородная) функция переменной $h = dx(h)$:

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)\, dx(h), \quad dx(h) \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Равенство $df(x_0)(h) = f'(x_0)\, dx(h)$ при $dx(h) \neq 0$ можно записать в виде частного

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)(h)}{dx(h)}, \tag{2}$$

из чего следует, что производную $f'(x_0)$ дифференцируемой в точке $x_0 \in \mathcal{J}$ функции f можно представить в виде частного двух дифференциалов: дифференциала функции f в этой точке в числителе, соответствующего взятому дифференциалу $dx(h)$ независимой переменной, и дифференциала $dx(h)$ в знаменателе.

Производную f' функции f в точке $x_0 \in \mathcal{J}$ обозначают также символами $\frac{df}{dx}(x_0)$ и $\frac{d}{dx}(f(x))|_{x=x_0}$, где $\frac{d}{dx}$ — *оператор производной*.

Формула (1) позволяет получить приближенную формулу для вычисления значений функции f в некоторой окрестности $S(x_0, \delta)$ точки x_0. Полагая $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)(h)$, получаем приближенную формулу

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)(h), \quad x \in S(x_0, \delta), \quad h = x - x_0. \tag{3}$$

При $x \to x_0$ погрешность формулы (3) есть бесконечно малая функция более высокого порядка, чем $h = x - x_0$.

Чтобы пользоваться формулой (3), необходимо уметь вычислять производные дифференцируемых функций. Практическое применение

формулы (3) будет рассмотрено после вывода основных правил дифференцирования и получения таблицы производных.

В заключение этого пункта отметим, что дифференциал функции имеет вполне определенный геометрический смысл: он является приращением ординаты касательной к графику дифференцируемой функции $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$, в точке $(x_0, f(x_0))$. На рис. 13 дифференциалы функции f в точке x_0, соответствующие двум разным значениям $h = x - x_0$, равны длинам отрезков NP и N_1P_1. Линейная форма $dx(h) \mapsto f'(x_0)\, dx(h)$ определена на всем пространстве $\mathbb{R}$.

1.5. Основные правила дифференцирования. Прежде чем перейти к выводу основных правил дифференцирования, отметим, что множество всех дифференцируемых в точке $x_0 \in \mathcal{J}$ функций $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$, образует векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, а отображение $f \mapsto f'(x_0)$ есть *линейное (однородное) отображение* этого пространства в $\mathbb{R}$.

Основные правила дифференцирования: вычисление производных суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Если функции $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $g : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $x_0 \in \mathcal{J}$, то и функции $f \pm g$, fg, $\frac{f}{g}$ (последняя при $g(x_0) \neq 0$) дифференцируемы в этой точке и их производные вычисляются по формулам*

$$\begin{aligned} (f \pm g)'(x_0) &= f'(x_0) \pm g'(x_0), \\ (fg)'(x_0) &= f'(x_0)\, g(x_0) + g'(x_0)\, f(x_0), \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - g'(x_0)\, f(x_0)}{g^2(x_0)}. \end{aligned} \tag{1}$$

◀ Используя тождества

$$\frac{(f \pm g)(x) - (f \pm g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0},$$

$$\frac{fg(x) - fg(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\, g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\, f(x_0),$$

$$\frac{1}{x - x_0}\left(\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(x_0)\right) = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\, g(x_0) - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\, f(x_0)}{g(x)\, g(x_0)},$$

выполняющиеся $\forall\, x \in \mathcal{J} \wedge x \neq x_0$, переходя в них к пределу при $x \to x_0$ и принимая во внимание, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \quad \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0),$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

(в силу непрерывности функции g в точке x_0), на основании свойств пределов суммы, произведения и частного, приходим к выводу, что пределы левых частей написанных отношений существуют и при этом справедливы формулы (1). ▶

Умножая левые и правые части формул (1) на дифференциал $dx\,(h)$ независимого переменного, получим соответствующие формулы, выраженные в дифференциалах:

$$d(f \pm g)(x_0)(h) = df(x_0)(h) \pm dg(x_0)(h),$$
$$d(fg)(x_0)(h) = g(x_0)\,df(x_0)(h) + f(x_0)\,dg(x_0)(h), \qquad (2)$$
$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)(h) = \frac{g(x_0)\,df(x_0)(h) - f(x_0)\,dg(x_0)(h)}{g^2(x_0)}.$$

Следующие две теоремы устанавливают правила дифференцирования обратной и сложной функции.

Теорема 2 (о производной обратной функции). *Пусть $f: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ — непрерывная, строго монотонная на интервале $\mathcal{J}$ функция, имеющая производную в точке $x_0 \in \mathcal{J}$. Тогда обратная функция $f^{-1} = g$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$ интервала $\mathcal{J}_1 = f(\mathcal{J})$, равную $\frac{1}{f'(x_0)}$, если $f'(x_0) \neq 0$. Если $f'(x_0) = 0$, то $g'(y_0) = +\infty$ в случае, когда f возрастает, и $g'(y_0) = -\infty$ в случае, когда f убывает.*

◀ Пусть f возрастает на $\mathcal{J}$ и $f'(x_0) \neq 0$. Тогда в окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ существует обратная функция $f^{-1} = g$; она непрерывна и также возрастает на $\mathcal{J}_1 = f(\mathcal{J})$, в силу чего $g(y) \neq g(y_0)$, если $y \neq y_0$. Таким образом, выражение

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \qquad (3)$$

имеет смысл. Из непрерывности функций f и f^{-1} следует, что $x \to x_0$ при $y \to y_0$ и наоборот. Если $y \to y_0$ в левой части тождества (3), то $x \to x_0$ в его правой части, которая имеет при $x \to x_0$ предел, равный $\frac{1}{f'(x_0)}$. Следовательно, при $y \to y_0$ существует предел выражения в левой части тождества (3), равный, по определению, производной $g'(y_0)$:

$$(f^{-1})'(y_0) = g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} =$$
$$= \frac{1}{f'(x_0)}. \qquad (4)$$

Если $f'(x_0) = 0$, то $g'(y_0) = +\infty$, так как приращение возрастающей функции f и ее аргумента в точке x_0 совпадают по знаку. Если же функция f убывает на интервале $\mathcal{J}$, то ее приращение в точке x_0 и приращение аргумента x в этой точке имеют противоположные знаки, и поэтому $g'(y_0) = -\infty$, когда $f'(x_0) = 0$. ▶

Например, функция $f(x) = \frac{x^5}{5} + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, возрастающая и имеет производную $f'(x) = x^4 + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Обратная функция f^{-1} дифференцируема $\forall\, y \in \mathbb{R}$, причем $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{x^4 + 1}$.

Теорема 3 (о производной сложной функции). *Пусть функция f определена на интервале $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$, а функция g определена на интервале $\mathcal{J}_1 \subset \mathbb{R}$, содержащем $f(\mathcal{J})$. Если f дифференцируема в точке $x_0 \in \mathcal{J}$, а g дифференцируема в точке $f(x_0) \in \mathcal{J}_1$, то сложная функция $F = g \circ f$ имеет в точке x_0 производную, равную $g'(f(x_0))\, f'(x_0)$.*

◀ Образуем на интервале $\mathcal{J}$ функцию

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}, & \text{если } f(x) \neq f(x_0), \\ g'(f(x_0)), & \text{если } f(x) = f(x_0)\,[1]. \end{cases}$$

Поскольку $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0$ (в силу дифференцируемости функции f в точке x_0) и $\exists \lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0)$, то $\exists \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = g'(f(x_0))$.

Таким образом, приращение функции F в точке x_0 принимает вид

$$F(x) - F(x_0) = u(x)\,(f(x) - f(x_0)). \tag{5}$$

Разделив обе части равенства (5) на $x - x_0$ и перейдя к пределу при $x \to x_0$, находим

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} u(x)\, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0))\, f'(x_0). \blacktriangleright \tag{6}$$

Теорему можно доказать, представив приращение функции F в точке x_0 в виде

$$F(x) - F(x_0) = g(f(x)) - g(f(x_0)) = (g'(f(x_0)) + \beta)\,(f(x) - f(x_0)) = (g'(f(x_0)) + \beta)\,(f'(x_0) + \alpha)\,(x - x_0),$$

где $\beta \to 0$ при $f(x) \to f(x_0)$, $\alpha \to 0$ при $x \to x_0$. При этом функция β принимает значения, равные нулю при $f(x) = f(x_0)$.

Используя доказанные теоремы, а также известные из главы 2 замечательные пределы, составим таблицу производных элементарных функций. Для удобства обозначим через h приращение независимой переменной в точке x. Тогда приращение функции f в точке x принимает вид

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x).$$

1.6. Таблица производных. При составлении таблицы будем исходить из определения производной дифференцируемой функции. Пусть

1) $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, $c = \text{const}$. Тогда $\Delta f(x) \equiv 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$, следовательно, $f'(x) = 0$.

2) $f(x) = x^\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Тогда $\dfrac{\Delta f(x)}{h} = \dfrac{(x + h)^\mu - x^\mu}{h} =$

[1] Принимается во внимание возможный случай $f(x) = f(x_0)$ для некоторых $x \in \mathcal{J}$, $x \neq x_0$.

$= x^{\mu-1}\dfrac{\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^{\mu}-1}{\dfrac{h}{x}}$, $f'(x) = x^{\mu-1}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^{\mu}-1}{\dfrac{h}{x}} = \mu x^{\mu-1}$.

3) $f(x) = a^x$, $x\in\mathbb{R}$, $a>0$. Тогда $\dfrac{\Delta f(x)}{h} = \dfrac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x \times$ $\times \dfrac{a^h-1}{h}$, $f'(x) = a^x\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h} = a^x \ln a$. Если $a = e$, то $(e^x)' = e^x$.

4) $f(x) = \log_a x$, $x>0$, $a>0$, $a\neq 1$. Тогда $\dfrac{\Delta f(x)}{h} =$ $= \dfrac{\log_a(x+h)-\log_a(x)}{h} = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\log_a\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{h}{x}}$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}\times$ $\times \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log_a\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{h}{x}} = \dfrac{\log_a e}{x}$. Если $a = e$, то $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

5) $f(x) = \sin x$, $x\in\mathbb{R}$. Тогда $\dfrac{\Delta f(x)}{h} = \dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \dfrac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}\times$ $\times \cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)$, $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right) = \cos x$.

6) $f(x) = \cos x$, $x\in\mathbb{R}$. Тогда $\dfrac{\Delta f(x)}{h} = \dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -\dfrac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}\times$ $\times \sin\left(x+\dfrac{h}{2}\right)$, $f'(x) = -\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}\sin\left(x+\dfrac{h}{2}\right) = -\sin x$.

7) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $|x-k\pi| < \dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. Тогда $\dfrac{\Delta f(x)}{h} = \dfrac{1}{h}\times$ $\times\left(\dfrac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\dfrac{\sin x}{\cos x}\right) = \dfrac{\sin h}{h}\cdot\dfrac{1}{\cos x\cos(x+h)}$, $f'(x) =$ $= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{\cos(x+h)} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

8) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $k\pi < x < (k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Тогда $\dfrac{\Delta f(x)}{h} = \dfrac{1}{h}\times$

$$\times \left(\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = -\frac{\sin h}{h} \cdot \frac{1}{\sin x \sin(x+h)}, \quad f'(x) =$$

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin(x+h)} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

9) $f(x) = \arcsin x$, $|x| \leqslant 1$. Дифференцируя по y функцию $x = \sin y$, $|y| \leqslant \frac{\pi}{2}$, где $y = f(x)$, получим $x'(y) = \cos y$. Применив теорему 2, п. 1.5, получим $f'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos y}$, $|y| < \frac{\pi}{2}$, т. е.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$$

10) $f(x) = \arccos x$, $|x| \leqslant 1$. Здесь кроме приема, рассмотренного в 9), можно воспользоваться тождеством $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, дифференцируя левую и правую части которого, получим $\forall\, x \in]-1, 1[$

$$(\arccos x)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

11) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$. Дифференцируя по y функцию $x = \operatorname{tg} y$, $|y| < \frac{\pi}{2}$, где $y = f(x)$, получим $x'(y) = \frac{1}{\cos^2 y}$. Применив теорему 2, п. 1.5, находим, что $f'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}$, т. е.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

12) $f(x) = \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R}$. Продифференцировав тождество $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, получим

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

13) $f(x) = \operatorname{sh} x$, $x \in \mathbb{R}$. Используя линейность операции дифференцирования, формулу 3) этой таблицы и теорему 3, получим

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left((e^x)' - (e^{-x})'\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x - (e^{-x})(-1)\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

14) $f(x) = \operatorname{ch} x$, $x \in \mathbb{R}$. По аналогии с 13) имеем $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

15) $f(x) = \operatorname{th} x$, $x \in \mathbb{R}$. Используя формулу дифференцирования частного двух функций и формулы 13), 14) этой таблицы, получим

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

16) $f(x) = \operatorname{cth} x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Аналогично предыдущему имеем

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

17) $f(x) = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $x \in \mathbb{R}$. Здесь воспользуемся формулой 4) этой таблицы и теоремой 3:

$$f'(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2+1})'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

18) $f(x) = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, $x \geqslant 1$. Воспользовавшись формулой 4) и теоремой 3, получим

$$f'(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1.$$

19) $f(x) = \operatorname{arth} x$, $|x| < 1$. Применив правило нахождения производной частного и формулу 4) этой таблицы, получим

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

Таблицу дифференциалов функций легко получить, использовав приведенную таблицу производных.

Таблицу дифференциалов здесь не приводим.

1.7. Производная степенно-показательной функции. Пусть $f: x \mapsto u(x)^{v(x)}$, $u(x) > 0$, $a < x < b$, и функции u, v дифференцируемы в точке $x \in]a, b[$.

Тогда *функция f дифференцируема в этой точке и ее производную можно вычислить по формуле*

$$f'(x) = u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

◀ Для доказательства формулы представим функцию f в виде

$$f(x) = e^{v(x)\ln u(x)}$$

и применим формулу (6), п. 1.5:

$$f'(x) = (e^{v(x)\ln u(x)})' =$$

$$= e^{v(x)\ln u(x)}(v(x)\ln u(x))' = u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right). \blacktriangleright$$

1.8. Инвариантность формы дифференциала. Приближенные вычисления с помощью дифференциалов. Пусть функция $f: \mathcal{T} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, дифференцируема в точке $x_0 \in \mathcal{T}$, а функция $x: t \mapsto \varphi(t)$, $t \in \mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_1 = \{t \in \mathbb{R} : \alpha < t < \beta\}$, дифференцируема в точке $t_0 \in \mathcal{T}_1$, причем $\varphi(\mathcal{T}_1) \subset \mathcal{T}$, $\varphi(t_0) = x_0$. Тогда композиция $F = f \circ \varphi$ является дифференцируемой в точке t_0 функцией и, согласно теореме 3 (формула (6), п. 1.5), ее производная в этой точке вычисляется по формуле $F'(t_0) = f'(x_0)\varphi'(t_0)$, а дифференциал $dF(t_0)(h)$ принимает вид

$$dF(t_0)(h) = f'(x_0)\varphi'(t_0)\,dt(h) = f'(x_0)\,dx(h), \tag{1}$$

где $dt(h) \in \mathbb{R}$, $dx(h) = \varphi'(t_0)\,dt(h)$.

Принимая во внимание равенство $dF(t_0)(h) = df(x_0)(h)$, приходим к выводу, что форма дифференциала $df(x_0)(h)$ такая же, как и в случае, когда x является независимой переменной.

Однако в формуле (1) $dx(h)$ — функция переменной $dt(h) \in \mathbb{R}$ вида $cdt(h)$, где $c = \varphi'(t_0)$. Поэтому сохранение формы дифференциала следует понимать как сохранение формы его записи.

Использование установленного свойства инвариантности формы дифференциала позволяет упростить процесс вычисления дифференциалов сложных функций.

Пусть, например, функции u и v дифференцируемы на некотором интервале $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ и не обращаются одновременно в нуль ни в одной его точке. Тогда в любой точке интервала имеем

$$d(\operatorname{arctg}\sqrt{u^2+v^2}) = \frac{d\sqrt{u^2+v^2}}{1+u^2+v^2} = \frac{d(u^2+v^2)}{2\sqrt{u^2+v^2}(1+u^2+v^2)} =$$

$$= \frac{du^2+dv^2}{2\sqrt{u^2+v^2}(1+u^2+v^2)} = \frac{udu+vdv}{\sqrt{u^2+v^2}(1+u^2+v^2)},$$

где u, v — дифференцируемые функции переменной x.

Из формулы (1) при $dx(t_0)(h) \neq 0$ следует равенство

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)(h)}{dx(t_0)(h)},$$

которое показывает, что и в случае сложной функции ее производная равна частному дифференциалов $df(x_0)(h)$ и $dx(h)$.

Вернемся теперь к формуле (3), п. 1.4,— приближенного вычисления значения функции в точке x из некоторой окрестности $S(x_0, \delta)$ точки x_0. Особенность этой формулы заключается в том, что вместо того, чтобы вычислять значение произвольной функции f, вид которой может оказаться весьма сложным, вычисляем значение линейной функции $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, $x \in S(x_0, \delta)$. При этом погрешность формулы имеет порядок $o(x - x_0)$ при $x \to x_0$.

Вычислим, например, приближенно $\sin 29°$. Поскольку $\sin 29° = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right)$, то в формуле (3), п. 1.4, следует положить $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $x - x_0 = -\frac{\pi}{180}$, $df(x_0) = -\frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{180} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$. При этом получим $\sin 29° \approx \sin\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{180}\right)$. Пользуясь формулой $\sqrt{t} \approx \sqrt{t_0} + \frac{t-t_0}{2\sqrt{t_0}}$, находим $\sqrt{3} = \sqrt{2{,}89 + 0{,}11} \approx 1{,}7324$ и взяв $\frac{\pi}{180} \approx 0{,}0174$, окончательно имеем $\sin 29° \approx 0{,}4849$. (Результат совпал с табличным значением $\sin 29°$).

§ 2. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

2.1. Производная n-го порядка. Пусть $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая в точке $x_0 \in \mathcal{J}$ и в некоторой ее окрестности $S(x_0, \delta)$ функция, т. е. в окрестности $S(x_0, \delta)$ определена функция f'. Если функция f' дифференцируема в точке x_0, то ее производная в этой точке называется *второй производной функции f в точке x_0* и обозначается $f''(x_0)$ или $\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)$. Если вторая производная функции f существует в каждой точке интервала $\mathcal{J}$, то функцию $x \mapsto f''(x)$ обозначают символом f'' или $\frac{d^2f}{dx^2}$. Аналогично по индукции определяется *производная n-го порядка* (или *n-я производная*) функции f, обозначаемая $f^{(n)}$ или $\frac{d^nf}{dx^n}$: ее значение в точке $x_0 \in \mathcal{J}$ есть производная функции $f^{(n-1)}$ в этой точке.

Данное определение предполагает существование всех производных $f^{(j)}$ порядка $j \leqslant n-1$ в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируемость функции $f^{(n-1)}$ в точке x_0.

Таким образом, $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ или $\frac{d^nf}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)$.

Говорят, что функция f дифференцируема n раз в точке $x_0 \in \mathcal{J}$, если она имеет в этой точке n-ю производную. Если f имеет производную n-го порядка на $\mathcal{J}$, то говорят, что f дифференцируема n раз на этом интервале. Если $f^{(n)} \in C(\mathcal{J})$, то пишут $f \in C^n$ и называют f *функцией класса C^n*.

Функция f бесконечно дифференцируема на интервале $\mathcal{J}$, если $\forall\, n \in \mathbb{N}$ она имеет на $\mathcal{J}$ производную n-го порядка. В этом случае пишут $f \in C^\infty$ и называют f *функцией класса C^∞*.

С помощью индукции по m получаем формулу

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{d^nf}{dx^n}\right) = \frac{d^{m+n}f}{dx^{m+n}}. \tag{1}$$

Предполагая, что функции f и g дифференцируемы n раз и применяя индукцию по n, получим

$$\frac{d^n}{dx^n}(f+g) = \frac{d^nf}{dx^n} + \frac{d^ng}{dx^n}, \tag{2}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}(\alpha f) = \alpha\frac{d^nf}{dx^n}, \quad \alpha = \text{const}, \tag{3}$$

из которых следует, что множество всех числовых функций, определенных на интервале $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ и имеющих на $\mathcal{J}$ производную n-го порядка, образует векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, а отображение $f \mapsto \frac{d^nf}{dx^n}$ является линейным (однородным) отображением этого пространства в векторное пространство отображений $\mathcal{J}$ в $\mathbb{R}$.

Пример. Вычислить: а) $(\sin x)^{(n)}$; б) $(\cos x)^{(n)}$; в) $(\ln x)^{(n)}$.
а) Дифференцируя последовательно, получим

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad (\sin x)'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\,\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\sin x)''' = \sin\left(x + 3\,\frac{\pi}{2}\right)$$

и т. д.

Предположив справедливость формулы $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$, находим

$$(\sin x)^{(n+1)} = \left(\sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (n+1)\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Индукцией по n доказана формула

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Поступая аналогично в случаях б) и в), получим

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{x^n}, \quad x > 0,\ n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

В следующем пункте доказывается формула Лейбница, позволяющая вычислять производную n-го порядка от произведения двух n раз дифференцируемых функций.

2.2. Формула Лейбница.

Теорема (Лейбница). *Пусть:* 1) $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $g : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$; 2) $\forall x \in \mathcal{J}\ \exists f^{(n)}(x) \wedge \exists g^{(n)}(x)$. *Тогда* $\forall x \in \mathcal{J}\ \exists (fg)^{(n)}(x)$, *причем*

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n} C_n^j f^{(n-j)}(x)\, g^{(j)}(x) \tag{1}$$

(здесь принято: $0! = 1$, C_n^j — число сочетаний из n по j, $C_n^0 = C_n^n = 1$, $f^{(0)} = f$, $g^{(0)} = g$).

◀ При $n = 1$ имеем

$$C_1^0 f'(x)\, g^{(0)}(x) + C_1^1 f^{(0)}(x)\, g'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x) = (fg)'(x).$$

Из предположения справедливости формулы (1) для $k \leqslant n - 1$ и существования производных $f^{(k+1)}$, $g^{(k+1)}$ получим, применив под знаком суммы формулу дифференцирования произведения двух функций:

$$(fg)^{(k+1)}(x) = ((fg)^{(k)}(x))' = \sum_{j=0}^{k} C_k^j f^{(k+1-j)}(x)\, g^{(j)}(x) +$$

$$+\sum_{j=0}^{k} C_k^j f^{(k-j)}(x)\, g^{(j+1)}(x) = f^{(k+1)}(x)\, g(x) + \sum_{j=1}^{k} C_k^j f^{(k+1-j)}(x)\, g^{(j)}(x) +$$

$$+\sum_{j=0}^{k-1} C_k^j f^{(k-j)}(x)\, g^{(j+1)}(x) + f(x)\, g^{(k+1)}(x). \qquad (2)$$

Вводя в сумме $\sum_{j=0}^{k-1} C_k^j f^{(k-j)}(x)\, g^{(j+1)}(x)$ новый индекс суммирования $j' = j + 1$ и принимая во внимание равенства $C_{k+1}^0 = C_{k+1}^{k+1} = 1$, $C_k^j + C_k^{j-1} = C_{k+1}^j$, получим

$$(fg)^{(k+1)}(x) = f^{(k+1)}(x)\, g(x) + \sum_{j=1}^{k} (C_k^j + C_k^{j-1}) f^{(k+1-j)}(x)\, g^{(j)}(x) +$$

$$+ f(x)\, g^{(k+1)}(x) = \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j f^{(k+1-j)}(x)\, g^{(j)}(x).$$

С помощью метода математической индукции формула (1) доказана. Она носит название *формулы Лейбница.* ▶

Пример. Вычислить $u^{(500)}$, где $u(x) = x^2 \sin 5x$, $x \in \mathbb{R}$.

Если в формуле (1) положить $f(x) = \sin 5x$, $g(x) = x^2$, то она будет содержать лишь три слагаемых, так как все производные функции g выше второго порядка равны нулю. Имеем

$$(x^2 \sin 5x)^{(500)} = (\sin 5x)^{(500)} x^2 + C_{500}^1 (\sin 5x)^{(499)} (x^2)' +$$

$$+ C_{500}^2 (\sin 5x)^{(498)} (x^2)'' = 5^{500} x^2 \sin(5x + 250\pi) +$$

$$+ 500 \cdot 5^{499} 2x \sin\left(5x + 499\,\frac{\pi}{2}\right) + 500 \cdot 499 \cdot 5^{498} \sin(5x + 249\pi) =$$

$$= 5^{498} (25x^2 \sin 5x + 500 (10x \cos 5x - 499 \sin 5x)).$$

2.3. Дифференциалы высших порядков. Пусть функция $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$, n раз дифференцируема в точке $x_0 \in \mathcal{J}$. Тогда в некоторой окрестности $S(x_0, \delta) \subset \mathcal{J}$ существуют и непрерывны все производные функции f до n — 1-го порядка включительно.

Так как производная f' определена в каждой точке $x \in S(x_0, \delta)$, то в окрестности $S(x_0, \delta)$ определена функция

$$x \mapsto f'(x)\, h, \quad h \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

которая в силу сделанных предположений дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке производную, равную $f''(x_0)\, h$.

Определение. *Вторым дифференциалом (или дифференциалом второго порядка) функции f в точке x_0, отвечающим значению h, называется дифференциал функции $x \mapsto f'(x)h$ и обозначается $d^2 f(x_0)(h)$:*

$$d^2 f(x_0)(h) = f''(x_0)\, h^2. \qquad (2)$$

Дифференциал n-го порядка (или *n-й дифференциал*) функции f в точке x_0, отвечающий значению h, определяется по индукции как диф-

ференциал функции $x \mapsto f^{n-1}(x)\, h^{n-1}$ в этой точке и обозначается $d^n f(x_0)(h)$.

Таким образом, из предположений относительно функции f и последовательного определения дифференциалов высших порядков этой функции получаем

$$d^n f(x_0)(h) = f^{(n)}(x_0)\, h^n, \quad h \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Обычно дифференциалы высших порядков функции f записывают в виде

$$d^j f(x_0) = f^{(j)}(x_0)\, dx^j, \quad j = \overline{1, n}.$$

На основании формул (1) — (3) пункта 2.1 и определений настоящего пункта, имеем

$$d^m (d^n f) = d^{m+n} f, \tag{4}$$

$$d^n (f + g) = d^n f + d^n g, \tag{5}$$

$$d^n (\alpha f) = \alpha d^n f, \quad \alpha = \text{const}, \tag{6}$$

если функции f и g дифференцируемы соответствующее число раз.

Отметим, что свойство инвариантности формы для дифференциалов высших порядков в общем случае не сохраняется.

Пусть $x : \mathcal{T}_1 \to \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_1 =]\alpha, \beta[$, $f : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{T} =]a, b[$, $\mathcal{T} \supset x(\mathcal{T}_1)$, $x(t_0) = x_0$, $t_0 \in \mathcal{T}_1$, причем функция x дважды дифференцируема на $\mathcal{T}_1$, а функция f дважды дифференцируема на $\mathcal{T}$. Тогда, используя инвариантность формы дифференциала, имеем при фиксированном $h \in \mathbb{R}$

$$df(x)(h) = f'(x)\, dx(h), \quad x \in \mathcal{T}. \tag{7}$$

В этой формуле сомножитель $dx(h)$ является функцией переменной $t \in \mathcal{T}_1$, т. е. правую часть формулы (7) следует рассматривать как произведение двух функций переменной t: f' и $x'(t)\, dt(h)$, где $dt(h) \in \mathbb{R}$ не зависит от t.

Пользуясь формулой для вычисления дифференциала произведения двух функций, получим (принимая во внимание инвариантность формы дифференциала функции f')

$$d^2 f(x)(h) = f''(x)\, dx^2(h) + f'(x)\, d^2 x(h), \quad d^2 x(h) = x''(t)\, dt^2(h). \tag{8}$$

Заметим, что в случае, когда переменная x является линейной функцией $x(t) = at + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$, то свойство инвариантности дифференциалов высших порядков сохраняется (так как $d^k(at + b)(h) = (at + b)^{(k)}\, dt^k(h) = 0$ при $k > 1$).

2.4. Производные функции, заданной параметрически и производные высших порядков обратной функции. Пусть $x : t \mapsto \varphi(t)$, $y : t \mapsto \psi(t)$, $t \in T$, где $T \subset \mathbb{R}$ — некоторый интервал. Предположим, что функции x и y дифференцируемы n раз в точке $t \in T$, причем $\varphi'(t) \neq 0$ и при этом выполнены все условия теоремы о производной обратной функции:

$$\exists\, t = t(x), \quad x \in]\alpha, \beta[\wedge \exists\, t'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Тогда y является сложной функцией переменной x и, согласно теореме о производной сложной функции, получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad x = \varphi(t), \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3},$$

$$x = \varphi(t), \tag{2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3}\right)\frac{dt}{dx} =$$

$$= \frac{(\psi'''(t)\varphi'(t) - \varphi'''(t)\psi'(t))\varphi'(t) - 3\varphi''(t)(\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t))}{(\varphi'(t))^5},$$

$$x = \varphi(t), \tag{3}$$

. . . . . .

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\frac{dt}{dx}, \quad x = \varphi(t). \tag{4}$$

В теореме 2, п. 1.5, при выполнении определенных условий получена формула для вычисления производной обратной функции:

$$\frac{df^{-1}}{dy} = \frac{1}{\frac{df}{dx}}. \tag{5}$$

Приведем здесь несколько формул для вычисления производных высших порядков обратных функций в предположении, что они существуют. Так,

$$\frac{d^2f^{-1}}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{df}{dx}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{df}{dx}}\right)\frac{1}{\frac{df}{dx}} = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}, \tag{6}$$

$$\frac{d^3f^{-1}}{dy^3} = \frac{1}{\frac{df}{dx}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{df}{dx}}\right)\frac{1}{\frac{df}{dx}}\right) = \frac{3(f''(x))^2 - f'''(x)f'(x)}{(f'(x))^5} \tag{7}$$

и т. д. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить $\frac{dy}{dx}$, если $\rho = a\varphi$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ (отрезок спирали Архимеда).

Записав параметрические уравнения кривой в виде $x = a\varphi\cos\varphi$, $y = a\varphi\sin\varphi$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, и применив формулу (1), получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a(\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)}{a(\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)} = \operatorname{tg}(\varphi + \operatorname{arctg}\varphi).$$

Пример 2. Вычислить $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, если $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

Применяя формулы (1) — (3), получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3}{2}(1 + t),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{3}{2}(1+t)\right)'}{2(1-t)} = \frac{3}{4(1-t)},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\left(\frac{3}{4(1-t)}\right)'}{2(1-t)} = \frac{3}{8(1-t)^3}, \quad t \neq 1.$$

Пример 3. Вычислить производные первого, второго и третьего порядков функции, обратной функции $x \mapsto x + \ln x$, $x > 0$.

Поскольку $(x + \ln x)' = 1 + \frac{1}{x} > 0$ при $x > 0$, то обратная функция $y \mapsto x(y)$, $-\infty < y < +\infty$, существует и дифференцируема сколько угодно раз. Последовательно применяя формулы (5) — (7), получаем

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{x}{x+1},$$

$$x''(y) = -\frac{y''(x)}{(y'(x))^3} = \frac{x}{(1+x)^3},$$

$$x'''(y) = \frac{3(y''(x))^2 - y'''(x)\,y'(x)}{(y'(x))^5} = \frac{x(3-2(x+1))}{(1+x)^5}.$$

Таким образом, нашли производные обратной функции не зная ее явного представления.

§ 3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

К основным теоремам дифференциального исчисления относят теоремы Дарбу, Ролля, Лагранжа и Коши. Последние три из них называют *теоремами о среднем*. Они широко применяются при рассмотрении различных вопросов теории и практики и их значение в анализе трудно переоценить. К теоремам о среднем можно было бы отнести и теорему о представлении функции с помощью формулы Тейлора. В связи с огромной важностью этой формулы она будет рассмотрена в отдельном параграфе (см. § 7).

Сначала дадим определение локальных экстремумов числовой функции одной переменной и докажем теорему Ферма, а затем перейдем к доказательству теоремы Дарбу и теорем о среднем.

Определение. *Функция* $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{J} = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, *имеет локальный максимум (локальный минимум) в точке* $x_0 \in \mathcal{J}$, *если существует такая окрестность* $S(x_0, \delta) \subset \mathcal{J}$ *точки* x_0, *что* $\forall\, x \in S(x_0, \delta) \wedge x \neq x_0$ *выполняется неравенство*

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (f(x) \geqslant f(x_0)).$$

В случае строгого неравенства $f(x) < f(x_0)$ $\quad (f(x) > f(x_0))$ локальный максимум (локальный минимум) называется *строгим*.

Локальные максимумы и локальные минимумы функции f объединяются общим названием *«локальные экстремумы»*.

Если функция $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ достигает точной верхней (соответственно нижней) грани на интервале $\mathcal{J}$ в некоторой точке из $\mathcal{J}$, то она имеет в этой точке локальный максимум (локальный минимум). Обрат-

ное утверждение в общем случае неверно: локальный экстремум функции f может не совпадать со значением $\sup\limits_{x\in\mathcal{J}} \{f(x)\}$ или $\inf\limits_{x\in\mathcal{J}} \{f(x)\}$.

Теорема Ферма. *Пусть функция* $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ *имеет локальный максимум (локальный минимум) в точке* $x_0 \in \mathcal{J}$ *и имеет в этой точке как правую, так и левую производную. Тогда* $f'_+(x_0) \leqslant 0$ *и* $f'_-(x_0) \geqslant 0$ ($f'_+(x_0) \geqslant 0$ *и* $f'_-(x_0) \leqslant 0$); *в частности, если* f *дифференцируема в точке* x_0, *то* $f'(x_0) = 0$.

◀ Пусть функция f имеет локальный максимум в точке $x_0 \in \mathcal{J}$ и существуют $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$. Из определения, данного выше, следует, что существует окрестность $S(x_0, \delta) \subset \mathcal{J} : \forall x \in S(x_0, \delta) \wedge x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0)$. В силу существования $f'_+(x_0)$ имеем: $\forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$ $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$, $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$; из существования $f'_-(x_0)$ следует, что $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$, так как $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$ $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$. Если $\exists f'(x_0)$, то из полученных неравенств следует, что $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$. ▶.

Заметим, что из условия $f'(x_0) = 0$ не следует существование локального экстремума функции f в точке $x_0 \in \mathcal{J}$. Например, функция $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, в точке $x = 0$ имеет производную, равную нулю, однако экстремума в этой точке не имеет, так как ее приращение в этой точке $\Delta f(0) = f(x) - f(0) = x^3$ не сохраняет постоянного знака ни в какой двухсторонней окрестности этой точки.

Прежде чем перейти к основным теоремам дифференциального исчисления, отметим, что определение локальных экстремумов функции и теорема Ферма носят локальный характер: они относятся к свойствам функций, рассматриваемых в некоторой, произвольно малой окрестности фиксированной точки.

Теоремы Дарбу, Ролля, Лагранжа и Коши, которые будут рассмотрены ниже, носят глобальный характер: они связаны со свойствами функций на сегменте.

Теорема Дарбу. *Пусть* $f : \overline{\mathcal{J}} \to \mathbb{R}$, $\overline{\mathcal{J}} = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$,— *непрерывная на сегменте* $\overline{\mathcal{J}}$ *функция, имеющая в каждой точке этого сегмента производную (конечную или бесконечную). Тогда производная* f' *принимает все промежуточные значения между* $f'_+(a)$ *и* $f'_-(b)$.

◀ Рассмотрим сначала случай, когда $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$ имеют разные знаки, например $f'_+(a) > 0$, $f'_-(b) < 0$. Покажем, что $\exists c \in]a, b[: f'(c) = 0$.

Так как функция f непрерывна на сегменте $\overline{\mathcal{J}}$, то, согласно теореме Вейерштрасса, она достигает наибольшего значения в некоторой точке $c \in \overline{\mathcal{J}} : f(c) = \sup\limits_{x\in\overline{\mathcal{J}}} \{f(x)\}$. Покажем, что c — внутренняя точка сегмента $\overline{\mathcal{J}}$. Из условия $f'_+(a) > 0$ следует, что $\exists \delta > 0 : \forall x \in$

$\in]a,\ a+\delta[\Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$, т. е. $f(x) > f(a)$ и $f(c) \neq f(a)$.

Аналогично можно показать, что $f(c) \neq f(b)$. Таким образом, $c \in$ $\in]a, b[$. Поскольку функция f имеет в точке c локальный максимум, то, согласно теореме Ферма, $f'(c) = 0$. Если предположить, что $f'_+(a) <$ < 0, $f'_-(b) > 0$, то функция f достигает наименьшего на сегменте $\overline{\mathcal{J}}$ значения в некоторой внутренней точке этого сегмента.

Рассмотрим теперь общий случай, когда $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$ принимают значения любых знаков, не обязательно противоположных.

Пусть α — произвольное действительное число, заключенное между значениями $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$. Рассмотрим функцию $\varphi : x \mapsto f(x) -$ $- \alpha x$, $x \in \overline{\mathcal{J}}$. Функция φ непрерывна на сегменте $\overline{\mathcal{J}}$ и имеет производную, конечную или бесконечную, в каждой точке этого сегмента. Из выбора произвольного числа α следует, что производные $\varphi'_+(a)$ и $\varphi'_-(b)$ принимают значения разных знаков, в силу чего, по доказанному выше, $\exists\, c \in]a, b[: \varphi'(c) = 0$, т. е. $f'(c) - \alpha = 0$, $f'(c) = \alpha$. ▶

Следствие. *Если непрерывная на сегменте $\overline{\mathcal{J}}$ функция f имеет на этом сегменте отличную от нуля производную, то f' сохраняет вполне определенный знак на $\overline{\mathcal{J}}$.*

Отметим в заключение, что теорема Дарбу не является аналогом теоремы Коши о промежуточных значениях: производная непрерывной функции может быть разрывной функцией. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R},$$

непрерывна и дифференцируема $\forall x \in \mathbb{R} : f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Однако функция f' не имеет предельного значения при $x \to 0$: если предположить, что $\exists \lim\limits_{x \to 0} f'(x) =$ $= \alpha$, то получим противоречивое соотношение

$$\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x} = -\alpha,$$

так как функция $x \mapsto \cos \frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

Вместе с тем, согласно теореме Дарбу, на любом сегменте, содержащем точку $x = 0$, производная f' принимает все промежуточные значения между ее значениями на его концах.

Теорема Ролля. *Если функция f непрерывна на сегменте $\overline{\mathcal{J}} = [a, b]$, имеет в каждой точке интервала $\mathcal{J} =]a, b[$ производную (конечную или бесконечную) и такая, что $f(a) = f(b)$, то в $\mathcal{J}$ найдется по меньшей мере одна точка ξ, в которой $f'(\xi) = 0$.*

◀ Если $f(x) = \text{const}$ $\forall x \in \overline{\mathcal{J}}$, то утверждение теоремы очевидно. Если же f принимает отличные от $f(a)$ значения (например, боль-

шие чем $f(a)$), то она достигает своей точной верхней грани в некоторой точке $\xi \in \mathcal{I}$. А так как в этой точке функция f имеет локальный максимум, то, согласно теореме Ферма, $f'(\xi) = 0$. ▶

Отметим, что теорема Ролля может быть обобщена на случай, когда функция f задана на конечном или бесконечном интервале $]a, b[$, имеет на $]a, b[$ производную f' (конечную или бесконечную) и существует $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$ (конечный или бесконечный).

Доказательство предоставляем читателю.

Теорема Лагранжа. *Если функция f непрерывна на сегменте $\overline{\mathcal{I}}$ и имеет производную (конечную или бесконечную) в каждой точке интервала $\mathcal{I}$, то в $\mathcal{I}$ найдется (по меньшей мере одна) такая точка ξ, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)\,(b - a).$$

▲ Образуем на $\overline{\mathcal{I}}$ функцию $\varphi(x) = f(x) + \lambda x$, $\lambda = \text{const}$, и выберем λ из условия $\varphi(a) = \varphi(b)$. Тогда $\lambda = -\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\,x$. Так как функция φ удовлетворяет на сегменте $\overline{\mathcal{I}}$ всем условиям теоремы Ролля, то $\exists\, \xi \in \mathcal{I} : \varphi'(\xi) = 0$, т. е. $f(b) - f(a) = f'(\xi)\,(b - a)$. ▶

Обозначая в доказанной формуле $a = x_0$, $b = x$, $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$, получим

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta(x - x_0))\,(x - x_0). \tag{1}$$

Формула (1) носит название *формулы конечных приращений.*

Следствие 1. *Пусть $f : \overline{\mathcal{I}} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа, причем $M = \sup\limits_{x \in \mathcal{I}} \{f'(x)\}$, $m = \inf\limits_{x \in \mathcal{I}} \{f'(x)\}$. Тогда справедливы неравенства*

$$m \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M. \tag{2}$$

Следствие 2. *Пусть функция f непрерывна на сегменте $\overline{\mathcal{I}}$ и $\exists\, f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{I}$. Тогда $f(x) = \text{const}$, $x \in \overline{\mathcal{I}}$.*

◀ Взяв произвольное $x \in]a, b[$ и применив неравенства (2) к сужению функции f на сегмент $[a, x] \subset \overline{\mathcal{I}}$, получим равенство $f(x) - f(a) = 0$, т. е. $f(x) = f(a) \quad \forall\, x \in \overline{\mathcal{I}}$. ▶

Следствие 3. *Если функция f удовлетворяет на сегменте $\overline{\mathcal{I}}$ всем условиям теоремы Лагранжа и, кроме того, f' сохраняет вполне определенный знак на $\mathcal{I}$, то f строго монотонна на $\overline{\mathcal{I}}$.*

◀ Пусть, например, $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{I}$. Применив формулу конечных приращений на произвольном сегменте $[x_1, x_2] \subset [a, b]$, получаем равенство $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)\,(x_2 - x_1)$, $x_1 < \xi < x_2$, из которого следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$, так как $f'(\xi)\,(x_2 - x_1) > 0$. ▶

Отметим, что теорема Лагранжа имеет следующий геометрический смысл: на графике G функции f найдется по меньшей мере одна такая точка M_ξ $(\xi, f(\xi))$, что $a < \xi < b$ и касательная к кривой в этой точке параллельна хорде, соединяющей точки M_a $(a, f(a))$ и M_b $(b, f(b))$.

Теорема Коши. *Пусть f и g — непрерывные на сегменте $\overline{\mathcal{J}}$ функции и имеют каждая производную (конечную или бесконечную) во всех точках интервала $\mathcal{J}$. Тогда в $\mathcal{J}$ существует по меньшей мере одна такая точка ξ, что*

$$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi). \tag{3}$$

◀ Рассмотрим определитель

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix}, \quad x \in \overline{\mathcal{J}}.$$

Функция F удовлетворяет на сегменте $\overline{\mathcal{J}}$ всем условиям теоремы Ролля: она непрерывна, имеет производную на $\mathcal{J}$ и $F(a) = F(b) = 0$. Поэтому $\exists\, \xi \in \mathcal{J} : F'(\xi) = 0$. Раскрыв определитель и вычислив $F'(\xi)$, получим формулу (3). ▶

Следствие 1. *Если кроме сформулированных в теореме Коши условий выполняются еще и условия $(g'(x))^2 + (f'(x))^2 \neq 0$ $\forall\, x \in \mathcal{J}$, $g(a) \neq g(b)$, то формулу (3) можно записать в виде*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in \mathcal{J}. \tag{4}$$

◀ Если $f'(\xi) \neq 0$, то из условия $g(a) \neq g(b)$ следует, что правая часть в формуле (3) отлична от нуля, в силу чего и левая часть отлична от нуля, т. е. $g'(\xi) \neq 0$ и формулу (3) можно записать в виде (4).

Если же $f'(\xi) = 0$, то $g'(\xi) \neq 0$ (в силу условия $(g'(\xi))^2 + (f'(\xi))^2 \neq 0$) и поскольку $g(a) \neq g(b)$, то из формулы (3) следует формула (4). ▶

Например, для функций $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, условие $(g'(x))^2 + (f'(x))^2 \neq 0$ нарушается в точке $x = 0$: $(g'(0))^2 + (f'(0))^2 = 0$. Для рассматриваемого случая формула (4) неверна, в чем легко убедиться.

Следствие 2. *Если при выполнении всех условий теоремы Коши дополнительно выполнено условие $g'(x) \neq 0$ $\forall\, x \in \mathcal{J}$, то верна формула (4).*

◀ Если $g'(x) \neq 0$ $\forall\, x \in \mathcal{J}$, то, согласно теореме Дарбу, g' сохраняет вполне определенный знак на $\mathcal{J}$. Но тогда, согласно следствию 3) из теоремы Лагранжа, g строго монотонна на $\overline{\mathcal{J}}$, т. е. $g(a) \neq g(b)$ и формула (4) имеет смысл. ▶

Может возникнуть следующий вопрос, связанный с теоремой Лагранжа. Пусть $f \in C^{(1)}[a, b]$. Можно ли для всякой точки $\xi \in]a, b[$ указать две другие точки x_1 и x_2 из $]a, b[$ такие, что $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$, $x_1 < \xi < x_2$? Ответ на этот вопрос в общем случае отрицательный. Если, например, $f'(x) \geqslant 0$ $\forall\, x \in]a, b[$ и f отлична от по-

стоянной на любом сегменте, являющимся частью $]a, b[$, то f возрастает на $[a, b]$. Тогда для любой пары чисел $x_1 \in]a, b[$, $x_2 \in]a, b[\wedge x_1 < x_2$ имеем $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$ и для каждой точки $\xi \in]a, b[$ такой, что $f'(\xi) = 0$, $x_1 < \xi < x_2$, имеем $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \neq f'(\xi)$. Например, для функции $f(x) = x^3$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ при любых $x_1 \in]-1, 1[$, $x_2 \in]-1, 1[$ выполняется неравенство $\frac{x_2^3-x_1^3}{x_2-x_1} = x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 > 0$; следовательно, для точки $\xi = 0$ соответствующих аргументов x_1 и x_2 не существует.

В качестве примера на применение следствия 2 из теоремы Лагранжа докажем тождество

$$2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x, \text{ если } |x| \geqslant 1.$$

При $|x| > 1$ имеем

$$\left(2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|} = 0,$$

поэтому, согласно следствию 2,

$$2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} c_1, & \text{если } x \geqslant 1, \\ c_2, & \text{если } x \leqslant -1. \end{cases}$$

Взяв $x = 1$, получим $c_1 = \pi$, а полагая $x = -1$, получим $c_2 = -\pi$, т. е. доказываемое тождество справедливо.

§ 4. ТОЧКИ РАЗРЫВА ПРОИЗВОДНОЙ

На примере функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R},$$

убедились в том, что производная функции, дифференцируемой в каждой точке интервала, может быть разрывной функцией на этом интервале. Исследуем это более детально.

Теорема 1. *Если функция f непрерывна на интервале $\mathcal{I}_1 =]x_0, x_0 + \delta[$, $\delta > 0$, имеет в каждой точке $x \in \mathcal{I}_1$ производную f' и если существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0+0} f'(x) = L$, то можно построить продолжение F функции f в точку x_0, которое имеет правую производную $F'_+(x_0) = L$.*

◀ Взяв $\varepsilon = 1$, найдем такое $\delta_1 \in]0, \delta[$, что $|f'(x) - L| < 1$ $\forall x \in]x_0, x_0 + \delta_1[$, откуда $|f'(x)| < 1 + |L|$ $\forall x \in]x_0, x_0 + \delta_1[$. Возьмем

две произвольные точки x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$), принадлежащие интервалу $]x_0,\ x_0 + \delta_1[$. Сужение функции f на сегмент $[x_1,\ x_2]$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Лагранжа, поэтому $|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi)|(x_2 - x_1) < \delta_1(1 + |L|)$, так как $x_2 - x_1 < \delta_1$, $|f'(\xi)| < 1 + |L|$. По заданному $\varepsilon > 0$ выберем $\delta_1 > 0$ из условия $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{1 + |L|}$. Тогда $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$ $\forall x_1,\ x_2 \in]x_0,\ x_0 + \delta_1[$. Поскольку $0 < x_2 - x_0 < \delta_1$, $0 < x_1 - x_0 < \delta_1$, то сужение функции f на интервал $]x_0,\ x_0 + \delta_1[$ удовлетворяет условиям Коши в точке x_0, вследствие чего $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Положим по определению

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathcal{J}_1, \\ c, & x = x_0, \end{cases} \qquad x \in [x_0,\ x_0 + \delta[.$$

Функция F (продолжение функции f в точку x_0) непрерывна на полуинтервале $[x_0,\ x_0 + \delta[$ и на любом сегменте $[x_0,\ x] \subset [x_0,\ x_0 + \delta[$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа, в силу чего справедливо равенство

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(x_0 + \theta(x - x_0)) = f'(x_0 + \theta(x - x_0)), \quad 0 < \theta < 1. \tag{1}$$

Правая часть равенства (1) имеет предел при $x \to x_0 + 0$, равный L, поэтому и левая часть этого равенства имеет тот же предел, являющийся, согласно определению, правой производной функции F в точке x_0:

$$F'_+(x_0) = L. \blacktriangleright$$

Следствие. *Пусть функция $f : [x_0,\ x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ непрерывна в области определения, а ее производная f' существует на интервале $]x_0,\ x_0 + \delta[$. Тогда, если существует $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f'(x) = L$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$, то функция f имеет правую производную в точке x_0, причем $f'_+(x_0) = L$.*

◀ Если L конечно, то утверждение очевидно, поскольку в этом случае $F \equiv f$. Если L бесконечно, то взяв произвольную точку x, $x_0 < x < x_0 + \delta$, применив к функции f теорему Лагранжа на сегменте $[x_0,\ x]$ и перейдя к пределу при $x \to x_0 + 0$, получим

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0 + 0} f'(x_0 + \theta(x - x_0)) = L = f'_+(x_0). \blacktriangleright$$

Заметим, что если в теореме 1 взять $L = \infty$, то построить продолжение F функции f в точку x_0 так, чтобы функция F была непрерывной в этой точке, в общем случае невозможно. Например, если $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, $0 < x < 1$, то $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'(x) \to -\infty$ при $x \to +0$ и непрерывное продолжение функции f в точку $x = 0$ невозможно. Поэтому теорема 1 справедлива лишь в случае, когда $L \in \mathbb{R}$.

Следует отметить, что при фиксированном $x_0 \in \mathbb{R}$ и при условии,

что $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \infty$ и $\exists f'(x)$ $\forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$, производная f' не может иметь конечного предельного значения при $x \to x_0 + 0$.

В самом деле, предполагая, что существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0+0} f'(x) = L$ и взяв $x_1 > x_0$ из малой правосторонней окрестности $]x_0, \quad x_0 + \delta_1[$, $\delta_1 < \delta$, точки x_0, получим, применив теорему Лагранжа о конечных приращениях на сегменте $[x, x_1] \subset]x_0, x_0 + \delta_1[$:

$$|f(x_1) - f(x)| < |f'(\xi)|\,\delta_1 < M\delta_1, \quad \xi = x + \theta(x_1 - x), \quad 0 < \theta < 1,$$

$$M = \text{const}.$$

Устремив x к x_0 справа при фиксированном x_1, имеем: $|f(x_1) - f(x)|$ неограниченно возрастает, что противоречит полученной оценке. Здесь существенным является то, что x_0 фиксированно. Для случая, когда $x_0 = +\infty$, последнее утверждение может оказаться неверным; например, $f(x) = x \to +\infty$ при $x \to +\infty$, однако $f'(x) = 1$.

Полученный в теореме 1 и следствии из нее результат сформулируем для случая левосторонней окрестности точки x_0.

Теорема 2. *Пусть функция* $f :]x_0 - \delta, x_0] \to \mathbb{R}$ *непрерывна в области определения и* $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$ $\exists f'(x)$. *Тогда, если* $\exists \lim\limits_{x \to x_0-0} f'(x) = L$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$, *то функция* f *имеет левую производную в точке* x_0 *и* $f'_-(x_0) = L$.

Таким образом, если сужение функции $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ на некоторую двухстороннюю окрестность $S(x_0, \delta)$ точки $x_0 \in]a, b[$ непрерывно в этой окрестности и $\exists f'(x)$ $\forall x \in S(x_0, \delta) \wedge x \neq x_0$, а также $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = L$ (конечный или бесконечный), то функция f имеет производную в точке x_0, причем $f'(x_0) = L$.

Заметим, что из существования производной f' в точке x_0 вовсе не следует, что существует $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$. Мы убедились в этом на примере функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Основная цель этого параграфа — установить характер возможных точек разрыва производной f' дифференцируемой функции f.

Теорема 3. *Если функция* $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ *дифференцируема на интервале* $\mathcal{J}$, *то ее производная* f' *не может иметь на* $\mathcal{J}$ *устранимых разрывов, разрывов типа полюса и разрывов первого рода.*

◀ Пусть функция f дифференцируема на интервале $\mathcal{J}$, а ее производная f' разрывна в точке $x_0 \in \mathcal{J}$. Предположим, что x_0 является точкой устранимого разрыва функции f'. Тогда, согласно определению точки устранимого разрыва, существует $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$, причем $L \neq f'(x_0)$. В силу теоремы 2 имеем $f'(x_0) = L$, что противоречит предположению, сделанному выше.

Предположим, что производная f' имеет в точке x_0 разрыв типа полюса: $\exists \lim\limits_{x \to x_0} |f'(x)| = +\infty$. Тогда, согласно теореме 2, $|f'(x_0)| = +\infty$, а это противоречит условию дифференцируемости функции f в точке x_0.

Предположим, что производная f' имеет в точке x_0 существенный разрыв. Если предположить, что это разрыв первого рода, то это означает, что существуют конечные предельные значения $f'(x_0 + 0)$ и $f'(x_0 - 0)$, причем $f'(x_0 + 0) \neq f'(x_0 - 0)$. Согласно теореме 2, $f'(x_0 + 0) = f'_+(x_0)$, $f'(x_0 - 0) = f'_-(x_0)$, поэтому $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$, т. е. функция f не дифференцируема в точке x_0 вопреки предположению о ее дифференцируемости в каждой точке интервала $\mathcal{J}$. ▶

Таким образом, если функция f дифференцируема на интервале $\mathcal{J}$, то ее производная f' может иметь на $\mathcal{J}$ лишь разрывы второго рода.

§ 5. ОБОБЩЕНИЕ СЛЕДСТВИЯ 1 ИЗ ТЕОРЕМЫ ЛАГРАНЖА

Согласно следствию 1 из теоремы Лагранжа, из оценки для f' на интервале $]a, b[$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$, следуют неравенства $m \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$.

Обобщим этот результат, значительно ослабив условия, налагаемые на функцию f.

Теорема. *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция и производная f'_+ (конечная, или бесконечная) существует во всех точках полуинтервала $[a, b[$, за исключением некоторой его счетной части X. Если $f'_+(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a, b] \setminus X$, то $f(b) \geqslant f(a)$.*

◀ Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и обозначим через $\{x_n\}$ последовательность, полученную в результате некоторого упорядочения точек счетного множества X. Пусть $Y = \{y\}$, $Y \subset [a, b]$,— множество таких точек, что для всякого x, удовлетворяющего неравенствам $a \leqslant x \leqslant y$, выполняется неравенство

$$f(x) - f(a) \geqslant -\varepsilon(x - a) - \varepsilon \sum_{x_n < x} \frac{1}{2^n}, \qquad (1)$$

где сумма в правой части распространена на множество тех индексов n, для которых $x_n \geqslant x$. Множество Y не пусто, так как $a \in Y$. Покажем, что множество Y содержит числа, большие a.

Если $f'_+(a)$ существует и $f'_+(a) > 0$, то $\exists y > a : \forall x \in [a, y] \Rightarrow f(x) - f(a) \geqslant 0$. Следовательно, $f(x) - f(a) \geqslant -\varepsilon(x - a) - \varepsilon \sum\limits_{x_n < x} \dfrac{1}{2^n}$ при всех $a \leqslant x \leqslant y$. Если $\exists f'_+(a) = 0$, то $f(x) - f(a) = \alpha(x)(x - a)$, где $\alpha \to 0$ при $x \to a + 0$. Так как α — бесконечно малая при $x \to a + 0$ функция, то для заданного $\varepsilon > 0$ $\exists y > a$: $\forall x \in$

$\in [a, y] \Rightarrow |\alpha(x)| \leqslant \varepsilon$, следовательно, для всех x из сегмента $[a, y]$ выполнено неравенство, $f(x) - f(a) \geqslant -\varepsilon(x-a)$, а значит и неравенство $f(x) - f(a) \geqslant -\varepsilon(x-a) - \varepsilon \sum\limits_{x_n < x} \frac{1}{2^n}$.

Если же $a \in X$, то в силу непрерывности f в точке a справа $\exists y > a : \forall x \in [a, y]$ имеем

$$f(x) - f(a) \geqslant -\frac{\varepsilon}{2} \geqslant -\varepsilon(x-a) - \varepsilon \sum_{x_n < x} \frac{1}{2^n}.$$

Итак, множеству Y принадлежат внутренние точки сегмента $[a, b]$. Поскольку множество Y ограничено сверху числом $x = b$, то существует $\sup Y = c \leqslant b$. Покажем сначала, что $c \in Y$. В силу свойства точной верхней грани имеем $\forall x < c \quad \exists y' \in Y: x < y' \leqslant c$, т. е. для каждого $x < c$ в множестве Y найдется число больше, чем x. А тогда для каждого такого x неравенство (1) выполнено по определению множества Y. Если при этом в правой части неравенства (1) вместо x взять c, то неравенство лишь усилится:

$$f(x) - f(a) \geqslant -\varepsilon(c-a) - \varepsilon \sum_{x_n < c} \frac{1}{2^n}, \quad x < c. \tag{2}$$

Используя непрерывность f и переходя в левой части неравенства (2) к пределу при $x \to c$, получим неравенство

$$f(c) - f(a) \geqslant -\varepsilon(c-a) - \varepsilon \sum_{x_n < c} \frac{1}{2^n}, \tag{3}$$

из которого следует, что $c \in Y$. Покажем, что $c = b$. Допустим противоположное, что $c < b$ и пусть $c \notin X$; тогда существует $f'_+(c) \geqslant 0$ и по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое y, что $c < y \leqslant b$ и для $c \leqslant x \leqslant y$ выполняется неравенство

$$f(x) - f(c) \geqslant -\varepsilon(x-c). \tag{4}$$

Сложив неравенства (3) и (4), получим неравенство

$$f(x) - f(a) \geqslant -\varepsilon(x-a) - \varepsilon \sum_{x_n < c} \frac{1}{2^n} \geqslant -\varepsilon(x-a) - \varepsilon \sum_{x_n < x} \frac{1}{2^n}, \tag{5}$$

из которого следует, что существует $y \in Y$, $y > c$, а это противоречит тому, что $c = \sup Y$.

Пусть $c = x_k$ при некотором $k \in \mathbb{N}$. Так как функция f непрерывна в точке x_k, то существует такое y, что $c < y \leqslant b$ и для $c \leqslant x \leqslant y$ выполняется неравенство

$$f(x) - f(c) \geqslant -\frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{6}$$

Сложив неравенства (3) и (6), приходим к неравенству

$$f(x) - f(a) \geqslant -\varepsilon(c-a) - \varepsilon \sum_{x_n < x} \frac{1}{2^n} \geqslant -\varepsilon(x-a) - \varepsilon \sum_{x_n < x} \frac{1}{2^n},$$

из которого также следует, что существует $y \in Y$, причем $y > c$, а это противоречит тому, что $c = \sup Y$.

Таким образом, $c = b$, $Y = [a, b]$ следовательно,

$$f(b) - f(a) \geqslant -\varepsilon(b-a) - \varepsilon \sum_{x_n < b} \frac{1}{2^n} \geqslant -\varepsilon(b-a) - \varepsilon. \qquad (7)$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$, из неравенства (7) следует, что $f(b) \geqslant f(a)$. ▶

Следствие 1. *Пусть функция f непрерывна на сегменте $[a, b]$ и производная f'_+ (конечная или бесконечная) существует во всех точках полуинтервала $[a, b[$, за исключением некоторой его счетной части X. Тогда справедливы неравенства*

$$m \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leqslant M, \qquad (8)$$

где $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} \{f'_+(x)\}$, $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} \{f'_+(x)\}$.

◀ Образуем функции $\varphi : x \mapsto Mx - f(x)$ и $\psi : x \mapsto f(x) - mx$, если $m \in \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$. Эти функции удовлетворяют всем условиям теоремы, в силу чего

$$\varphi(b) \geqslant \varphi(a), \quad \psi(b) \geqslant \psi(a). \qquad (9)$$

Из неравенств (9) следуют неравенства (8). Если $M = +\infty$, то правая часть неравенства (8) очевидна, а если $m = -\infty$, то очевидна его левая часть. ▶

Следствие 2. *Если функция f непрерывна на $[a, b]$ и существует $f'_+ = 0$ во всех точках полуинтервала $[a, b[$, за исключением некоторой его счетной части X, то $f(x) = f(a) = f(b)$ при всех $a \leqslant x \leqslant b$.*

◀ Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда функция $\varphi(x) = \frac{\varepsilon}{2} x - f(x)$, $a \leqslant x \leqslant y$, $y \leqslant b$, непрерывна на $[a, y]$ и имеет производную $\varphi'_+(x) = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ в каждой точке $x \in [a, y[$, за исключением некоторой его счетной части $X_1 \subset X$. Поскольку $\varphi'_+(x) > 0$ в точках существования, то, согласно теореме, $\varphi(y) \geqslant \varphi(a)$, т. е. $0 \leqslant \frac{f(y) - f(a)}{y-a} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что $f(y) = f(a)$ $\forall\, y \in]a, b]$. ▶

Следствие 3. *Если функции f и g непрерывны на $[a, b]$ и существуют конечные производные f'_+, g'_+ во всех точках полуинтервала $[a, b[$, за исключением некоторой его счетной части X, и в точках существования $f'_+ = g'_+$, то функции f и g отличаются на сегменте $[a, b]$ на постоянное число.*

◀ Применив следствие 2 к разности $f - g$, получим, что

$$f(x) - g(x) = c, \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad c = f(a) - g(a). \ ▶$$

Следствие 4. *Если при выполнении всех условий теоремы хотя бы в одной точке* $x \in [a, b[$ *выполняется неравенство* $f'_+(x) > 0$, *то* $f(b) > f(a)$.

◀ Если $x = a$, то утверждение очевидно. Пусть $f'_+(x) > 0$, $x \in]a, b[$. Рассмотрим сегмент $[a, x]$. Сужение функции f на этот сегмент также удовлетворяет всем условиям теоремы, поэтому $f(x) \geqslant f(a)$. Кроме того, из условия $f'_+(x) > 0$ следует, что существует $x < y < b$ такое, что $f(y) - f(x) > 0$, т. е. $f(y) > f(x)$. Применив теорему для сужения функции f на сегмент $[y, b]$, получим неравенство $f(b) \geqslant f(y)$. В итоге получаем, что $f(b) \geqslant f(y) > f(x) \geqslant f(a)$, $f(b) > f(a)$. ▶

Следствие 5. *Пусть функция* f *непрерывна на сегменте* $\overline{\mathcal{I}} = [a, b]$, *имеет правую производную* f'_+ *во всех точках полуинтервала* $[a, b[$, *за исключением некоторой его счетной части* X. *Для того чтобы функция* f *не убывала на* $\overline{\mathcal{I}}$, *необходимо и достаточно, чтобы неравенство* $f'_+(x) \geqslant 0$ *выполнялось в каждой точке полуинтервала* $[a, b[$, *не принадлежащей множеству* X; *для того чтобы* f *возрастала на* $\overline{\mathcal{I}}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предыдущее условие и чтобы множество тех точек* x, *в которых* $f'_+(x) > 0$, *было всюду плотным на* $\overline{\mathcal{I}}$.

◀ *Необходимость.* Пусть f не убывает на сегменте $\overline{\mathcal{I}}$ и $x \notin X$ — произвольная точка из интервала $]a, b[$. Из существования $f'_+(x)$ следует, что

$$f'_+(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y > x}} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0, \quad \text{так как} \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0.$$

Если предположить, что f возрастает на сегменте $\overline{\mathcal{I}}$ и множество тех точек x, в которых $f'_+(x) > 0$ не является всюду плотным на $\overline{\mathcal{I}}$, то найдется пара точек $x_1 \in [a, b[$, $x_2 \in [a, b[$, $x_1 < x_2$, такая, что во всех точках x интервала $]x_1, x_2[$, не принадлежащих множеству X, $f'_+(x) = 0$. А это означает, что $f(x_2) = f(x_1)$ и противоречит предположению о возрастании функции f.

Достаточность. Пусть $f'_+(x) \geqslant 0$ $\forall x \notin X$ и множество тех точек x, в которых $f'_+(x) > 0$, всюду плотно на $\overline{\mathcal{I}}$. Тогда между любой парой точек x_1, x_2 из сегмента $\overline{\mathcal{I}}$, $x_1 < x_2$, найдется такая точка x, что $f'_+(x) > 0$. Применив следствие 4 к сегменту $[x_1, x_2]$, получим неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Если же во всех точках x существования f'_+ на любом сегменте $[x_1, x_2] \subset \overline{\mathcal{I}}$ выполняется неравенство $f'_+(x) \geqslant 0$, то $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, т. е. функция f не убывает на $[a, b]$. ▶

В качестве примера, иллюстрирующего следствие 5, исследуем на монотонность функцию $f: x \mapsto x + |\sin x|$, $x \in \mathbb{R}$. Функция f дифференцируема всюду в $\mathbb{R}$, за исключением счетного множества точек $X = \{x_k = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$: $f'(x) = 1 + \operatorname{sgn}(\sin x)\cos x$, $x \notin X$. Так как

в точках существования f' выполнено условие $f'(x) \geqslant 0$, причем множество тех точек x, в которых $f'(x) > 0$ всюду плотно на $\mathbb{R}$, то функция f возрастает на $\mathbb{R}$.

Отметим, что в условиях теоремы вместо полуинтервала $[a, b[$ можно взять полуинтервал $]a, b[$, а вместо правой производной f'_+ — левую производную f'_-.

§ 6. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ (ПРАВИЛА ЛОПИТАЛЯ)

Теоремы, которые здесь докажем, часто используются при вычислении пределов функций.

Теорема 1 (первое правило Лопиталя). *Пусть функции* $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $g : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{J} = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, *непрерывны на* $\mathcal{J}$ *и удовлетворяют следующим условиям:*

1) $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0$; 2) $\forall x \in \mathcal{J} \quad \exists f'(x) \wedge \exists g'(x)$;

3) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{J}$; 4) $\exists \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L, \quad L \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда $\exists \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

◀ Рассмотрим сначала случай $L \in \mathbb{R}$. Продолжим f и g в точку a, обозначив эти продолжения соответственно F и G:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in \mathcal{J}, \\ 0, & \text{если } x = a, \end{cases} \qquad x \in [a, b[;$$

$$G(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \in \mathcal{J}, \\ 0, & \text{если } x = a, \end{cases} \qquad x \in [a, b[.$$

Функции F и G непрерывны на полуинтервале $[a, b[$, причем $\forall x \in \mathcal{J}$ $\exists G'(x) \neq 0$. Из условий $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, $L \in \mathbb{R}$, следует, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon \quad \forall x \in]a, a + \delta[.$$

Применяя следствие 2 из теоремы Коши о среднем (формула (4), § 3), для произвольного сегмента $[a, x] \subset]a, a + \delta[$ получим

$$\left| \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} - L \right| = \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L \right| < \varepsilon,$$

так как $\xi \in]a, x[\subset]a, a + \delta[$. Полученное неравенство справедливо $\forall x \in]a, a + \delta[$; следовательно,

$$\exists \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Если $L \in \overline{\mathbb{R}}$, $L = +\infty$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_1 > 0$: $\forall x \in [a, a + \delta_1[= \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{g'(x)} > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Тогда, взяв произвольный сегмент $[a, x] \subset [a, a +$

$+\delta_1[$ и применив ту же формулу (4) из § 3, получим

$$\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}>\frac{1}{\varepsilon},$$

так как $\xi\in]a,\ x[\subset]a,\ a+\delta_1[$. Тогда $\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{1}{\varepsilon}\quad\forall x\in]a,\ a+\delta_1[$, т. е. $\exists\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$. Если $L=-\infty$, то вместо неравенства $\frac{f'(x)}{g'(x)}>\frac{1}{\varepsilon}$ возьмем неравенство $\frac{f'(x)}{g'(x)}<-\frac{1}{\varepsilon}$. ▶

Доказанная теорема носит название *правила Лопиталя раскрытия неопределенностей вида* $\frac{0}{0}$.

Следует отметить, что из существования предела отношения $\frac{f}{g}$ при $x\to a+0$ не следует в общем случае существование предела отношения $\frac{f'}{g'}$ при $x\to a+0$.

Пусть, например, $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, $g(x)=x$, $0<x<1$. Тогда $\frac{f(x)}{g(x)}\to 0$ при $x\to+0$, однако $\frac{f'(x)}{g'(x)}=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ не имеет предела при $x\to+0$.

Отметим также, что при необходимости правило Лопиталя применяют многократно.

Теорема 2. *Пусть кроме условия* 1) *предыдущей теоремы еще выполняются следующие условия:*

1′) $\forall x\in\mathcal{J}\ \exists f^{(j)}(x)\wedge\exists g^{(j)}(x),\quad j=\overline{1,\ n}$;

2′) *функции* $f^{(j)}$, $g^{(j)}$, $j=\overline{1,\ n-1}$, *непрерывны на интервале* $\mathcal{J}$, *причем* $\lim\limits_{x\to a+0}f^{(j)}(x)=\lim\limits_{x\to a+0}g^{(j)}(x)=0$;

3′) $g^{(j)}(x)\neq 0\quad\forall x\in\mathcal{J},\ j=\overline{1,\ n}$; 4′) $\exists\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=L,\quad L\in\overline{\mathbb{R}}$.

Тогда $\exists\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

◀ Применяя доказанную теорему (первое правило Лопиталя) к функциям $f^{(n-1)}$ и $g^{(n-1)}$, получаем

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}=L.$$

На основании той же теоремы имеем

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f^{(n-2)}(x)}{g^{(n-2)}(x)}=L,$$

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f^{(n-3)}(x)}{g^{(n-3)}(x)}=L,$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L,$$

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=L. \blacktriangleright$$

Рассмотрим случай, когда функции f и g определены на бесконечном полуинтервале, и докажем теорему о вычислении предела отношения $\frac{f}{g}$ при $x\to\infty$.

Теорема 3. *Пусть:* 1) $f:[x_0,+\infty[\to\mathbb{R}$, $g:[x_0,+\infty[\to\mathbb{R}$, $x_0>0$, $f,\ g\in C[x_0,+\infty[$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$; 3) $\forall x\in]x_0,+\infty[$ $\exists f'(x)\wedge\exists g'(x)$; 4) $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in]x_0,+\infty[$; 5) $\exists\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$, $L\in\overline{\mathbb{R}}$.

Тогда $\exists\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

◀ Рассмотрим функции $F:t\mapsto f\left(\frac{1}{t}\right)$, $G:t\mapsto g\left(\frac{1}{t}\right)$, $0<t\leqslant\frac{1}{x_0}$ $\left(\text{взято } t=\frac{1}{x}\right)$. Тогда $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{F(t)}{G(t)}$, $t\to+0$ при $x\to+\infty$ и $\lim\limits_{t\to+0}F(t)=\lim\limits_{t\to+0}G(t)=0$.

По условию, существует $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=L$. Если существует $\lim\limits_{t\to+0}\frac{F'(t)}{G'(t)}$, то существует и $\lim\limits_{t\to+0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim\limits_{t\to+0}\frac{F'(t)}{G'(t)}$ (согласно теореме 1). Так как $\frac{F'(t)}{G'(t)}=\dfrac{f'\left(\frac{1}{t}\right)t^{-2}}{g'\left(\frac{1}{t}\right)t^{-2}}=\dfrac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}$ при $t\neq 0$, то из условия $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=L$ вытекает, что существует и предел отношения $\frac{F'(t)}{G'(t)}$ при $t\to+0$, равный L, в силу чего имеем

$$\lim_{t\to+0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L. \blacktriangleright$$

Рассмотрим второе правило Лопиталя (раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$).

Теорема 4 (второе правило Лопиталя). *Пусть* $f:\mathcal{J}\to\mathbb{R}$, $g:\mathcal{J}\to\mathbb{R}$, $\mathcal{J}=\{x\in\mathbb{R}:a<x<b\}$ *непрерывные на* $\mathcal{J}$

функции, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=\infty$; 2) $\forall x\in\mathcal{J}\ \exists f'(x)\wedge\exists g'(x)$;

3) $g'(x)\neq 0\ \forall x\in\mathcal{J}$; 4) $\exists \lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$, $L\in\overline{\mathbb{R}}$.

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

◀ Рассмотрим сначала случай $L\in\mathbb{R}$. Из условия $\frac{f'(x)}{g'(x)}\to L$ при $x\to a+0$ следует, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что $\forall x\in]a,\ a+\delta[$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-L\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Фиксируем произвольное $x_1\in]a,\ a+\delta[$ и определяем функцию α: $]a,\ x_1]\to\mathbb{R}$ из условия

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}\cdot\alpha(x,\ x_1),\quad x\in]a,\ x_1]. \tag{2}$$

Находим $\alpha(x,\ x_1)=\dfrac{1-\frac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}}$. Из условий теоремы следует, что $\lim\limits_{x\to a+0}\alpha(x,\ x_1)=1$; поэтому для заданного $\varepsilon>0\ \ \exists\delta_1>0$ $(\delta_1\leqslant x_1-a)$ такое, что

$$\forall x\in]a,\ a+\delta_1[\Rightarrow|\alpha(x,\ x_1)-1|<\frac{\varepsilon}{2\left(|L|+\frac{\varepsilon}{2}\right)}. \tag{3}$$

Из определения функции α следует, согласно теореме Коши о среднем, равенство

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\alpha(x,\ x_1),\quad a<\xi<x_1. \tag{4}$$

А так как $\xi\in]a,\ a+\delta[$, то для частного $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ справедлива оценка

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|\leqslant|L|+\frac{\varepsilon}{2}, \tag{5}$$

следующая из оценки (1).

Вычитая L из левой и правой частей равенства (4) и переходя к оценкам, получим

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right|=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(\alpha(x,\ x_1)-1)+\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-L\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right||\alpha(x,\ x_1)-1|+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\left(|L|+\frac{\varepsilon}{2}\right)|\alpha(x,\ x_1)-1|+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Для $\forall x\in]a,\ a+\delta_1[$ справедливо неравенство (3), поэтому на этом

интервале выполняется неравенство

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right|<\left(|L|+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\varepsilon}{2\left(|L|+\frac{\varepsilon}{2}\right)}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

из которого следует соотношение $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$.

Если $L=+\infty$, то для доказательства теоремы вместо неравенства (1) следует взять неравенство $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}>\dfrac{1}{\varepsilon}$. Тогда, оценивая (4), получим неравенство $\dfrac{f(x)}{g(x)}>\dfrac{1}{2\varepsilon}$ (приняв во внимание, что в достаточно малой правосторонней окрестности точки a выполнено неравенство $\alpha(x, x_1)>\dfrac{1}{2}$). Если же $L=-\infty$, то, взяв вместо неравенства (1) неравенство $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}<-\dfrac{1}{\varepsilon}$, придем к оценке $\dfrac{f(x)}{g(x)}<$ $<-\dfrac{2}{\varepsilon}$. ▶

Рассмотрим два примера применения правил Лопиталя.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\times\right.$ $\left.\times\dfrac{\ln(e^x+x)}{x}\right)$.

Приведя данную неопределенность вида $\infty-\infty$ к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ и применив правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\ln(1+xe^{-x})}{x}+1\right)\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{t\to+0}\frac{(1+t+t^2+t^3)^{\frac{1}{3}}-(1+t+t^2)^{\frac{1}{2}}}{t}=$$

$$=\lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{3}(1+t+t^2+t^3)^{-\frac{2}{3}}(1+2t+3t^2)-\frac{1}{2}(1+t+t^2)^{-\frac{1}{2}}(1+2t)\right)=$$

$$=-\frac{1}{6}.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, где $\varphi(x)=x^{\ln x}$, $\psi(x)=(\ln x)^x$.

Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln^2 x}{x}-\ln\ln x\right)}.$$

Отношение $\frac{\ln^2 x}{x}$ при $x \to +\infty$ есть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$; дважды применив правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

Так как $\ln \ln x \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln^2 x}{x} - \ln \ln x \right) = -\infty$, следовательно,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0.$$

Отметим, что на практике часто встречаются неопределенности не только вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, но и вида $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0. Рассмотрим каждую из них в отдельности. При этом считаем, что функции f и g определены в некоторой окрестности точки x_0, кроме самой точки x_0. Пусть:

1) $f(x) \to 0$, $g(x) \to \infty$ при $x \to x_0$; представляя произведение функций f и g в виде $fg = \frac{f}{\frac{1}{g}}$, приводим неопределенность $0 \cdot \infty$ к неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

2) $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ при $x \to x_0$; представляя разность функций f и g в виде $f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{gf}}$, получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

3) Рассмотрим неопределенности вида 0^0, 1^∞ и ∞^0. Считая $f(x) > 0$ в упомянутой окрестности точки x_0, рассмотрим функцию $u = f^g$; представляя ее в виде $u(x) = e^{g(x) \ln f(x)}$ и принимая во внимание соотношение $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = e^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \ln f(x)}$, видим, что эти неопределенности приведены к неопределенности вида $0 \cdot \infty$, рассмотренной в 1).

§ 7. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Формула Тейлора имеет многочисленные применения как в вопросах теории, так и практики. Она занимает одно из центральных мест в математическом анализе.

7.1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и Шлемильха — Роша.

Теорема 1. *Пусть функция $f : S(x_0, \delta) \to \mathbb{R}$, где $S(x_0, \delta)$ — некоторая окрестность точки x_0, $n - 1$ раз непрерывно дифференцируема в этой окрестности и имеет конечную производную n-го порядка в точке x_0.*

Тогда справедливо представление функции f при $x \to x_0$ в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \tag{1}$$

где принято $0! = 1$, $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

◀ Для доказательства формулы (1) достаточно показать, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0,$$

где $\varphi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$, $\psi(x) = (x - x_0)^k$, $x \in S(x_0, \delta)$.

Выражение, стоящее под знаком предела, при $x \to x_0$ имеет неопределенность вида $\frac{0}{0}$; такую же неопределенность имеют и отношения всех производных до $(n - 1)$-го порядка включительно числителя и знаменателя этого выражения. Таким образом, если отношение производных $(n - 1)$-го порядка числителя и знаменателя имеет предел, то законно $(n - 1)$-кратное применение правила Лопиталя, и полученный предел будет равен пределу исходного выражения. Рассмотрим отношение

$$\frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{\psi^{(n-1)}(x)} = \frac{1}{n!} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n)}(x_0) \right).$$

Из условия существования $f^{(n)}(x_0)$ следует, что $\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} \to$ $\to f^{(n)}(x_0)$ при $x \to x_0$; следовательно, $\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{\psi^{(n-1)}(x)} = 0$, а вместе с ним и $\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$. ▶

Слагаемое $R_{n+1}(x) = o((x - x_0)^n)$ формулы (1) называют ее *остаточным членом*, а сама формула (1) носит название *формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*, причем ее правая часть называется *разложением функции* f по степеням $x - x_0$ при $x \to x_0$. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано носит локальный характер и поэтому ее правую часть называют *асимптотическим представлением функции* f *в окрестности точки* x_0. Эту формулу можно использовать для приближенных вычислений значений функции f в точках, близлежащих к точке x_0, поскольку известен порядок погрешности $R_{n+1}(x)$.

Отметим также, что формула (1) весьма эффективна при отыскании пределов функций.

Если $x_0 = 0$, то формулу (1) называют *формулой Маклорена*, являющейся *асимптотическим представлением функции* f *в окрестности нуля*. При этом имеем

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n). \tag{2}$$

Весьма желательно было бы использовать многочлены при вычислении значений функций сложной природы не только в близлежащих к x_0 точках x, но и при всех значениях x из некоторого промежутка, содержащего точку x_0, поскольку значения многочленов по целым степеням $x - x_0$ вычисляются просто. Но если точка x не принадлежит достаточно малой окрестности точки x_0, или точки 0, то формулами (1) и (2) пользоваться нельзя, так как ничего определенного нельзя сказать о погрешности, допускаемой при замене значений функции в фиксированной точке значениями многочлена

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

называемого *многочленом Тейлора* функции f.

Если на функцию f наложить более жесткие, чем в теореме 1, ограничения, то полученная после этого нелокальная теорема Тейлора становится мощным инструментом, используемым в вычислительной практике.

Теорема 2. *Пусть функция* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируема* n *раз на интервале* $]a, b[$ *и имеет в каждой точке этого интервала, за исключением, может быть, лишь точки* $x_0 \in]a, b[$, *производную* $(n+1)$*-го порядка. Тогда между точкой* x_0 *и любой точкой* $x \in \in]a, b[$ *найдется такая точка* ξ, *что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_{n+1}(x), \tag{3}$$

где

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!p}\left(\frac{x - x_0}{x - \xi}\right)^p (x - \xi)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi), \quad p \in \mathbb{R}, \quad p > 0. \tag{4}$$

Формулу (3) называют *формулой Тейлора для функции* f *с остаточным членом* $R_{n+1}(x)$ *в форме Шлемильха — Роша.*

◀ Для определенности считаем, что $x > x_0$. Введем в рассмотрение функцию

$$h(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k - \frac{(x - t)^p}{n!p}\lambda, \quad x_0 \leqslant t \leqslant x,$$

где $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, λ — числовой параметр.

Функция h непрерывна на сегменте $[x_0, x]$, причем $h(x) = 0$, а производная $h'(t)$ существует при каждом $t \in]x_0, x[$.

Выберем значение параметра λ таким, чтобы выполнялось равенство

$$h(x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k - \frac{(x - x_0)^p}{n!p}\lambda = 0. \tag{5}$$

При таком выборе λ функция h удовлетворяет на сегменте $[x_0, x]$ всем условиям теоремы Ролля, в силу чего существует такая точка $\xi \in]x_0,$

$x[$, что

$$h'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{(x-\xi)^{p-1}}{n!}\lambda = 0. \qquad (6)$$

Из равенства (6) находим $\lambda = f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^{n-p+1}$ и, подставив его в (5), получим

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}\left(\frac{x-x_0}{x-\xi}\right)^p (x-\xi)^{n+1}$. ▶

Выбирая вполне определенные значения $p > 0$, получим частные случаи остаточного члена $R_{n+1}(x)$. Рассмотрим наиболее важные из них, когда $p = n+1$ и $p = 1$.

Полагая в формуле (4) $p = n+1$, получим остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \xi = x_0 + \theta(x-x_0), \quad 0 < \theta < 1. \qquad (7)$$

Взяв в формуле (4) $p = 1$ и представив точку ξ в ней в виде $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, где $0 < \theta < 1$, получим остаточный член формулы Тейлора в форме Коши:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n. \qquad (8)$$

Если в формуле (3) положить $x_0 = 0$, то получим формулу Маклорена:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_{n+1}(x). \qquad (9)$$

Остаточные члены в форме Лагранжа и Коши в формуле Маклорена (9) соответственно имеют вид

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1, \qquad (10)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \qquad (11)$$

Если обозначить $x - x_0 = h$, то формулы (1) и (2) можно записать соответственно в виде линейной комбинации дифференциалов и остаточного члена:

$$\Delta f(x_0) = df(x_0)(h) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0)(h) + \cdots + \frac{1}{n!}d^nf(x_0)(h) + o(h^n), \qquad (12)$$

$$\Delta f(0) = df(0)(x) + \frac{1}{2!}d^2f(0)(x) + \cdots + \frac{1}{n!}d^nf(0)(x) + o(x^n). \qquad (13)$$

7.2. Пять основных разложений по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа. Применим формулу Маклорена (9)

с остаточным членом в форме Лагранжа (10) в пяти случаях и полученные при этом разложения будем называть основными.

1) Пусть $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Дифференцируя k раз, получаем $\forall k \in \mathbb{N}$: $f^{(k)}(x) = e^x$, $f^{(k)}(0) = 1$. Согласно формулам (9) и (10), имеем

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x), \tag{1}$$

где $R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$.

2) Пусть $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$. Дифференцируя k раз, находим $\forall k \in \mathbb{N}$: $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$, $f(0) = 0$, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$. Согласно формулам (9) и (10), справедливо представление

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + R_{n+1}(x), \tag{2}$$

где $R_{n+1}(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$, $0 < \theta < 1$.

3) Пусть $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Так как $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$ $\forall k \in \mathbb{N}$, причем $f(0) = 0$, $f^{(2m)}(0) = 0$, $f^{(2m-1)}(0) = \sin\frac{\pi}{2}(2m-1) = (-1)^{m-1}$ $\forall m \in \mathbb{N}$, то, согласно формулам (9) и (10), справедливо представление

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2n+1}(x), \tag{3}$$

где $R_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{\cos\theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $0 < \theta < 1$.

4) Пусть $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда $f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$ $\forall k \in \mathbb{N}$, причем $f(0) = 1$, $f^{(2m)}(0) = (-1)^m$, $f^{(2m-1)}(0) = 0$ $\forall m \in \mathbb{N}$. Согласно формулам (9) и (10), имеем

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+2}(x), \tag{4}$$

где $R_{2n+2}(x) = (-1)^{n+1} \frac{\cos\theta x}{(2n+2)!} x^{2n+2}$, $0 < \theta < 1$.

5) Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x > -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Поскольку $\forall k \in \mathbb{N}$ имеем $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$, $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots$

$\ldots(\alpha - k + 1)$ и $f(0) = 1$, то применив формулы (9) и (10), получим

$$(1 + x)^{\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - k + 1)}{k!} x^k + R_{n+1}(x), \qquad (5)$$

где $R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n)}{(n + 1)!} (1 + \theta x)^{\alpha - (n+1)} \cdot x^{n+1}$.

Пусть $\mathcal{J}$ — конечный или бесконечный промежуток, содержащий точку x_0, который, в частности, может совпадать с пространством $\mathbb{R}$; $f\colon \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ — функция класса C^{∞}. Тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$ остаточный член $R_{n+1}(x)$ формулы Тейлора для функции f имеет вид $R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x)$, где $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ — ее многочлен Тейлора. Если при каждом x из некоторого множества $X \subset \mathcal{J}$, содержащего точку x_0 выполняется соотношение $\lim\limits_{n \to \infty} R_{n+1}(x) = 0$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n > n_0$ справедлива оценка $|R_{n+1}(x)| < \varepsilon$. Тогда в каждой точке $x \in X$ значение функции f можно вычислять с любой наперед заданной точностью, полагая $f(x) \approx P_n(x)$.

Из сотношения $f(x) - P_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ следует, что на множестве X функцию f можно представить в виде функционального ряда, членами которого являются функции $x \mapsto \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

сходящегося $\forall x \in X$ (поточечно сходящегося) и называемого *рядом Тейлора функции* f.

Оценим остаточные члены пяти основных разложений.

Остаточный член формулы (1) легко оценить $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant \frac{e^{\theta|x|}}{(n + 1)!} |x|^{n+1} < \frac{e^{|x|}}{(n + 1)!} |x|^{n+1}.$$

Применив признак д'Аламбера к ряду с общим членом $a_n(x) = \frac{e^{|x|}}{(n + 1)!} |x|^{n+1}$, получим, что $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = 0$, откуда следует, что ряд с членами $a_n(x)$ сходится, в силу чего $a_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $R_{n+1}(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, справедливо представление

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

То же самое можно сказать об остаточных членах формул (3) и (4). Для них оценки остаточных членов такие:

$$|R_{2n+1}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n + 1)!}, \quad |R_{2n+2}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n + 2)!} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

а разложения функций $x \mapsto \sin x$ и $x \mapsto \cos x$ в ряд Тейлора имеют вид

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Используя периодичность синуса и косинуса, вычисление их значений $\forall x \in \mathbb{R}$ можно свести к вычислению в некоторой точке $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Таким образом, $R_{2n+1}(x)$ и $R_{2n+2}(x)$ с возрастанием n быстро стремятся к нулю.

Если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то оценку остаточного члена формулы (2) получим сразу:

$$R_{n+1}(x) \leqslant \frac{1}{n+1}, \quad R_{n+1}(x) \to 0 \text{ при } n \to \infty \quad \forall x \in [0, 1].$$

При $-1 < x < 0$ воспользуемся формулой остаточного члена в форме Коши:

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \frac{x^{n+1}}{1+\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Так как $\frac{1-\theta}{1+\theta x} < \frac{1-\theta}{1-\theta} = 1$, $1 + \theta x > 1 - |x| \quad \forall x \in]-1, 0[$, то $|R_{n+1}(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \to 0$ при $n \to \infty \quad \forall x \in]-1, 0[$. Таким образом, справедливо разложение

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, \quad x \in]-1, 1].$$

Оценим на интервале $]-1, 1[$ остаточный член в формуле (5), взяв его в форме Коши:

$$R_{n+1}(x) = \left(\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{n!} x^n\right)\left(\frac{1-0}{1+\theta x}\right)^n \alpha x (1+\theta x)^{\alpha-1},$$

$$0 < \theta < 1.$$

Так как $x > -1$, то $0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$, в силу чего $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства $0 < \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n < 1$. Из неравенства $0 < \theta < 1$ следует, что $\forall x \in]-1, 1[$ выполняются неравенства

$$|\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1} \leqslant |\alpha x|(1+\theta x)^{\alpha-1} \leqslant |\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1},$$

если $\alpha - 1 > 0$,

$$|\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1} \leqslant |\alpha x|(1+\theta x)^{\alpha-1} \leqslant |\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1},$$

если $\alpha - 1 < 0$,

не зависящие от n. Ряд с общим членом $a_n(x) = \frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)|}{n!} \times$ $\times |x|^n$ сходится по признаку д'Ламбера, поэтому для его членов

выполнено необходимое условие сходимости $a_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, $R_{n+1}(x) \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $x \in]-1, 1[$, поэтому справедливо разложение

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ \ldots\ (\alpha-k+1)}{k!} x^k, \quad x \in]-1, 1[.$$

Отметим, что известная формула бинома Ньютона — частный случай формулы (5) при $\alpha = n$ (в этом случае $R_{n+1}(x) = 0$).

Приведем формулы асимптотического представления в окрестности точки $x = 0$ функций, рассмотренных в 1) — 5):

1) $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$; 2) $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$;

3) $\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n})$;

4) $\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$;

5) $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ \ldots\ (\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n), \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

В качестве примера найдем асимптотическое представление при $x \to 0$ функции $f : x \mapsto \operatorname{tg} x$, включив в это представление степени x до x^7 включительно. При этом воспользуемся возможностью выражать значения производных этой функции через ее значения.

Последовательно дифференцируя, получаем:

$$f'(x) = 1 + f^2(x),$$
$$f''(x) = 2f(x)(1 + f^2(x)),$$
$$f'''(x) = 2(1 + 4f^2(x) + 3f^4(x)),$$
$$f^{(4)}(x) = 8(2f(x) + 5f^3(x) + 3f^5(x)),$$
$$f^{(5)}(x) = 8(2 + 17f^2(x) + 30f^4(x) + 15f^6(x)),$$
$$f^{(6)}(x) = 8(34f(x) + 154f^3(x) + 210f^5(x) + 90f^7(x)),$$
$$f^{(7)}(x) = 8(1 + f^2(x))(34 + 3 \cdot 154f^2(x) + 5 \cdot 210f^4(x) + 7 \cdot 90f^6(x)).$$

Подставив в полученные формулы значение $x = 0$, находим

$$f(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = f^{(6)}(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f'''(0) = 2,$$
$$f^{(5)}(0) = 16, \quad f^{(7)}(0) = 8 \cdot 34.$$

Следовательно, согласно формуле (2), п. 7.1, искомое представление имеет вид

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + o(x^7), \quad x \to 0.$$

Пять основных разложений по формуле Маклорена рассмотрены для функций класса C^∞ на соответствующих множествах. Остаточный член каждой из полученных формул содержит $(n+1)$-ю производную функции f в некоторой точке и при оценке остаточного члена возникает необходимость оценки этой производной на определенном промежутке. Рассмотрим случай, когда вопрос об оценке остаточного члена формулы Тейлора решается просто.

Предположим, что функция f и все ее производные *равномерно ограничены* на интервале $]\alpha, \beta[$, содержащем точку x_0, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что выполнены неравенства

$$\sup_{\alpha<x<\beta} |f^{(k)}(x)| \leqslant M, \quad \{k\} = \{0\} \cup \mathbb{N}. \tag{7}$$

Тогда для остаточного члена $R_{n+1}(x)$ формулы Тейлора, взятого в форме Лагранжа, справедлива оценка

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \leqslant M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$
$$x \in]\alpha, \beta[, \ \xi \in]\alpha, \beta[, \tag{8}$$

из которой следует, что $R_{n+1}(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Действительно, $\forall x \in]\alpha, \beta[$, $x \neq x_0$, ряд с общим членом $a_n(x) = M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ сходится по признаку д'Аламбера, в силу чего для членов ряда выполнено необходимое условие сходимости $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

В трех из рассмотренных пяти случаев были получены оценки вида (8) для остаточных членов формул Маклорена.

Из оценок, полученных для всех пяти случаев, следует, что на каждом из множеств $X \subset \mathbb{R}$, где $R_{n+1}(x) \to 0$ с возрастанием n, при любом фиксированном $x \in X$ значение функции f в этой точке можно приближенно вычислить с наперед заданной точностью, полагая

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = P_n(x). \tag{9}$$

Рассмотрим примеры на применение формулы Тейлора.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

При представлении числителя формулой Маклорена в окрестности точки $x = 0$, будем учитывать степени переменной x до пятой включительно, а все степени x^k $(k \geqslant 6)$ отнесем, как обычно, к $o(x^5)$. Имеем:

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{6} + \frac{\sin^5 x}{120} + o(\sin^5 x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} -$$
$$- \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 + \frac{x^5}{120} + o(x^5) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{10} + o(x^5);$$
$$x\sqrt[3]{1-x^2} = x(1-x^2)^{\frac{1}{3}} = x\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{9} + o(x^4)\right) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{9} + o(x^5);$$

$$\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2} = \frac{19}{90}x^5 + o(x^5),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{19}{90}x^5}{x^5} = \frac{19}{90}.$$

Пример 2. Оценить абсолютную погрешность формулы $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}$ при $|x| \leqslant 0{,}1$.

Согласно формуле остаточного члена в форме Лагранжа, имеем

$$\operatorname{tg} x - x - \frac{x^3}{3} = R_5(x) = \frac{1}{5!}\operatorname{tg}^{(5)}(\xi)\,x^5, \quad \xi = \theta, \quad 0 < \theta < 1.$$

Принимая во внимание, что $(\operatorname{tg} x)^{(5)} = 8(2 + 17\operatorname{tg}^2 x + 30\operatorname{tg}^4 x + 15\operatorname{tg}^6 x)$, $|x| \leqslant 0{,}1$, получаем оценку

$$|R_5(x)| = \frac{1}{120}\operatorname{tg}^{(5)}(\xi)\,|x|^5 \leqslant \frac{10^{-5}}{15}(2 + 17\operatorname{tg}^2 0{,}1 + 30\operatorname{tg}^4 0{,}1 + 15\operatorname{tg}^6 0{,}1) <$$

$$< \frac{10^{-5}}{15}\left(2 + \frac{17}{99} + \frac{30}{99^2} + \frac{15}{99^3}\right) < \frac{10^{-5}}{15}\cdot 3 = 2\cdot 10^{-6}.$$

Пример 3. С помощью формулы Тейлора приближенно вычислить $\operatorname{arctg} 0{,}8$. Взяв в формуле Тейлора $x_0 = 1$, получим

$$\operatorname{arctg} 0{,}8 = \operatorname{arctg}(x_0 - 0{,}2) \approx \operatorname{arctg} x_0 - (\operatorname{arctg} x)'|_{x=x_0}\cdot 0{,}2 +$$

$$+ \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)''|_{x=x_0}\cdot 0{,}04 - \frac{1}{6}(\operatorname{arctg} x)'''|_{x=x_0}\cdot 0{,}008 \approx$$

$$\approx \frac{\pi}{4} - 0{,}1 - 0{,}01 - 0{,}00066 \approx 0{,}67474.$$

Так как $(\operatorname{arctg} x)^{(4)}|_{x=x_0} = 0$, $(\operatorname{arctg} x)^{(5)} = 24\cdot\frac{1 - 10x^2 + 5x^4}{(1+x^2)^5} < 12$ при $0{,}8 < x < 1$, то, согласно формуле остаточного члена в форме Лагранжа, получим оценку погрешности

$$|R_5(x)| < \frac{12}{5!}(0{,}2)^5 < 3{,}2\cdot 10^{-5}.$$

7.3. Обобщенная теорема о среднем. Докажем теорему, обобщающую теоремы Лагранжа, Коши и Тейлора, и назовем ее *обобщенной теоремой о среднем.*

Теорема. *Пусть:* 1) $f, g \in C^{(n)}]A, B[$, $a \in]A, B[$; 2) $\forall x \in]A, B[$ $\exists f^{(n+1)}(x) \wedge \exists g^{(n+1)}(x)$; 3) $g^{(n+1)}(x) \neq 0$ $\forall x \in]A, B[$.

Тогда $\forall x \in]A, B[$ *между точками* a *и* x *найдется по меньшей мере одна такая точка* ξ, *что*

$$\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)g^{(n+1)}(\xi) =$$

$$= \left(g(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)f^{(n+1)}(\xi). \qquad (1)$$

◀ Образуем функцию

$$\varphi\colon t \mapsto \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right) - \left(g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right)\lambda, \quad A < t < B,$$

где λ — числовой параметр, выбранный так, чтобы $\varphi(a) = 0$. Тогда, принимая во внимание равенство $\varphi(x) = 0$, к функции φ на сегменте $[a, x]$ (если $x > a$) или на сегменте $[x, a]$ (если $x < a$) можно применить теорему Ролля. Считая λ выбранным, получим равенство $\varphi'(\xi) = 0$. где ξ — точка, находящаяся между a и x. Так как

$$\varphi'(\xi) = \lambda \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n = 0,$$

то $\lambda = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}$, откуда, принимая во внимание, что $\varphi(a) = 0$, получим равенство

$$\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right) g^{(n+1)}(\xi) =$$

$$= \left(g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right) f^{(n+1)}(\xi). \ ▶$$

Если $n = 0$, $x = b$, $b \in]A, B[$, $g(x) = x - a$, f — произвольная функция то, согласно формуле (1), получим *формулу Лагранжа*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Если f, g — произвольные функции, удовлетворяющие условиям теоремы при $n = 0$, то, полагая в формуле (1) $x = b$, получим *формулу Коши*

$$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi).$$

Если в условии теоремы положить $g(x) = (x-a)^{n+1}$, то формула (1) примет вид

$$\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)(n+1)! = f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1},$$

т. е. это *формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.*

§ 8. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

8.1. Возрастание (убывание) функции в точке. В следствии 5 из теоремы § 5 сформулирован критерий строгой монотонности непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции f, имеющей на всем сегменте, за исключением некоторого счетного множества его точек, одностороннюю производную.

Рассмотрим определение возрастания (убывания) функции в точке.

Определение. *Функция* $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ *возрастает (убывает) в точке* x_0 *интервала* $\mathcal{J}$, *если существует такая окрестность* $S(x_0, \delta) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ *этой точки, что*

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[,$$
$$f(x) > f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0)) \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[.$$

Таким образом, согласно определению, функция f возрастает в точке x_0, если в некоторой левосторонней окрестности этой точки ее значения меньше $f(x_0)$, а в некоторой правосторонней окрестности они больше $f(x_0)$.

Теорема. *Для того чтобы функция* $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, *имеющая производную в точке* $x_0 \in \mathcal{J}$, *возрастала (убывала) в этой точке, достаточно, чтобы* $f'(x_0) > 0$ $(f'(x_0) < 0)$.

◀ Пусть, например, $f'(x_0) > 0$. Тогда $\exists\, \delta > 0$ такое, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[\text{ и}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \forall x \in]x, x_0 + \delta[,$$

т. е. $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$ и $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$. ▶

Отметим, что условие возрастания (убывания) функции f, $f'(x_0) \neq 0$, не является необходимым: функция $f : x \mapsto x^3$, $-1 < x < 1$, возрастает в точке $x = 0$, хотя $f'(0) = 0$.

Следствие. *Если функция* f *имеет в точке* $x_0 \in \mathcal{J}$ *отличную от нуля непрерывную производную, то* f *строго монотонна в некоторой окрестности этой точки.*

◀ Непрерывная в точке x_0 функция f' сохраняет знак числа $f'(x_0)$ в некоторой окрестности этой точки. ▶

Следует отметить, что понятие возрастания (убывания) функции в точке носит локальный характер: из того, что f возрастает (убывает) в фиксированной точке, не следует в общем случае, что f возрастает (убывает) в некоторой достаточно малой окрестности этой точки. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad -1 < x < 1,$$

имеет в точке $x = 0$ производную $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$, поэтому f возрастает в этой точке. Ее производная $f'(x) = \frac{1}{2} + 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ в любой ε-окрестности точки $x = 0$ принимает как положительные, так и отрицательные значения:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N}: \ \forall k > k_0 \Rightarrow x'_k \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \ x''_k \in]-\varepsilon, \varepsilon[,$$

$$x'_k = \frac{1}{2k\pi}, \ x''_k = \frac{1}{\pi + 2k\pi} \text{ и } f'(x'_k) = -\frac{1}{2}, \ f'(x''_k) = \frac{3}{2}.$$

Справедливо, однако, следующее утверждение, доказать которое предлагаем самостоятельно: *если функция f возрастает в каждой точке некоторого (конечного или бесконечного) интервала $\mathcal{J}$, то она возрастает на этом интервале.*

8.2. **Дифференциальные неравенства.** При исследовании функций с помощью производных, часто используется следующее утверждение.

Теорема. *Если функции* φ: $]a, b[\to \mathbb{R}$, $\psi :]a, b[\to \mathbb{R}$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) $\forall x > x_0 \ \exists \varphi^{(n)}(x) \wedge \exists \psi^{(n)}(x), \quad x_0 \in]a, b[$;

2) $\exists \varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0), \quad k = \overline{0, n-1}$;

3) $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x) \ \forall x > x_0$, то $\varphi(x) > \psi(x) \ \forall x > x_0$.

◀ Возьмем произвольное $x \in]x_0, b[$ и к сужению функции $u^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)} - \psi^{(n-1)}$ на сегмент $[x_0, x]$ применим теорему Лагранжа о конечных приращениях. Имеем $u^{(n-1)}(x) - u^{(n-1)}(x_0) = u^{(n)}(\xi)(x - x_0)$, откуда в силу условий 2), 3) получим неравенство $u^{(n-1)}(x) > 0$. Аналогично доказываем, что $u^{(n-2)}(x) > 0, \ldots, u(x) > 0$, т. е. $\varphi(x) > \psi(x) \quad \forall x > x_0$. ▶

Установим с помощью доказанной теоремы неравенства:

а) $e^x > 1 + x$ при $x \neq 0$; б) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$ при $x > 0$;

в) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ при $x > 0$; г) $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

а) Обозначив $\varphi(x) = e^x$, $\psi(x) = 1 + x$ и замечая, что $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi'(x) > \psi'(x)$ при $x > 0$, на основании утверждения теоремы заключаем, что $\varphi(x) > \psi(x) \ \forall x > 0$. Полагая $x = -t$ при $x \leqslant 0$, получим $\varphi(t) = e^{-t}$, $\psi(t) = 1 - t$, $t \geqslant 0$. Так как $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi'(t) > \psi'(t) \ \forall t > 0$, то

$$\varphi(t) > \psi(t) \ \forall t > 0, \text{ т. е. } e^x > 1 + x \quad \forall x < 0.$$

б) Обозначим $\varphi(x) = x - \frac{x^2}{2}$, $\psi(x) = \ln(1 + x)$, $\eta(x) = x$, $x \geqslant 0$. Очевидно, $\varphi(0) = \psi(0) = \eta(0) = 0$, $\varphi'(x) < \psi'(x) < \eta'(x) \quad \forall x > 0$, поэтому, применив теорему, получим неравенства $\varphi(x) < \psi(x) < \eta(x)$ $\forall x > 0$.

в) Вводя в рассмотрение функции φ, ψ и η, где $\varphi(x) = x - \frac{x^3}{6}$, $\psi(x) = \sin x$, $\eta(x) = x$, $x \geqslant 0$, имеем $\varphi(0) = \psi(0) = \eta(0) = 0$, $\varphi'(x) < \psi'(x) < \eta'(x) \ \forall x > 0$, $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Используя доказанную теорему, получим неравенства $\varphi(x) < \varphi(x) < \eta(x) \quad \forall x > 0, \quad x \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{N}$. При $x = 2k\pi$ справедливы неравенства $2k\pi\left(1 - \frac{4k^2\pi^2}{6}\right) < 0 < 2k\pi$, т. е. $\varphi(2k\pi) < \psi(2k\pi) < \eta(2k\pi)$. Таким образом, $\varphi(x) < \psi(x) < \eta(x)$ $\forall x > 0$.

г) Обозначим $\varphi(x) = \operatorname{tg}(x)$, $\psi(x) = x + \frac{x^3}{3}$, $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$. Очевидно, $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi'(x) > \psi'(x)$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (так как $\varphi'(x) = 1 +$

$+ \operatorname{tg}^2 x$, $\psi'(x) = 1 + x^2$, $\operatorname{tg}^2 x > x^2$ $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Тогда, используя теорему о дифференциальных неравенствах, получим неравенство

$$\varphi(x) > \psi(x) \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

8.3. Достаточные условия локального экстремума функции. В § 3 даны определения локальных экстремумов функции, а теорема Ферма устанавливает необходимое условие локального экстремума функции f в точке, в которой существует ее производная f'.

Таким образом, для отыскания точек, в которых функция, возможно, имеет экстремум, необходимо решить уравнение $f'(x) = 0$, все решения которого называют *стационарными точками*. К числу возможных экстремальных точек следует отнести и те, в которых f' не существует (например, функция $f: x \mapsto |x|$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, имеет локальный минимум в точке $x = 0$, в которой она недифференцируема). Поскольку не в каждой точке возможного экстремума функция f его имеет, то требуется установить достаточные условия локального экстремума.

Определение. *Функция $\varphi: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ меняет знак при переходе через точку $x_0 \in \mathcal{J}$, если существует такая окрестность $S(x_0, \delta) \subset \mathcal{J}$, что на каждом из интервалов $]x_0 - \delta[\subset S(x_0, \delta)$ и $]x_0, x_0 + \delta[\subset S(x_0, \delta)$ функция φ принимает значения разных знаков.*

Теорема 1 (первое достаточное условие экстремума). *Пусть $f: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ — непрерывная на интервале $\mathcal{J}$ функция, причем f' существует в каждой точке x из некоторой окрестности $S(x_0, \delta) \subset \mathcal{J}$, за исключением, может быть, лишь самой точки x_0. Если при переходе через точку x_0 производная f' меняет знак, то в этой точке функция f имеет локальный экстремум.*

◀ Пусть, например, f' при переходе через точку x_0 меняет знак с «+» на «—», т. е. $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_1 =]x_0 - \delta, x_0[$, и $f'(x) < 0$ $\forall x \in \mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_2 =]x_0, x_0 + \delta[$. По формуле конечных приращений (1), § 3, имеем $f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta_1(x - x_0))(x - x_0) < 0$ $\forall x \in \mathcal{J}_1$ и $f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta_2(x - x_0))(x - x_0) < 0$ $\forall x \in \mathcal{J}_2$, $0 < \theta_j < 1$, $j = 1, 2$; следовательно, $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in S(x_0, \delta) \wedge x \neq x_0$ и, согласно определению, функция f имеет локальный максимум в точке x_0. Если же при переходе через точку x_0 производная f' меняет знак с «—» на «+», то $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in S(x_0, \delta) \wedge x \neq x_0$; следовательно, f имеет локальный минимум в точке x_0. ▶

Теорема 2 (второе достаточное условие экстремума). *Если функция $f: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет в точке $x_0 \in \mathcal{J}$ условиям:*

$$1) \quad \exists\, f''(x_0) \neq 0; \quad 2) \quad f'(x_0) = 0,$$

то f имеет локальный экстремум в точке x_0.

◀ Пусть, для определенности, $f''(x_0) > 0$; тогда функция f', определенная в некоторой окрестности $S(x_0, \delta)$, возрастает в точке x_0: $\exists\, S(x_0, \delta_1) \subset S(x_0, \delta)$ такая, что $f'(x) < f'(x_0) = 0$ $\forall x \in]x_0 - \delta_1, x_0[$ и $f'(x) > f(x_0) = 0$ $\forall x \in]x_0, x_0 + \delta_1[$, т. е. f' меняет знак с «—»,

на «+» при переходе через точку x_0. Согласно теореме 1, функция f имеет минимум в точке x_0. Если $f''(x_0) < 0$ то f достигает локального максимума при $x = x_0$. ▶

Теорема 3 (третье достаточное условие экстремума). *Пусть функция* $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$1)\ \exists f^{(k)}(x_0) = 0,\quad x_0 \in \mathcal{J},\quad k = \overline{1,\ n-1};\quad 2)\ \exists f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда при n *четном* f *имеет экстремум в точке* x_0 *(максимум, если* $f^{(n)}(x_0) < 0$; *минимум, если* $f^{(n)}(x_0) > 0$), *а при* n *нечетном экстремума не имеет (в этом случае* f *убывает или возрастает в точке* x_0).

◀ Предполагая выполненными все условия теоремы, представим приращение функции f в точке x_0 с помощью формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} = 0$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\forall x \in S(x_0, \delta) \Rightarrow$ $\Rightarrow \left| \dfrac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} \right| < \varepsilon$, т. е. $\alpha(x, x_0) = \dfrac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}$ является бесконечно малой функцией при $x \to x_0$. Таким образом, $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = \left(\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x, x_0)\right)(x - x_0)^n$ и при этом можно сказать, что $\forall x \in S(x_0, \delta)$ выражение $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x, x_0)$ имеет тот же знак, что и число $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \neq 0$ (так как α — бесконечно малая функция при $x \to x_0$). Принимая во внимание, что в случае четного n имеем $(x - x_0)^n > 0$ $\forall x \in S(x_0, \delta)$, приходим к заключению, что знак приращения $\Delta f(x_0)$ совпадает со знаком числа $f^{(n)}(x_0)$, а значит, функция f имеет локальный максимум при $x = x_0$, если $f^n(x_0) < 0$ и локальный минимум в этой точке, если $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Если же n нечетное число, то выражение $(x - x_0)^n$, а вместе с ним и приращение функции f в точке x_0, меняет знак при переходе через нее, т. е. f возрастает в точке x_0, если $f^{(n)}(x_0) > 0$ и убывает, если $f^n(x_0) < 0$. ▶

Замечание 1. Исходя из определения локальных экстремумов, можно прийти к заключению, что если функция f имеет максимум в точке x_0, то существует такая достаточно малая окрестность $S(x_0, \delta)$, что f возрастает на интервале $]x_0 - \delta, x_0[$ и убывает на интервале $]x_0, x_0 + \delta[$.

Рассмотрим пример, который показывает ошибочность такого заключения в общем случае. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 2, & \text{если } x = 0, \end{cases} \qquad -1 < x < 1.$$

Функция f непрерывна на интервале $]-1, 1[$, а ее приращение $\Delta f(0)$ отрицательно, так как $f(x) - f(0) = -x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) < 0 \quad \forall\, x \in\,]-1, 1[\setminus \{0\}$, следовательно, $\exists\, f_{\max} = f(0) = 2$. Вычислим $f'(x) \quad \forall\, x \in [-1, 1[\setminus \{0\}$:

$$f'(x) = -2x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) + \cos\frac{1}{x}$$

и рассмотрим значения f' в произвольном интервале $]-\delta, 0[\cap\,]-1, 1[$ при произвольных достаточно малых $\delta > 0$. Тогда $\exists\, k \in \mathbb{Z}$: $x_k \in\,]-\delta, 0[$, $x_k = \frac{1}{\pi + 2k\pi}$, $f'(x_k) = -1 - \frac{4}{\pi + 2k\pi} < 0$ и функция f не может возрастать ни в какой левосторонней окрестности точки $x_0 = 0$. Аналогично можно показать, что функция f не убывает ни в какой правосторонней окрестности этой точки.

Замечание 2. Покажем, что условия теоремы 3 не являются необходимыми, а лишь достаточны.

Рассмотрим на множестве $\mathbb{R}$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Ее приращение $\Delta f(0) = e^{-\frac{1}{x^2}} > 0$; следовательно, функция f имеет локальный минимум в точке $x = 0$: $f_{\min} = f(0) = 0$. Покажем, что f бесконечно дифференцируема при $x = 0$ и $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Поскольку $\exists \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{e^t} = \frac{1}{2} \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}} e^t} = 0$, то f дифференцируема при $x = 0$ и $f'(0) = 0$. При $x \neq 0$ последовательно дифференцируя f, находим

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \ldots, \quad f^{(k)}(x) = Q_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}},$$

где $Q_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)$ — многочлен степени $3k$ относительно $\frac{1}{x}$. Рассмотрим предел отношения $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m} \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$ при $x \to 0$. Обозначив $\frac{1}{x^2} = t$, получим $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m} = \frac{t^{\frac{m}{2}}}{e^t}$ ($t \to +\infty$ при $x \to 0$). Каким бы ни было $m \in \mathbb{N}$, $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при $k \geqslant k_0$ выполняется неравенство $\frac{m}{2} - k < 0$. Таким образом, применив правило Лопиталя k раз, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{\frac{m}{2}}}{e^t} = 0.$$

Любой многочлен $Q_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$ представляет собой линейную комбинацию степеней вида $\frac{1}{x^m}$, $m = 3, 4, \ldots, 3n$; следовательно, по доказанному $\lim\limits_{x\to 0} Q_{3n}\left(\frac{1}{x}\right) \times$ $\times e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$. Предположим теперь, что $\exists\, f^{(n-1)}(0) = 0$. Тогда, согласно определению,

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} Q_{3n-2}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

С помощью метода математической индукции показали, что f бесконечно дифференцируема при $x = 0$ и все ее производные равны нулю. Однако f имеет экстремум при $x = 0$. Таким образом, существуют функции, имеющие экстремум в точках, в которых все производные этих функций равны нулю.

8.4. Краевые экстремумы функции.

Определение. *Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ имеет в точке a краевой максимум (краевой минимум), если существует правосторонняя окрестность $S^+(a, \delta) =]a, a + \delta[$ точки a такая, что*

$$f(x) < f(a) \quad (f(x) > f(a)) \qquad \forall\, x \in S^+(a, \delta).$$

Аналогично определяются краевые экстремумы в точке b: *функция f имеет в точке b краевой максимум (краевой минимум), если существует левосторонняя окрестность $S^-(b, \delta) =]b - \delta, b[$ точки b такая, что*

$$f(x) < f(b) \quad (f(x) > f(b)) \qquad \forall\, x \in S^-(b, \delta).$$

Рассмотрим случай, когда существуют $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$.

Теорема. *Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ имеет производные $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$ и $f'_+(a) > 0$ ($f'_+(a) < 0$), то f достигает в точке a краевого минимума (краевого максимума); если $f'_-(b) > 0$ ($f'_-(b) < 0$), то f имеет в точке b краевой максимум (краевой минимум).*

◀ Пусть, например, $f'_+(a) > 0$. Тогда существует такая правосторонняя окрестность $S^+(a, \delta)$ точки a, что $\forall\, x \in S^+(a, \delta)$ выполнено неравенство $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$. Так как $x - a > 0$, то $f(x) > f(a)$ $\forall\, x \in S^+(a, \delta)$, т. е. функция f достигает в точке a краевого минимума. Остальные случаи доказываются аналогично. ▶

8.5. Абсолютные экстремумы функции.

Определение. *Абсолютным, или глобальным, максимумом (глобальным минимумом) функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C[a, b]$, называется ее наибольшее (наименьшее) значение на сегменте $[a, b]$.*

Заметим, что для функции $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ это определение может оказаться некорректным, так как непрерывная на интервале функция может не достигать своих точных граней, будучи при этом ограниченной.

Из того, что $f \in C[a, b]$ следует, согласно теореме Вейерштрасса, что на сегменте $[a, b]$ найдутся по меньшей мере две точки x_1 и x_2, что $f(x_1) = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \{f(x)\}$, $f(x_2) = \inf\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \{f(x)\}$. Эти точки могут оказаться точками локальных, или краевых экстремумов. Поэтому вопрос исследования функции на абсолютные экстремумы сводится к исследованию ее на локальные и краевые экстремумы и выбору из полученного множества экстремумов наибольшего и наименьшего из них. Рассмотрим случай, когда f имеет на $]a, b[$ локальные экстремумы и когда их конечное число. Исследование в рассматриваемом случае можно производить по следующей схеме:

1) определить множество $X = \{x\} \subset]a, b[$ всех стационарных точек функции f и тех точек, в которых f' не существует (критических точек);

2) вычислить значения f в каждой точке множества X и в точках a и b;

3) из множества $\{f(x), x \in X; f(a), f(b)\}$ выбрать наибольший и наименьший элементы, которые и будут абсолютными экстремумами f на $[a, b]$.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f : x \mapsto |x^2 - 3x + 2|$ на сегменте $[-10, 10]$.

Находим производную

$$f'(x) = (2x - 3)\operatorname{sgn}(x^2 - 3x + 2), \quad x \neq 1, \quad x \neq 2.$$

Точками возможного экстремума являются $x_1 = \frac{3}{2}$ (стационарная точка), $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ (критические точки).

Рассмотрим множество $\{f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(-10), f(10)\} = \left\{\frac{1}{4}, 0, 0, 132, 72\right\}$ и выберем в нем наибольший и наименьший элементы

$$\max_{-10 \leqslant x \leqslant 10} f(x) = 132, \qquad \min_{-10 \leqslant x \leqslant 10} f(x) = 0.$$

Пример 2. Доказать неравенство $|a \sin x + b \cos x| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Рассмотрим функцию $f : x \mapsto |a \sin x + b \cos x|$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Ее производная $f'(x) = (a \cos x - b \sin x) \operatorname{sgn}(a \sin x + b \cos x)$ не существует в тех точках, где $\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$, т. е. $b \cos x + a \sin x = 0$, и обращается в нуль в точках, где $\operatorname{tg} x = \frac{a}{b}$, т. е. $b \sin x = a \cos x$. Подставляя в выражение $f(x) = |a \sin x + b \cos x| = \sqrt{a^2 \sin^2 x + 2ab \sin x \cos x + b^2 \cos^2 x}$ значение $2ab \sin x \cos x = a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x$, найденное из уравнения $b \sin x = a \cos x$, получим $f(x) \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$.

Замечание 1. Обращаем еще раз внимание на то, что во всех рассуждениях, проводившихся в этом пункте, существенную роль играло условие задания функции f на конечном сегменте $[a, b]$. В случае, когда область определения функции — интервал (конечный или бесконечный), эти рассуждения в общем случае теряют силу, так как на интервале функция может не достигать абсолютных экстремумов. Например, функция $f : x \mapsto \left(1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$ на интервале $]0, +\infty[$ не достигает своих точных граней

$$\inf_{0 < x < +\infty} \{f(x)\} = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0, \qquad \sup_{0 < x < +\infty} \{f(x)\} = \lim_{x \to +0} f(x) = 1.$$

Замечание 2. При исследовании функции на локальные экстремумы можно использовать часть приведенной выше схемы для отыскания абсолютных экстремумов: выполнить указанное в 1), а затем рассмотреть все попарно соседние интервалы $]x_{s-1}, x_s[$ и $]x_s, x_{s+1}[$, концы которых есть стационарные точки или точки, в которых производная f' не существует, и найти значения f' в произвольной точке каждого интервала: по теореме Дарбу на каждом таком интервале f' сохраняет определенный знак, поэтому найденное значение f' в произвольной точке такого интервала имеет знак производной на всем интервале. Если f' имеет разные знаки на интервалах $]x_{s-1}, x_s[$ и $]x_s, x_{s+1}[$, то точка x_s— экстремальная, если же знаки одинаковые, то в точке x_s экстремума нет.

Рассмотрим некоторые задачи, которые успешно решаются с помощью теории максимумов и минимумов.

1. Определение количества действительных корней уравнения $f(x) = 0$, $x \in X$, $f \in C(X)$ и их границ.

Допустим, что удалось записать уравнение, эквивалентное исходному, в виде $\varphi(x) = \alpha$, $x \in X$, где α — вполне определенное число, $\alpha \in \mathbb{R}$. Исследуя функцию φ на экстремумы, можно судить о количестве точек пересечения графика функции φ и прямой $\psi(x) = \alpha$, а также определить границы абсцисс точек пересечения. Например, пусть требуется определить количество действительных корней уравнения $\ln x = kx$ и указать интервалы, которым эти корни принадлежат.

Запишем исходное уравнение в виде $y_1(x) = y_2(x)$, где $y_1(x) = \frac{\ln x}{x}$, $y_2(x) = k$, $x > 0$. Поскольку $\lim\limits_{x \to +\infty} y_1(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +0} y_1(x) = -\infty$, $y'(e) = 0$, то $y_1(x)$ в интервале $]0, +\infty[$ принимает наибольшее значение в точке $x = e$, равное $\frac{1}{e}$. Кроме того, $y(1) = 0$. Если $k > \frac{1}{e}$, то графики функций y_1 и y_2 не пересекаются, и уравнение действительных корней не имеет. Если $0 < k < \frac{1}{e}$, то уравнение имеет два действительных корня α_1, α_2 $(1 < \alpha_1 < e,\ e < \alpha_2 < +\infty)$. Если $k < 0$, то уравнение имеет один действительный корень β_1 $(0 < \beta_1 < 1)$.

2. Решение задач с условием. Пусть, например, требуется узнать, какой сектор следует вырезать из круга радиуса r, чтобы из оставшейся части можно было свернуть воронку наибольшей вместимости?

Если под α понимать центральный угол оставшегося сектора, то объем конуса $V = \frac{r^3\alpha^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$.

Исследование на экстремум функции $\alpha \mapsto V(\alpha)$ показывает, что она достигает максимума при $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

8.6. Выпуклые функции.

Определение 1. *Функция* $f: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ *называется выпуклой на интервале* $\mathcal{J}$, *если* $\forall x' \in \mathcal{J}$ *функция* $\varphi: x \mapsto \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$, $x \in \mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J} \setminus \{x'\}$, *неубывающая:* $\varphi(x_2, x') \geqslant \varphi(x_1, x')$ $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{J}_1$, $x_1 < x_2$.

Из данного определения следует, что условие выпуклости функции f на $\mathcal{J}$ можно записать в виде неравенства

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \qquad (1)$$
$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{J}, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

◀ Для доказательства рассмотрим три возможных случая:
1) $x_2 > x' \wedge x_1 > x'$; 2) $x_2 > x' \wedge x_1 < x'$; 3) $x_1 < x' \wedge x_2 < x'$.

В случае 1) обозначим $\lambda = \frac{x_1 - x'}{x_2 - x'}$. Тогда $0 < \lambda < 1$, $x_1 = \lambda x_2 + (1-\lambda)x'$ и условие $\varphi(x_2, x') \geqslant \varphi(x_1, x')$ принимает вид

$$\frac{f(x_2) - f(x')}{x_2 - x'} \geqslant \frac{f(\lambda x_2 + (1-\lambda)x') - f(x')}{\lambda(x_2 - x')},$$

откуда получим неравенство

$$f(\lambda x_2 + (1-\lambda)x') \leqslant \lambda f(x_2) + (1-\lambda) f(x'). \qquad (2)$$

В случае 2) обозначим $\lambda = \frac{x' - x_1}{x_2 - x_1}$. Тогда $0 < \lambda < 1$, $x' = \lambda x_2 + x_1(1-\lambda)$ и условие $\varphi(x_2, x') \geqslant \varphi(x_1, x')$ записывается в виде

$$\frac{f(x_2) - f(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1)}{(1-\lambda)(x_2 - x_1)} \geqslant \frac{f(x_1) - f(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1)}{\lambda(x_1 - x_2)},$$

откуда следует неравенство

$$f(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1) \leqslant \lambda f(x_2) + (1-\lambda) f(x_1) \qquad (3)$$

(здесь принято во внимание, что $x_1 - x_2 < 0$).

В случае 3) обозначим $\lambda = \frac{x' - x_2}{x' - x_1}$. Тогда $0 < \lambda < 1$, $x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x'$ и условие $\varphi(x_2, x') \geqslant \varphi(x_1, x')$ принимает вид

$$\frac{f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x') - f(x')}{\lambda(x_1 - x')} \geqslant \frac{f(x_1) - f(x')}{\lambda(x_1 - x')}.$$

Принимая во внимание, что $x_1 - x' < 0$, получаем неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x') \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x'). \qquad (4)$$

В каждом из рассмотренных случаев в доказанных неравенствах (1), (2), (3) участвует пара произвольных точек x_2 и x' ($x_2 > x'$), x_2 и x_1 ($x_2 > x_1$), x_1 и x' ($x_1 < x'$). Все эти неравенства справедливы и для случаев $x_2 < x'$, $x_2 < x_1$, $x' < x_1$, поскольку число $\lambda_1 = 1 - \lambda$ удовлетворяет условию $\lambda_1 \in [0, 1]$, а неравенства (2), (3), (4) могут быть записаны соответственно в виде

$$f(\lambda_1 x' + (1-\lambda_1)x_2) \leqslant \lambda_1 f(x') + (1-\lambda_1) f(x_2), \qquad (2')$$
$$f(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f(x_2), \qquad (3')$$
$$f(\lambda_1 x' + (1-\lambda_1)x_1) \leqslant \lambda_1 f(x') + (1-\lambda_1) f(x_1), \qquad (4')$$

поэтому они справедливы для любой пары точек из интервала $\mathcal{J}$. ▶

Если $\lambda = 1$, то неравенство (1) превращается в равенство. Из приведенного выше доказательства также следует, что всякая функция f, удовлетворяющая неравенству (1), выпукла на интервале $\mathcal{J}$. Следовательно, определение 1 и неравенство (1) эквивалентны.

Рассмотрим для примера функцию $x \mapsto x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Она выпукла на $\mathbb{R}$, так как $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $\forall \lambda \in [0, 1]$ имеем

$$\lambda x_1^2 + (1-\lambda) x_2^2 - (\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)^2 = \lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2)^2 \geqslant 0.$$

Вместе с тем $\varphi(x, x') = \dfrac{x^2 - (x')^2}{x - x'} = x + x'$, $x \neq x'$, и

$$\varphi(x_2, x') \geqslant \varphi(x_1, x') \qquad \forall\, x_2 \geqslant x_1.$$

Определение 2. *Если в определении 1 функция φ возрастает на интервале $\mathcal{J}$, то функция f называется строго выпуклой на $\mathcal{J}$.*

Из этого определения и рассмотренного выше примера следует, что функция $x \mapsto x^2$, $x \in \mathbb{R}$ строго выпукла на $\mathbb{R}$. Условие строгой выпуклости f на $\mathcal{J}$ можно определить в виде неравенства

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \tag{5}$$
$$\forall\, x_1, x_2 \in \mathcal{J}, \quad \forall\, \lambda \in]0, 1[.$$

Неравенство Иенсена. *Пусть функция $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ выпукла (строго выпукла) на интервале $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$. Тогда для любой совокупности x_i, $i = \overline{1, n}$, $n > 2$, различных точек из $\mathcal{J}$ и любой совокупности λ_i, $i = \overline{1, n}$, таких n действительных чисел, что $0 < \lambda_i < 1$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, выполняется неравенство*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \tag{6}$$

$\left(\text{соответственно } f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) < \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_i)\right)$.

◀ Для доказательства применим метод математической индукции. При $n = 2$ неравенства следуют из определения выпуклой (строго выпуклой) функции. Пусть функция f выпукла на интервале $\mathcal{J}$ и при этом

$$f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i f(x_i) \qquad \forall\, x_i \in \mathcal{J}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad 0 < \gamma_i < 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i = 1.$$

Тогда для произвольных $0 < \lambda_i < 1$, $i = \overline{1, n}$, таких, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ имеем: $\mu = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i > 0$, а точка $x = \dfrac{1}{\mu} \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i$ принадлежит интервалу $\mathcal{J}$. В силу предположения индукции имеем

$$\mu f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu} x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(x_i).$$

Кроме того, поскольку функция f выпукла, то

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)=f(\mu x+(1-\mu)x_n)\leqslant \mu f(x)+(1-\mu)f(x_n)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\ \text{(так как } 1-\mu=\lambda_n\text{)}. \blacktriangleright$$

Определение 3. *Функция f вогнута (строго вогнута) на интервале $\mathcal{J}$, если функция $-f$ выпукла (строго выпукла) на $\mathcal{J}$, или, что сводится к тому же, если $\forall\, x_1, x_2\in\mathcal{J}$ и $\forall\,\lambda\in[0,\ 1]$ выполняется неравенство*

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \tag{7}$$

(соответственно $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)>\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\ \forall\,\lambda\in]0,1[$).

Рассмотрим теперь множества выпуклых функций.

Теорема 1. *Пусть функции $f_i:\mathcal{J}\to\mathbb{R}$, $i=\overline{1,\ n}$, выпуклы на интервале $\mathcal{J}\subset\mathbb{R}$, а c_i, $i=\overline{1,\ n}$, — произвольные положительные числа. Тогда функция $f=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i f_i$ выпукла на $\mathcal{J}$. Если при этом хотя бы одна функция f_i строго выпукла на $\mathcal{J}$, то f строго выпукла на $\mathcal{J}$.*

◀ Согласно неравенству (1), для каждой функции f_i, $i=\overline{1,\ n}$, и $\forall x_1,\ x_2\in\mathcal{J}$, $\forall\lambda\in[0,\ 1]$ выполнено неравенство

$$c_i f_i(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant c_i(\lambda f_i(x_1)+(1-\lambda)f_i(x_2)).$$

Суммируя эти неравенства по всем i от 1 до n, получим неравенство

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

из которого следует выпуклость функции f.

Если хотя бы одна из функций строго выпукла, то в результате суммирования по всем i получим строгое неравенство

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2). \blacktriangleright$$

Теорема 2. *Пусть $\{f_n:\mathcal{J}\to\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}\}$ — последовательность выпуклых на интервале $\mathcal{J}$ функций, сходящаяся к функции $f:\mathcal{J}\to\mathbb{R}$. Тогда функция f выпукла на интервале $\mathcal{J}$.*

◀ Из условия $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, $x\in\mathcal{J}$, и неравенств

$$f_n(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f_n(x_1)+(1-\lambda)f_n(x_2),$$

справедливых $\forall x_1,\ x_2\in\mathcal{J}$ и $\forall\lambda\in[0,\ 1]$, получим

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=\lim_{n\to\infty}f_n(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda\lim_{n\to\infty}f_n(x_1)+$$

$$+(1-\lambda)\lim_{n\to\infty}f_n(x_2)=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

Итак, функция f выпукла на интервале $\mathcal{J}$. ▶

Следующие две теоремы устанавливают два важных свойства выпуклых функций.

Теорема 3. *Ограниченная на интервале $\mathcal{J}$ выпуклая функция f непрерывна в каждой точке $x \in \mathcal{J}$ и имеет конечную правую и конечную левую производные, причем* $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$.

◀ Пусть x_0 — произвольная точка интервала $\mathcal{J}$. Тогда при $x > x_0$ функция $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ не убывает (определение 1) и ограничена снизу, так как $\forall y < x_0$, справедливо неравенство

$$\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{8}$$

Поэтому существует конечный предел

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0). \tag{9}$$

Переходя к пределу при $x \to x_0 + 0$ в правой части неравенства (8), получим неравенство

$$\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \leqslant f'_+(x_0), \tag{10}$$

справедливое также $\forall y < x_0$, $y \in \mathcal{J}$.

Из неравенства (10) следует, что существует конечный предел при $y \to x_0 - 0$ его левой части, т. е. $\exists f'_-(x_0)$, причем $f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0)$.

Существование конечных производных $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ означает, что функция f непрерывна в любой внутренней точке $x_0 \in \mathcal{J}$. ▶

Теорема 4. *Если функция $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема на интервале $\mathcal{J}$, причем $f''(x) \geqslant 0$ ($f''(x) \leqslant 0$) $\forall x \in \mathcal{J}$, то f выпукла (вогнута) на $\mathcal{J}$.*

◀ Пусть некоторая функция g выпукла на $\mathcal{J}$. Тогда, по определению, функция $\psi : x \mapsto \dfrac{g(x) - g(x')}{x - x'}$, $x \in \mathcal{J} \setminus \{x'\}$, неубывающая. Пусть x_1, x_2, x_3 — произвольные точки из интервала $\mathcal{J}$. Тогда разность $\psi(x_1, x_3) - \psi(x_2, x_3)$ либо обращается в нуль, либо имеет тот же знак, что и разность $x_1 - x_2$, т. е. справедливо неравенство

$$\frac{\psi(x_1, x_3) - \psi(x_2, x_3)}{x_1 - x_2} \geqslant 0. \tag{11}$$

Если в неравенство (11) вместо $\psi(x_1, x_3)$ и $\psi(x_2, x_3)$ подставить их выражения через значения функции g и привести дроби к общему знаменателю, то получим неравенство

$$\frac{x_1(g(x_2) - g(x_3)) + x_2(g(x_3) - g(x_1)) + x_3(g(x_1) - g(x_2))}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_4)(x_3 - x_1)} \geqslant 0, \tag{12}$$

которое также можно принять в качестве определения выпуклой на интервале $\mathcal{J}$ функции.

Пусть f — произвольная, дважды дифференцируемая на $\mathcal{J}$ функция, а x_1, x_2, x_3 — три различных фиксированных точки из $\mathcal{J}$. Рассмотрим для f левую часть неравенства (12), которая будет некоторым постоянным числом c:

$$\frac{x_1(f(x_2) - f(x_3)) + x_2(f(x_3) - f(x_1)) + x_3(f(x_1) - f(x_2))}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)} = c. \tag{13}$$

Рассмотрим на интервале $\mathcal{J}$ функцию

$$F: x \mapsto x(f(x_2) - f(x_3)) + x_2(f(x_3) - f(x)) + x_3(f(x) - f(x_2)) - \\ - c(x - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x),$$

где c — постоянное число из (13). Так как $F(x_1) = F(x_2) = F(x_3) = 0$, то, согласно теореме Ролля, по меньшей мере в двух точках ξ_1 и ξ_2, лежащих между точками x_1, x_2, x_3, производная F' обращается в нуль, а так как функция F дважды дифференцируема на $\mathcal{J}$, то в силу той же теоремы Ролля, по меньшей мере в одной точке ξ, лежащей между ξ_1 и ξ_2, F'' обращается в нуль:

$$F''(\xi) = (x_3 - x_2) f''(\xi) + 2c(x_2 - x_3) = 0. \tag{14}$$

Из равенства (14) находим

$$c = \frac{1}{2} f''(\xi). \tag{15}$$

Если $f''(x) \geqslant 0$ $\forall x \in \mathcal{J}$, то $f''(\xi) \geqslant 0$ и из равенства (15) следует, что функция f выпукла на интервале $\mathcal{J}$. ▶

Доказанная теорема имеет следующее геометрическое истолкование: *если $f: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ — дважды дифференцируемая на интервале $\mathcal{J}$ функция, причем $f''(x) \geqslant 0$ $\forall x \in \mathcal{J}$, то график G функции f в пределах интервала $\mathcal{J}$ лежит не ниже касательной к нему в точке $M_0 = (x_0, f(x_0))$ $\forall x_0 \in \mathcal{J}$.*

Действительно, при выполнении условий теоремы уравнение касательной к графику G в точке M_0 имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{16}$$

По формуле Тейлора $\forall x \in S(x_0, \delta)$, где $S(x_0, \delta)$ — некоторая окрестность точки x_0, имеем

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2, \quad \xi \in S(x_0, \delta). \tag{17}$$

Вычитая левые и правые части равенств (16) и (17) и принимая во внимание неравенство $f''(x) \geqslant 0$ $\forall x \in \mathcal{J}$, получим неравенство

$$f(x) - y = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 \geqslant 0,$$

из которого следует, что график G функции f в пределах интервала $\mathcal{J}$ лежит не ниже касательной к нему в точке M_0.

Теорема 4 устанавливает достаточное условие выпуклости дважды дифференцируемой на интервале $\mathcal{J}$ функции f.

Докажем теперь, что неравенство $f''(x) \geqslant 0$ $\forall x \in \mathcal{J}$ является также необходимым условием выпуклости любой дважды дифференцируемой на интервале $\mathcal{J}$ функции.

Теорема 5. *Для того чтобы дважды дифференцируемая на интервале $\mathcal{J}$ функция f была выпукла на нем, необходимо, чтобы $f''(x) \geqslant 0$ $\forall x \in \mathcal{J}$.*

◀ Пусть функция $f: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ выпукла на интервале $\mathcal{J}$ и дважды дифференцируема на нем; x_1, x_2— произвольные точки из интервала $\mathcal{J}$, причем $x_1 < x_2$.

Так как функция f выпукла на интервале $\mathcal{J}$, то, согласно определению 1, имеем

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \qquad \forall x \in]x_1,\ x_2[.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $x \to x_1$, имеем

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}. \tag{18}$$

Если $x > x_2$, то из определения 1 получим неравенство

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2},$$

переходя к пределу в котором при $x \to x_2$, получим неравенство

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant f'(x_2). \tag{19}$$

Сопоставляя неравенства (18) и (19), получим неравенство

$$f'(x_2) \geqslant f'(x_1) \qquad \forall x_1,\ x_2 \in \mathcal{J},\quad x_1 < x_2, \tag{20}$$

из которого следует, что производная f' выпуклой дважды дифференцируемой на интервале $\mathcal{J}$ функции f не убывает на $\mathcal{J}$. Так как f' — непрерывная на $\mathcal{J}$ функция, имеющая производную $\forall x \in \mathcal{J}$, то для неубывания f' необходимо, чтобы $f''(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathcal{J}$. ▶

Сформулируем критерий выпуклости функции $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$.

Теорема 6. *Для того чтобы дважды дифференцируемая на интервале $\mathcal{J}$ функция f была выпуклой на $\mathcal{J}$, необходимо и достаточно, чтобы ее производная f' не убывала на $\mathcal{J}$, т. е. чтобы $f''(x) \geqslant 0 \ \forall x \in \mathcal{J}$.*

Теорема является следствием теорем 4 и 5.

Определение 4. *Если график G функции $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ имеет касательную в точке $C = (c, f(c))$, $c \in \mathcal{J}$, а при переходе через точку c функция f меняет выпуклость на вогнутость (или вогнутость на выпуклость), то точка C называется точкой перегиба графика G.*

Теорема 7 (необходимое условие точки перегиба). *Пусть функция f дифференцируема на интервале $\mathcal{J}$ и $\exists f''(c)$, $c \in \mathcal{J}$. Для того чтобы точка $C = (c, f(c))$ была точкой перегиба графика G функции f, необходимо, чтобы $f''(c) = 0$.*

◀ Если C — точка перегиба графика G, то согласно определению 4 и теореме 5 существует такое $\delta > 0$, что на интервалах $]c-\delta, c[$ и $]c, c+\delta[$ производная f' монотонна, причем характер монотонности различный. Поэтому производная f' имеет экстремум в точке c и $f''(c) = 0$. ▶

Итак, для отыскания возможных точек перегиба графика функции f следует на $\mathcal{J}$ решить уравнение $f''(x) = 0$.

Заметим, что к числу возможных точек перегиба следует отнести и те точки $(c, f(c))$, в которых касательная к графику G параллельна оси Oy (для каждого такого c не существует $f''(c) \in \mathbb{R}$ и такую точку назовем *критической точкой* производной f').

Теорема 8 (первое достаточное условие точки перегиба). *Пусть $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ имеет вторую производную f'' в*

$S(c, \delta) \subset \mathcal{J}$, *за исключением, быть может, лишь самой точки* c, *а график* G *функции* f *имеет касательную в точке* $C = (c, f(c))$. *Если при переходе через точку* c *вторая производная* f'' *меняет знак, то точка* C *является точкой перегиба графика* G.

◀ Из условия теоремы следует, что в некоторых пределах окрестности $S(c, \delta)$ слева от точки c и справа от нее f'' имеет разные знаки, в силу чего, согласно теореме 2, при переходе через точку c функция f меняет выпуклость на вогнутость (или наоборот), а тогда, согласно определению 4, точка C является точкой перегиба графика G. ▶

Теорема 9 (второе достаточное условие точки перегиба). *Если* f''' *в точке* $c \in \mathcal{J}$ *существует, причем* $f'''(c) \neq 0$, $f''(c) = 0$, *то точка* $C = (c, f(c))$ *является точкой перегиба графика* G.

◀ Пусть, для определенности, $f'''(c) > 0$. Тогда f'' возрастает в точке c: $\exists S(c, \delta)$, причем $f''(x) < f''(c) = 0 \quad \forall x \in]c - \delta, c[$ и $f''(x) > f''(c) = 0 \quad \forall x \in]c, c + \delta[$ поэтому, согласно теореме 8, точка C есть точкой перегиба графика G. ▶

Теорема 10 (третье достаточное условие точки перегиба). *Пусть для функции* $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ *в точке* $c \in \mathcal{J}$ *выполнены условия:* $f''(c) = f'''(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$, $f^{(n)}(c) \neq 0$. *Тогда при нечетном* n *точка* $C = (c, f(c))$ *— точка перегиба графика* G *функции* f, *а при четном* n *точка* C *не является точкой перегиба графика функции.*

◀ Разлагая f'' в окрестности точки c по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, имеем

$$f''(x) = \frac{f^{(n)}(c) + \alpha(x)}{(n-2)!}(x - c)^{n-2}, \quad \alpha(x) \to 0 \quad \text{при } x \to c. \qquad (16)$$

Возьмем такую окрестность $S(c, \delta)$ точки c, в пределах которой выражение $f^{(n)}(c) + \alpha(x)$ по знаку совпадает со знаком числа $f^{(n)}(c) \neq 0$ (такой выбор окрестности $S(c, \delta)$ возможен, поскольку α — бесконечно малая функция при $x \to c$). Фиксируя такую окрестность видим, что в случае нечетного n при переходе через точку c бином $(x - c)^{n-2}$ меняет знак, а вместе с ним и $f''(x)$ меняет знак; по теореме 8 точка $C = (c, f(c))$ — точка перегиба графика G. Если n четное, то f'' при переходе через точку c не меняет знак, а значит, f'' в пределах $S(c, \delta)$ сохраняет вполне определенный знак, т. е. f имеет выпуклость или вогнутость. ▶

Отметим, что исследование графика G функции f на точки перегиба эквивалентно исследованию функции f' на локальные экстремумы.

Исследование функции $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ на точки перегиба ее графика G можно проводить по следующей схеме:

1) определить множество $X = \{x\}$, $X \subset \mathcal{J}$, всех тех точек, в которых $f''(x) = 0$, либо не существует;

2) рассмотреть все попарно соседние интервалы $]x_{s-1}, x_s[$ и $]x_s, x_{s+1}[$, концы которых принадлежат множеству X, и вычислить значения f'' в произвольной точке каждого интервала; по теореме Дарбу на каждом таком интервале f'' сохраняет вполне определенный знак, поэтому вычисленное частное значение $f''(x)$ в произвольной точке

такого интервала имеет знак f'' на всем интервале. Если f'' имеет разные знаки на интервалах $]x_{s-1}, x_s[$ и $]x_s, x_{s+1}[$, то точка $(x_s, f(x_s))$ является точкой перегиба графика G; если же знаки f'' одинаковые, то эта точка не является точкой перегиба графика функции.

В качестве примера рассмотрим функцию $f: x \mapsto x + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Ее вторая производная $f''(x) = -\sin x$ обращается в нуль в точках $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, а $f''(x) \neq 0$, если $x \neq x_k$. Следовательно, согласно теореме 9, точки $C_k = (k\pi, k\pi)$ являются точками перегиба графика G функции f.

§ 9. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

9.1. Асимптоты графика функции, заданной параметрически. Пусть $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in T,\ T \subset \mathbb{R}\}$ — график параметрически заданной функции; $Ax + By + C = 0$ — уравнение прямой, лежащей в плоскости xOy; $(\varphi(t), \psi(t))$ — точка графика G. Тогда расстоянием этой точки от указанной прямой называют величину

$$d(t) = \frac{|A\varphi(t) + B\psi(t) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Определение. *Прямая, заданная уравнением* $Ax + By + C = 0$, *называется асимптотой графика* G *при* $t \to t_0$ *односторонне (причем* t_0 *может быть одним из символов* $+\infty$ *или* $-\infty$*), если выполнены соотношения*

$$d(t) \to 0 \quad \text{и} \quad \varphi^2(t) + \psi^2(t) \to +\infty \quad \text{при } t \to t_0.$$

9.2. Необходимые условия существования асимптот. Предположим, что график G имеет асимптоту при $t \to t_0$. Тогда из условия $d(t) \to 0$ при $t \to t_0$ получаем, что должно выполняться соотношение

$$\lim_{t \to t_0} (A\varphi(t) + B\psi(t) + C) = 0, \tag{1}$$

так как $\sqrt{A^2 + B^2} = \text{const}$.

Соотношение (1) запишем в виде

$$\lim_{t \to t_0} (A\varphi(t) + B\psi(t)) = -C. \tag{2}$$

Допустим, что асимптота вертикальная, т. е. что $B = 0$. Тогда из соотношения (2) получаем $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = -\frac{C}{A} = a$, т. е. прямая $x = a$ — вертикальная асимптота графика G.

Если график G имеет горизонтальную асимптоту при $t \to t_0$, то $A = 0$ и соотношение (2) принимает вид

$$\lim_{t \to t_0} \psi(t) = \frac{C}{B} = b.$$

Следовательно, прямая $y = b$ — горизонтальная асимптота графика G.

Пусть график G имеет наклонную асимптоту при $t \to t_0$. Тогда запишем соотношение (2) в виде

$$\lim_{t \to t_0} B\varphi(t)\left(\frac{A}{B} + \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\right) = -C. \tag{3}$$

Покажем, что $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to t_0$. Действительно, если бы $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = L$, $L \in \mathbb{R}$, то из соотношения (3) получили бы, что $\lim\limits_{t \to t_0} \psi(t) = \lim\limits_{t \to t_0} \left(-\frac{C}{B} + \frac{A\varphi(t)}{B} \right) = \text{const}$, а это противоречит соотношению $\varphi^2(t) + \psi^2(t) \to +\infty$ при $t \to t_0$.

Из соотношения (3), учитывая, что $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to t_0$, следует соотношение

$$\lim_{t \to t_0} \left(\frac{A}{B} + \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} \right) = 0, \tag{4}$$

из которого находим

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = -\frac{A}{B} = k. \tag{5}$$

Записав соотношение (3) в виде

$$\lim_{t \to t_0} (\psi(t) - k\varphi(t)) = -\frac{C}{B} = b, \tag{6}$$

получаем, что прямая $y = kx + b$ — наклонная асимптота графика G.

В каждом из рассмотренных случаев предполагали, что асимптоты графика G существуют и, таким образом, нашли необходимые условия существования вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот.

Полученные условия являются не только необходимыми, но и достаточными.

Пусть, например, $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = -\frac{C}{A}$, $\lim\limits_{t \to t_0} \psi(t) = \infty$. Тогда из соотношения $\lim\limits_{t \to t_0} B\psi(t) = -\lim\limits_{t \to t_0} (A\varphi(t) + C) = 0$ следует, что $B = 0$ и уравнение асимптоты принимает вид $Ax + C = 0$ (при этом непременное условие $d(t) \to 0$ при $t \to t_0$ выполнено).

Достаточность остальных условий докажите самостоятельно.

9.3. Случай явного задания функции. Этот случай является частным для рассмотренного в предыдущем пункте, когда $x = t$, $y = f(x)$, где f — заданная на промежутке $\mathcal{J}$ функция, причем этот промежуток может быть бесконечным. Тогда:

1) если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, то прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика G;

2) если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$, то прямая $y = y_0$ является горизонтальной асимптотой графика G;

3) если $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $k \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx) = b$, $b \in \mathbb{R}$, то прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика G при $x \to +\infty$.

Аналогично определяются асимптоты графика при $x \to x_0 - 0$ и $x \to -\infty$.

Заметим, что для случаев горизонтальной и наклонной асимптот промежуток $\mathcal{J}$ должен быть бесконечным.

Вполне очевидно, что и в случае явного задания функции, соотношения 1)—3) являются не только необходимыми, но и достаточными для существования асимптот. В частности, из соотношений 3) следует, что прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика G функции f тогда и только тогда, когда функция $x \mapsto f(x) - kx - b$, $x \in \mathcal{I}$, является бесконечно малой при $x \to +\infty$.

Пример. Найти асимптоты графика функции, заданной неявно уравнением

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad a > 0.$$

График этой функции называют листом Декарта. Введем параметр t, полагая $y = tx$. При этом получим параметрическое представление функции в виде

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Так как $x(t) \to \infty$ и $y(t) \to \infty$ при $t \to -1$, а при всех остальных значениях t функции x и y принимают конечные значения, то лист Декарта не имеет вертикальных и горизонтальных асимптот.

Поскольку $\lim\limits_{t \to -1} \frac{y(t)}{x(t)} = -1$, $\lim\limits_{t \to -1} \left(\frac{3at^2}{1+t^3} + \frac{3at}{1+t^3} \right) = \lim\limits_{t \to -1} \frac{3at(1+t)}{1+t^3} = \lim\limits_{t \to -1} \frac{3at}{t^2 - t + 1} = -a$, то лист Декарта имеет наклонную асимптоту $y = -x - a$.

9.4. Асимптотические многочлены.

Определение. *Многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ при $x \to +\infty$ называется асимптотой графика функции $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, определенной на бесконечном интервале $\mathcal{I}$, если*

$$f(x) = P_n(x) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Теорема. *Для того чтобы многочлен $P_n(x)$ был асимптотой графика функции f при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали следующие предельные значения:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^n} = a_0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - a_0x^n}{x^{n-1}} = a_1,$$

. . . . . .

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-2}x^2)}{x} = a_{n-1},$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x)) = a_n.$$

◀ *Необходимость.* Если $P_n(x)$ — асимптота графика функции $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ при $x \to +\infty$, то $f(x) = P_n(x) + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при

$x \to +\infty$. Тогда

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^n} = a_0,$$

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - a_0x^n}{x^{n-1}} = a_1,$$

. . . . . .

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-2}x^2)}{x} = a_{n-1},$$

$$\exists \lim_{x\to+\infty} (f(x) - (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x)) = a_n.$$

Достаточность. Если существуют указанные $n + 1$ предельные значения, то многочлен $P_n(x)$ существует и

$$f(x) - (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x) = a_n + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, т. е. $f(x) = P_n(x) + \alpha(x)$. ▶

Приведем в качестве примера уравнение $x^2y^2 = x^3 - y^3$, определяющее две ветви кривой, имеющие асимптоты $y^2 = x$ и $y = -x^2$. Детальное исследование приводится ниже (пример 2, § 10).

§ 10. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

С помощью методов дифференциального исчисления можно строить графики функций в области их определения. Исследование функции $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ и построение ее графика G целесообразно проводить по следующей схеме:

1) выяснить вопросы о периодичности, четности или нечетности функции, если она задана на симметричном интервале, найти точки пересечения графика G с осями координат, установить интервалы знакопостоянства функции, найти ее точки разрыва и интервалы, в которых функция непрерывна;

2) выяснить вопрос о существовании асимптот;

3) найти интервалы монотонности функции и точки экстремума;

4) указать интервалы сохранения выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции;

5) построить график функции.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Построить график функции

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

1) Функция непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}$, положительна $\forall\, x > 2$ и отрицательна $\forall\, x < 2$; $f(2) = 0$.

2) Поскольку $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, то $y = -1$ — горизонтальная асимптота графика функции при $x \to -\infty$, а $y = 1$ — при $x \to +\infty$.

3) Поскольку производная $f'(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ меньше 0 при $x < -\dfrac{1}{2}$

График функции наглядно иллюстрирует ее основные свойства: характер изменения, интервалы выпуклости, экстремум.

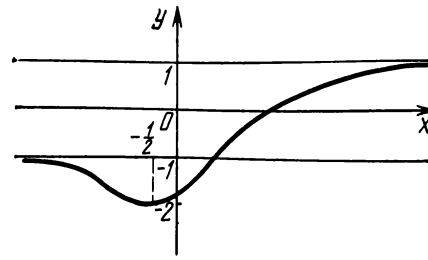


Рис. 14

и больше 0 при $x > -\frac{1}{2}$, то f убывает при $x < -\frac{1}{2}$ и возрастает при $x > -\frac{1}{2}$, а при $x = -\frac{1}{2}$ имеет минимум, равный $-\sqrt{5} \approx -2{,}24$.

4) Судя по знакам второй производной

$$f''(x) = \frac{4\left(x + \frac{3+\sqrt{41}}{8}\right)\left(x - \frac{\sqrt{41}-3}{8}\right)}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} \times$$

$$\times \begin{cases} > 0 & \text{при } x < -\frac{3+\sqrt{41}}{8}, \\ < 0 & \text{при } -\frac{3+\sqrt{41}}{8} < x < \frac{\sqrt{41}-3}{8}, \\ > 0 & \text{при } x > \frac{\sqrt{41}-3}{8}, \end{cases}$$

заключаем, что при $-\frac{3+\sqrt{41}}{8} < x < \frac{\sqrt{41}-3}{8}$ график функции вогнут, а при $x < -\frac{3+\sqrt{41}}{8}$ и $x > \frac{\sqrt{41}-3}{8}$ выпуклый; точки перегиба $M_1 = (x_1, y_1)$, $x_1 \approx \approx -1{,}18$, $y_1 \approx -2{,}06$; $M_2 = (x_2, y_2)$, $x_2 \approx 0{,}42$, $y_2 \approx -1{,}46$.

5) График функции изображен на рис. 14.

Пример 2. Построить график функции, заданной неявно уравнением $x^2y^2 = x^3 - y^3$.

Полагая $y = tx$, получим параметрические уравнения кривой

$$x = \frac{1}{t^2} - t, \quad y = \frac{1}{t} - t^2, \quad t \neq 0.$$

Если параметр t изменяется в интервалах $]-\infty, 0[$ и $]0, +\infty[$, то переменная x принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$, поэтому функция $x \mapsto y(x)$ определена при всех значениях x.

Из параметрического представления кривой получаем равенства

$$y = -x^2 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^4}, \quad y^2 = x - t + t^2,$$

из которых непосредственно вытекают асимптотические соотношения: $y^2 \sim x$ при $t \to \pm 0$ (при этом $x \to +\infty$, $y \to \pm\infty$); $y \sim x^2$ при $t \to \pm\infty$ (при этом $x \to \mp\infty$, $y \to -\infty$). Полагая в исходном уравнении $x - y = u$, $x + y = v$, получим уравне-

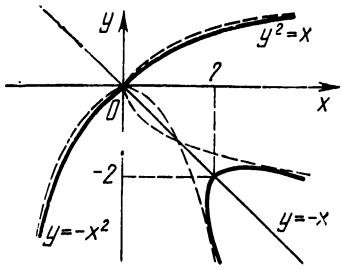


Рис. 15

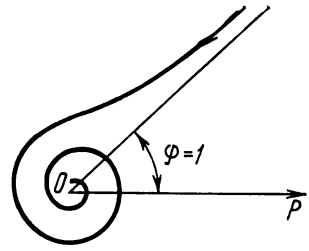


Рис. 16

ние $(v^2-u^2)^2=12v^2u+4u^3$, которое указывает на симметрию графика кривой относительно оси $v=0$, т. е. относительно прямой $x+y=0$.

Вычисляя производные

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t(1+2t^3)}{2+t^3},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2t^3(t^6+7t^3+1)}{(2+t^3)^3}, \quad t\neq 0,$$

находим, что при $t_0=-\sqrt[3]{2}\approx -1,26$ $\left(x_0=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\approx 1,89,\ y_0=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}\approx\right.$ $\left.\approx -2,38\right)$ обе прозводные не существуют, а $\frac{dy}{dx}=0$ при $t_2=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\approx -0,79$ $\left(x_2=\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}\approx 2,38;\ y_2=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\approx -1,89\right)$.

Далее, $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ при $t_1=-\sqrt[3]{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}\approx -1,9$ $(x_1\approx 2,18;\ y_1\approx -4,14)$ и при $t_3=-\sqrt[3]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}\approx -0,53$ $(x_3\approx 4,14;\ y_3\approx -2,18)$.

Пользуясь этими данными и таблицей

t	$-\infty<t<t_1$	$t_1<t<t_0$	$t_0<t<t_2$	$t_2<t<t_3$	$t_3<t<0$	$0<t<+\infty$
x	$x_1<x<+\infty$	$x_0<x<x_1$	$x_0<x<x_3$	$x_3<x<x_2$	$x_3<x<+\infty$	$-\infty<x<+\infty$
y	$-\infty<y<y_1$	$y_1<y<y_0$	$y_0<y<y_2$	$y_3<y<y_2$	$-\infty<y<y_3$	$-\infty<y<+\infty$
$y'(x)$	$y'(x)<0$	$y'(x)<0$	$y'(x)>0$	$y'(x)<0$	$y'(x)<0$	$y'(x)>0$
$y''(x)$	$y''(x)<0$	$y''(x)>0$	$y''(x)<0$	$y''(x)<0$	$y''(x)>0$	$y''(x)<0$

строим график функции $x\mapsto y(x)$ (рис. 15).

Пример 3. Построить график функции $\varphi\mapsto\rho(\varphi)$, заданной в полярной системе координат:

$$\rho=a\frac{\operatorname{th}\varphi}{\varphi-1}, \quad \text{где } \varphi>1,\ a>0.$$

Функция ρ непрерывна как элементарная; $\lim\limits_{\varphi \to 1+0} \rho(\varphi) = +\infty$, т. е. имеется асимптота $\varphi = 1$; $\lim\limits_{\varphi \to +\infty} \rho(\varphi) = 0$, т. е. кривая асимптотически входит в полюс по спирали.

Возьмем производную $\rho'(\varphi) = a\left(\frac{1}{(\varphi-1)\operatorname{ch}^2\varphi} - \frac{\operatorname{th}\varphi}{(\varphi-1)^2}\right)$; так как $\varphi - 1 < \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2\varphi$ при $\varphi > 1$, то $\rho'(\varphi) < 0$, следовательно, функция ρ убывает (рис. 16).

§ 11. НЕКОТОРЫЕ ВАЖНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

11.1. Неравенство Юнга. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = ax - \frac{x^\alpha}{\alpha} - \frac{a^\beta}{\beta}$, $x \geqslant 0$, $\alpha > 1$, $a > 0$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, и исследуем ее на экстремум.

Производная этой функции $\varphi'(x) = a - x^{\alpha-1}$ обращается в нуль при $x = a^{\frac{1}{\alpha-1}}$, а вторая производная φ'' в этой точке отрицательна; следовательно, имеем

$$\varphi_{\max} = \varphi\left(a^{\frac{1}{\alpha-1}}\right) = a^{1+\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{a^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha} - \frac{a^\beta}{\beta} = \frac{a^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\beta} - \frac{a^\beta}{\beta} = 0,$$

так как $\frac{\alpha}{\alpha-1} = \beta$.

Таким образом, $\varphi(x) \leqslant 0 \quad \forall x \geqslant 0$, т. е. $ax \leqslant \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{a^\beta}{\beta} \quad \forall x \geqslant 0$, $\alpha > 1$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Полученное неравенство выполняется и при $a = 0$. Взяв произвольные $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$, $p > 1$, $q > 1$, причем p и q такие, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, найденное неравенство запишем в виде

$$AB \leqslant \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}.$$

Его называют *неравенством Юнга.*

11.2. Неравенство Гельдера. Покажем, что $\forall a_i \geqslant 0$, $b_i \geqslant 0$, $i = \overline{1, n}$ и таких $p > 1$, $q > 1$, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, справедливо *неравенство Гельдера*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

◀ Покажем сначала, что $\forall \alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$ таких, что $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i^p \leqslant 1$, $\sum\limits_{i=1}^n \beta_i^q \leqslant 1$, где $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \leqslant 1. \tag{1}$$

Действительно, суммируя левые и правые части неравенств Юнга

$$\alpha_i\beta_i \leqslant \frac{\alpha_i^p}{p} + \frac{\beta_i^q}{q}, \qquad i = \overline{1, n},$$

получим неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i \leqslant \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} \beta_i^q \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Полагая в неравенстве (1)

$$\alpha_i = \frac{a_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad \beta_i = \frac{b_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}},$$

получим неравенство Гельдера. ▶

Если в неравенстве Гельдера положить $p = q = 2$, то получим уже известное неравенство Коши — Буняковского.

11.3. Неравенство Минковского. Покажем, что $\forall a_i \geqslant 0$, $b_i \geqslant 0$, $i = \overline{1, n}$ и $\forall p > 1$ справедливо *неравенство Минковского*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

◀ Выберем такое $q > 1$, чтобы выполнялось равенство $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, и применим неравенство Гельдера к каждой из сумм, находящихся в правой части тождества

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^{n} a_i (a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i (a_i + b_i)^{p-1}.$$

При этом получим неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1}$$

Поскольку $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, $(p-1)q = p$, то неравенство (1) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right). \tag{2}$$

Из неравенства (2) следует неравенство Минковского. ▶

Неравенства Гельдера, Коши — Буняковского, Минковского играют важную роль при оценках различных выражений, имеющих вид сумм.

§ 12. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

12.1. Дифференцируемые вектор-функции.

Определение 1. *Вектор-функция* $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$, *называется дифференцируемой в точке* x_0 *интервала* $\mathcal{J}$, *если существует такой постоянный вектор* $L \in \mathbb{R}^m$, *что*

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{x - x_0} \right| = 0. \tag{1}$$

Здесь предел вычисляется в смысле сходимости по одной из трех введенных в главе 2 норм пространства $\mathbb{R}^m$.

Из определения 1 следует, что приращение дифференцируемой в точке $x_0 \in \mathcal{J}$ вектор-функции f можно представить в виде

$$f(x) - f(x_0) = L(x - x_0) + \alpha(x, x_0)(x - x_0), \tag{2}$$

где $\alpha(x, x_0) \to 0$ при $x \to x_0$.

Равенство (2) эквивалентно m скалярным равенствам

$$f_j(x) - f_j(x_0) = L_j(x - x_0) + \alpha_j(x, x_0)(x - x_0), \qquad j = \overline{1, m}, \tag{3}$$

где $\alpha_j(x, x_0) \to 0$ при $x \to x_0$, из которых следует, что каждая компонента дифференцируемой в точке x_0 вектор-функции f является дифференцируемой числовой функцией, причем $L_j = f_j'(x_0)$, $j = \overline{1, m}$. Таким образом, постоянный вектор L имеет вид

$$L = (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \ldots, f_m'(x_0)). \tag{4}$$

Его обозначают $L = f'(x_0)$ и называют *производной вектор-функции* f в точке x_0.

Справедливо утверждение: *пусть вектор-функция* $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$, $x \in \mathcal{J}$, $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$, *имеет дифференцируемые в точке* $x_0 \in \mathcal{J}$ *компоненты* f_j, $j = \overline{1, m}$. *Тогда вектор-функция* f *дифференцируема в этой точке, причем*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \ldots, f_m'(x_0)).$$

◀ Поскольку значение вектор-функции f принадлежит векторному пространству $\mathbb{R}^m$ над полем $\mathbb{R}$, то в $\mathbb{R}^m$ определено сложение (следовательно, и разность $f(x) - f(x_0)$). Кроме того, в $\mathbb{R}^m$ определено умножение на $\frac{1}{x - x_0}$ $(x \neq x_0)$ — элемент поля $\mathbb{R}$. Поэтому имеем

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left(\frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0}, \frac{f_2(x) - f_2(x_0)}{x - x_0}, \ldots, \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} \right).$$

Сходимость в $\mathbb{R}^m$ эквивалентна покоординатной сходимости, а так как $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f_j(x) - f_j(x_0)}{x - x_0} = f_j'(x_0)$, $j = \overline{1, m}$, то $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$. ▶

Таким образом, вектор-функция $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке $x_0 \in \mathcal{J}$ тогда и только тогда, когда каждая ее компонента дифференцируема в этой точке.

Определение 2. *Пусть f — вектор-функция, определенная на интервале $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ и пусть x_0 такая точка из $\mathcal{J}$, что полуинтервал $\mathcal{J} \cap [x_0, +\infty[$ ($\mathcal{J} \cap]-\infty, x_0]$) не сводится к точке. Вектор-функция f дифференцируема в точке x_0 справа (слева), если ее сужение на полуинтервал $\mathcal{J} \cap [x_0, +\infty[$ ($\mathcal{J} \cap]-\infty, x_0]$) дифференцируемо в точке x_0.*

Значение производной этого сужения в точке x_0 называется *правой (левой) производной вектор-функции f* в точке x_0 и обозначается $f'_+(x_0)$ ($f'_-(x_0)$).

Пусть f — вектор-функция, определенная на $\mathcal{J}$, $x_0 \in \mathcal{J}$, и f непрерывна в этой точке. Из определений 1 и 2 следует, что вектор-функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она обладает в этой точке как правой, так и левой производной, равными друг другу; тогда

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0),$$

где $f'_+(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Определение 3. *Вектор-функция f, определенная на интервале $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$, дифференцируема (дифференцируема справа, дифференцируема слева), на $\mathcal{J}$, если она дифференцируема (дифференцируема справа, дифференцируема слева) в каждой точке этого интервала; функция $x \mapsto f'(x)$ ($x \mapsto f'_+(x)$, $x \mapsto f'_-(x)$), определенная на $\mathcal{J}$, называется производной (правой производной, левой производной) функции f и обозначается f', $\mathcal{D}f$ или $\dfrac{df}{dx}$ (f'_+, f'_-).*

12.2. Линейность операции дифференцирования.

Теорема. *Множество вектор-функций, определенных на интервале $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$, принимающих свои значения в пространстве $\mathbb{R}^m$ и дифференцируемых в точке $x_0 \in \mathcal{J}$, образует векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, и $f \mapsto \dfrac{df}{dx}(x_0)$ есть линейное (однородное) отображение этого пространства в $\mathbb{R}^m$.*

◀ В векторном нормированном пространстве $\mathbb{R}^m$ определены внутренняя и внешняя бинарные операции (соответственно сложение и умножение на действительные числа), поэтому $\forall x \in \mathcal{J}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$\frac{1}{x - x_0}((f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))) =$$

$$= \frac{1}{x - x_0}(f(x) - f(x_0)) + \frac{1}{x - x_0}(g(x) - g(x_0)),$$

$$\frac{1}{x - x_0}(\alpha f(x) - \alpha f(x_0)) = \alpha \frac{1}{x - x_0}(f(x) - f(x_0)).$$

Переходя к пределу при $x \to x_0$, получим, что $f + g$ и αf дифференцируемы в точке x_0 и имеют в качестве производных в этой точке соответственно $f'(x_0) + g'(x_0)$ и $\alpha f'(x_0)$. ▶

Следствие. *Множество вектор-функций, определенных на интервале $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$, принимающих свои значения в одном и том же простран-*

стве $\mathbb{R}^m$ *и дифференцируемых на* $\mathcal{J}$, *образует векторное пространство над полем* $\mathbb{R}$, *а* $f \mapsto \frac{df}{dx}$ *является линейным (однородным) отображением этого пространства в векторное пространство отображений интервала* $\mathcal{J}$ *в* $\mathbb{R}^m$.

12.3. Основные теоремы.

Теорема 1 (о производной сложной вектор-функции). *Пусть* $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $g : \mathcal{J}_1 \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{J}_1 \supset f(\mathcal{J})$. *Если функция* f *дифференцируема в точке* $x_0 \in \mathcal{J}$, *а вектор-функция* g *дифференцируема в точке* $f(x_0) \in \mathcal{J}_1$, *то композиция* $g \circ f$ *имеет в точке* x_0 *производную, равную* $g'(f(x_0))\, f'(x_0)$.

◀ Образуем на интервале $\mathcal{J}$ вектор-функцию

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}, & \text{если } f(x) \neq f(x_0), \\ g'(f(x_0)), & \text{если } f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

и повторим все рассуждения, проводившиеся при доказательстве теоремы 3, п. 1.5. ▶

Теорема 2 (о конечных приращениях). *Пусть* $f :]a, b[\to \mathbb{R}^m$ *непрерывная на* $[a, b]$ *вектор-функция, дифференцируемая на интервале* $]a, b[$. *Тогда существует такая точка* $\xi \in]a, b[$, *что*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant |f'(\xi)|\,(b - a). \tag{2}$$

Здесь символом $|\cdot|$ обозначена евклидова норма вектора пространства $\mathbb{R}^m$.

◀ Если $f(a) = f(b)$, то неравенство (2) выполнено $\forall \xi \in]a, b[$. Рассмотрим при $f(b) \neq f(a)$ числовую функцию

$$\varphi : t \mapsto (f(b) - f(a),\ f(t)), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

где символом $(\cdot, \cdot)$ обозначено скалярное произведение векторов.

Поскольку функция φ удовлетворяет на сегменте $[a, b]$ всем условиям теоремы Лагранжа о конечных приращениях, то $\exists \xi \in]a, b[$ такое, что

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)\,(b - a). \tag{3}$$

Принимая во внимание, что

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (f(b) - f(a),\ f(b)) - (f(b) - f(a),\ f(a)) =$$
$$= (f(b) - f(a),\ f(b) - f(a)) = |f(b) - f(a)|^2,$$
$$\varphi'(\xi) = (f(b) - f(a),\ f'(\xi)),$$

формулу (3) запишем в виде

$$|f(b) - f(a)|^2 = (f(b) - f(a),\ f'(\xi))\,(b - a). \tag{4}$$

Применив к правой части равенства (4) неравенство Коши — Буняковского, получим неравенство

$$|f(b) - f(a)|^2 \leqslant |f(b) - f(a)| \cdot |f'(\xi)|\,(b - a). \tag{5}$$

Сократив обе части неравенства (5) на $|f(b) - f(a)| \neq 0$, получим неравенство (2). ▶

Так как точка ξ в неравенстве (2) неизвестна, то обычно формулу конечных приращений для вектор-функции записывают в виде

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \sup_{a<x<b} |f'(x)|\,(b-a). \tag{6}$$

12.4. Производные вектор-функции высшего порядка. Пусть вектор-функция $f: \mathcal{J} \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема на интервале $\mathcal{J}$. Если производная f' является дифференцируемой функцией в точке $x_0 \in \mathcal{J}$, то ее производная в этой точке называется *второй производной функции* f при $x = x_0$ и обозначается $f''(x_0)$ или $\mathcal{D}^2 f(x_0)$. Если эта вторая производная существует в любой точке интервала $\mathcal{J}$ (что предполагает существование и непрерывность f' на $\mathcal{J}$), то $x \mapsto f''(x)$ есть вектор-функция, которую обозначают f'' или $\mathcal{D}^2 f$.

Совершенно аналогично по индукции определяют n-ю производную (или производную n-го порядка) вектор-функции f, которая обозначается $f^{(n)}$ или $\mathcal{D}^n f$; по определению ее значение в точке $x_0 \in \mathcal{J}$ есть производная функции $f^{(n-1)}$ в точке x_0. Это определение предполагает существование всех производных $f^{(k)}$ порядка $k \leqslant n-1$ в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируемость функции $f^{(n-1)}$ в точке x_0.

Говорят, что вектор-функция f дифференцируема n раз в точке x_0 (соответственно на интервале), если она имеет в этой точке (соответственно на этом интервале) n-ю производную. Считают, что f бесконечно дифференцируема на $\mathcal{J}$, если она имеет на интервале $\mathcal{J}$ производную n-го порядка $\forall n \in \mathbb{N}$, и называют f функцией класса C^∞.

Индукцией по m получаем формулу

$$\mathcal{D}^m(\mathcal{D}^n f) = \mathcal{D}^{m+n} f,$$

которую следует понимать в том смысле, что если определен один из двух членов этого равенства, то другой также определен и равен первому.

Теорема 1. *Множество вектор-функций, определенных на интервале $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$, принимающих свои значения в пространстве $\mathbb{R}^m$ и имеющих на $\mathcal{J}$ n-ю производную, образует векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, а отображение $f \mapsto \mathcal{D}^n f$ является линейным (однородным) отображением этого пространства в векторное пространство отображений $\mathcal{J}$ в $\mathbb{R}^m$.*

◀ С помощью метода математической индукции легко доказываются формулы

$$\mathcal{D}^n(f+g) = \mathcal{D}^n f + \mathcal{D}^n g, \tag{1}$$

$$\mathcal{D}^n(\alpha f) = \alpha \mathcal{D}^n f, \quad \alpha = \text{const}, \tag{2}$$

в предположении, что f и g имеют производные n-го порядка. ▶

Теорема 2. *Если вектор-функция* $f : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^m$ *имеет в точке* $x_0 \in \mathcal{T}$ *n-ю производную, то*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \alpha(x, x_0)(x - x_0)^n, \tag{3}$$

где $\alpha(x, x_0) \to 0$, *когда* $x \to x_0$, *оставаясь в* $\mathcal{T}$.

Формула (3) называется *локальной формулой Тейлора вектор-функции* f.

◀ Докажем формулу (3) с помощью метода математической индукции. При $n = 1$ имеем

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) - f'(x_0) = 0,$$

т. е. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha_1(x, x_0)(x - x_0)$, где $\alpha_1(x, x_0) \to 0$ при $x \to x_0$. Предположим теперь, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}{(x - x_0)^{n-1}} = 0. \tag{4}$$

Тогда, в силу предположения (4), для функции f' получим соотношение

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1}}{(x - x_0)^{n-1}} = 0, \tag{5}$$

т. е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что

$$\left| \frac{f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1}}{(x - x_0)^{n-1}} \right| < \varepsilon \quad \forall x \in S(x_0, \delta). \tag{6}$$

Фиксируем окрестность $S(x_0, \delta)$ и рассмотрим вектор-функцию

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad x \in S(x_0, \delta). \tag{7}$$

Замечая, что $g(x_0) = 0$, применим теорему 2 Лагранжа, п. 12.3, (неравенство (2)) к вектор-функции g на сегменте $[x_0, x] \; \forall x \in S(x_0, \delta)$, $x > x_0$. Тогда, принимая во внимание неравенство (2), п. 12.3, получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |g(x)| &= |g(x) - g(x_0)| \leqslant |g'(\xi)|(x - x_0) = \\ &= \left| f'(\xi) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(\xi - x_0)^{k-1} \right| (x - x_0) < \\ &< \varepsilon (x - x_0)^n, \quad \xi \in]x_0, x[\subset S(x_0, \delta). \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, из предположения индукции получаем, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n}=0, \tag{9}$$

а поэтому $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\alpha(x,\ x_0)(x-x_0)^n$, где $\alpha(x,\ x_0)\to 0$ при $x\to x_0$. ▶

Большая часть определений этого параграфа и доказанные теоремы справедливы не только в пространстве $\mathbb{R}^m$, но и в произвольном действительном банаховом пространстве, в котором определена функция f, отображающая это пространство в другое банаховое пространство.

12.5. Производная функциональной матрицы $A:\mathcal{J}\to\mathfrak{M}$. Пусть задана функциональная матрица

$$A(x)=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x)\\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \dots & a_{mn}(x)\end{pmatrix}=(a_{ij}(x)),\quad i=\overline{1,\ m},\ j=\overline{1,\ n},$$

где $a_{ij}:\mathcal{J}\to\mathbb{R}$ — дифференцируемые в точке $x_0\in\mathcal{J}$ функции. Поскольку $\mathfrak{M}$ — векторное нормированное пространство, то составляя в $\mathfrak{M}$ разность

$$\Delta A(x_0)=A(x)-A(x_0)=\begin{pmatrix} \Delta a_{11}(x_0) & \Delta a_{12}(x_0) & \dots & \Delta a_{1n}(x_0)\\ \Delta a_{21}(x_0) & \Delta a_{22}(x_0) & \dots & \Delta a_{2n}(x_0)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \Delta a_{m1}(x_0) & \Delta a_{m2}(x_0) & \dots & \Delta a_{mn}(x_0)\end{pmatrix},$$

где $\Delta a_{ij}(x_0)=a_{ij}(x)-a_{ij}(x_0)$, а затем умножая эту разность на $\frac{1}{\Delta x}$, где $\Delta x=x-x_0$, и переходя к пределу при $\Delta x\to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A(x)-A(x_0)}{\Delta x}=\begin{Vmatrix} \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta a_{11}(x_0)}{\Delta x} & \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta a_{12}(x_0)}{\Delta x} & \dots & \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta a_{1n}(x_0)}{\Delta x}\\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta a_{21}(x_0)}{\Delta x} & \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta a_{22}(x_0)}{\Delta x} & \dots & \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta a_{2n}(x_0)}{\Delta x}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta a_{m1}(x_0)}{\Delta x} & \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta a_{m2}(x_0)}{\Delta x} & \dots & \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta a_{mn}(x_0)}{\Delta x}\end{Vmatrix},$$

получаем

$$A'(x_0)=\begin{Vmatrix} a'_{11}(x_0) & a_{12}(x_0) & \dots & a'_{1n}(x_0)\\ a'_{21}(x_0) & a'_{22}(x_0) & \dots & a'_{2n}(x_0)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1}(x_0) & a'_{m2}(x_0) & \dots & a_{mn}(x_0)\end{Vmatrix}.$$

12.6. Производная скалярного произведения вектор-функций. Пусть $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^m$ — дифференцируемые в точке $x_0 \in \mathcal{J}$ вектор-функции. Тогда справедлива формула

$$(f, g)'(x_0) = (f'(x_0), g(x_0)) + (f(x_0), g'(x_0)).$$

◀ Исходя из тождества $(f(x), g(x)) - (f(x_0), g(x_0)) = (f(x) - f(x_0), g(x)) + (f(x_0), g(x) - g(x_0))$ и непрерывности скалярного произведения дифференцируемых (а значит, и непрерывных) в точке x_0 вектор-функций f и g, получим

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f(x), g(x)) - (f(x_0), g(x_0))}{x - x_0} = \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \lim_{x \to x_0} g(x)\right) +$$

$$+ \left(f(x_0), \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right) = (f'(x_0), g(x_0)) + (f(x_0), g'(x_0)). \blacktriangleright$$

12.7. Производная векторного произведения вектор-функций. Пусть $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^m$ — дифференцируемые в точке $x_0 \in \mathcal{J}$ вектор-функции. Тогда справедлива формула

$$[f, g]'(x_0) = [f'(x_0), g(x_0)] + [f(x_0), g'(x_0)]. \tag{1}$$

◀ Как и в случае скалярного произведения, имеем

$$\frac{[f(x), g(x)] - [f(x_0), g(x_0)]}{x - x_0} =$$

$$= \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, g(x)\right] + \left[f(x_0), \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right]. \tag{2}$$

Используя непрерывность векторного произведения дифференцируемых вектор-функций и переходя к пределу в тождестве (2) при $x \to x_0$, получим формулу (1). ▶

12.8. Производная произведения числовой функции и вектор-функции. Пусть $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ — дифференцируемые в точке $x_0 \in \mathcal{J}$ функции. Тогда произведение gf является дифференцируемой в точке x_0 функцией, причем

$$(gf)'(x_0) = g'(x_0) f(x_0) + g(x_0) f'(x_0). \tag{1}$$

◀ Переходя к пределу при $x \to x_0$ в тождестве

$$\frac{g(x) f(x) - g(x_0) f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x) + g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

и используя при этом дифференцируемость функций g и f, а также непрерывность функции f в точке x_0, получим формулу (1). ▶

12.9. Производная произведения функциональной матрицы на вектор-функцию. Пусть $A(x) = (a_{ij}(x))$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ — дифференцируемая в точке $x_0 \in \mathcal{J}$ матрица; $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^n$ — дифференцируемая в этой точке вектор-функция. Тогда вектор-функция Af дифференцируема в точке x_0, а ее производная в этой точке вычисляется по формуле

$$(Af)'(x_0) = A'(x_0) f(x_0) + A(x_0) f'(x_0). \tag{1}$$

◀ Переходя к пределу при $x \to x_0$ в тождестве

$$\frac{A(x)f(x) - A(x_0)f(x_0)}{x - x_0} = \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} f(x) + A(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

получим формулу (1). ▶

12.10. Производная произведения функциональных матриц. Пусть $A(x) = (a_{ij}(x))$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $B(x) = (b_{js}(x))$, $j = \overline{1, n}$, $s = \overline{1, p}$, — дифференцируемые в точке $x_0 \in \mathcal{J}$ функциональные матрицы. Тогда матрица $C(x) = A(x)B(x)$ дифференцируема в точке x_0 и ее производную можно вычислить по формуле

$$C'(x_0) = A'(x_0)B(x_0) + A(x_0)B'(x_0). \tag{1}$$

◀ Перейдя к пределу при $x \to x_0$ в тождестве

$$\frac{A(x)B(x) - A(x_0)B(x_0)}{x - x_0} = \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} B(x) + A(x_0)\frac{B(x) - B(x_0)}{x - x_0}$$

и принимая во внимание дифференцируемость матриц A и B, а также непрерывность матрицы B в точке x_0, получим формулу (1), являющуюся самой общей из всех, полученных выше, поскольку из нее можно получить все предыдущие формулы, за исключением формулы производной векторного произведения. ▶

Если ввести в рассмотрение производные высших порядков функциональных матриц $A^{(k)}(x) = (a_{ij}^{(k)}(x))$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, то можно получить обобщение формулы Лейбница производной s-го порядка произведения двух функций на случай произведения матриц $A : \mathcal{J} \to \mathfrak{M}$, $B : \mathcal{J} \to \mathfrak{M}$, s раз дифференцируемых в точке $x \in \mathcal{J}$:

$$(A(x)B(x))^{(s)} = \sum_{k=0}^{s} C_s^k A^{(s-k)}(x) B^{(k)}(x),$$

$$A(x) = (a_{ij}(x)), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

$$B(x) = (b_{jr}(x)), \quad j = \overline{1, n}, \quad r = \overline{1, p}.$$

Если матрица $A(x)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m}$, не вырождена в точке $x \in \mathcal{J}$, то она имеет в этой точке обратную матрицу A^{-1}, причем

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I. \tag{2}$$

Считая матрицы A и A^{-1} дифференцируемыми в точке $x \in \mathcal{J}$ достаточное число раз, можем последовательно вычислять производные матрицы A^{-1}. При этом будем исходить из тождеств (2).

Дифференцируя тождество $AA^{-1} = I$, получаем $A'A^{-1} + A(A^{-1})' = 0$, откуда находим $(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}$.

Если дифференцировать тождество $A^{-1}A = I$, то получим, что $(A^{-1})'A + A^{-1}A' = 0$, откуда следует полученная формула $(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}$.

Дифференцируя правую часть равенства $(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}$ как произведение, находим

$$(A^{-1})'' = 2A^{-1}A'A^{-1}A'A^{-1} - A^{-1}A''A^{-1} \text{ и т. д.}$$

Анализ формул дифференцирования, полученных в п. 12.6—12.10, позволяет сделать вывод, что оператор дифференцирования $\frac{d}{dx} = \mathcal{D}$ действует на каждое из рассмотренных произведений (числовой функции на вектор-функцию, скалярное, векторное, матрицы на вектор, двух матриц) согласно известному правилу дифференцирования произведения двух числовых функций.

§ 13. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ ВЕКТОРНОГО АРГУМЕНТА

13.1. Дифференцируемые числовые функции m переменных. Дифференциал и производная. Пусть f — числовая функция, определенная на множестве $X \subset \mathbb{R}^m$ и $x_0 \in X$ — предельная точка этого множества.

Определение 1. *Функция f называется дифференцируемой в точке x_0, если существует такая линейная форма $L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, что выполняется соотношение*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0, \tag{1}$$

где $|x - x_0|$ — любая из трех введенных в рассмотрение в главе 2 норм вектора $(x - x_0) \in \mathbb{R}^m$.

Из соотношения (1) следует, что приращение дифференцируемой в точке x_0 функции f имеет вид

$$f(x) - f(x_0) = L(x - x_0) + \alpha(x, x_0)|x - x_0|, \tag{2}$$

где $\alpha \to 0$ при $|x - x_0| \to 0$ (т. е. при $x \to x_0$).

В дальнейшем предполагаем, что $X = D$, где D — область пространства $\mathbb{R}^m$.

Определение 2. *Если функция f дифференцируема в точке $x_0 \in D$, то линейная форма $L: h \mapsto Lh$, $h \in \mathbb{R}^m$, называется полным дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$:*

$$df(x_0)(h) = Lh, \quad h \in \mathbb{R}^m. \tag{3}$$

Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ — стандартный базис пространства $\mathbb{R}^m$ (множество векторов $e_j \in \mathbb{R}^m$, $j = \overline{1, m}$, у которых j-я компонента равна единице, а все остальные компоненты нули).

Линейной форме $L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ при фиксированном базисе $\{e_i;\ i = \overline{1, m}\}$ соответствует матрица-строка $A = (a_1 a_2 \ldots a_m)$, $a_i \in \mathbb{R}$, а произвольный вектор $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ можно разложить по

базисным векторам пространства $\mathbb{R}^m$, представив его в виде

$$\boldsymbol{h} = \sum_{i=1}^{m} h_i \boldsymbol{e}_i.$$

Из линейности формы L следует, что

$$L\boldsymbol{h} = L\left(\sum_{i=1}^{m} h_i \boldsymbol{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{m} h_i L\boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{m} a_i h_i, \tag{4}$$

так как $L\boldsymbol{e}_i = a_i$.

Следовательно, полный дифференциал дифференцируемой в точке $\boldsymbol{x}_0 \in D$ функции f имеет вид

$$df(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) = \sum_{i=1}^{m} a_i h_i, \tag{5}$$

а ее приращение в точке $\boldsymbol{x}_0$ записывается следующим образом:

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{i=1}^{m} a_i (x_i - x_i^0) + \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|. \tag{6}$$

Первое слагаемое в правой части равенства (6) есть значение дифференциала $df(\boldsymbol{x}_0)$ при $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$, а второе слагаемое при $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$ является бесконечно малой функцией более высокого порядка, чем $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|$.

Определение 3. *Пусть функция $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, дифференцируема в точке $\boldsymbol{x}_0 \in D$. Матрица-строка $A = (a_1 a_2 \ldots a_m)$ линейной формы L называется полной производной функции f в точке $\boldsymbol{x}_0$ и обозначается $f'(\boldsymbol{x}_0)$.*

Согласно этому определению имеем

$$df(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) = f'(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}, \quad \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^m. \tag{7}$$

Заметим, что из дифференцируемости функции f в точке $\boldsymbol{x}_0$ следует ее непрерывность в этой точке:

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0).$$

Определение 4. *Функция f называется дифференцируемой в области $D \subset \mathbb{R}^m$, если она дифференцируема $\forall \boldsymbol{x} \in D$.*

Если функция f дифференцируема в области D, то при каждом фиксированном $\boldsymbol{x} \in D$ L есть линейная форма, действующая из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}$, т. е. функция, определенная при всех $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^m$ и принимающая значения $L\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}$.

С другой стороны, каждой точке $\boldsymbol{x} \in D$ соответствует производная $f'(\boldsymbol{x})$, поскольку f дифференцируема в области D.

Таким образом, дифференцируемая в области D функция f порождает в этой области функцию f' со значениями в пространстве $\mathfrak{M}$.

13.2. Частные производные. Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$. $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m\}$ — стандартный базис пространства $\mathbb{R}^m$ (множество векторов $\boldsymbol{e}_j \in \mathbb{R}^m$, $j = \overline{1, m}$, у которых j-я компонента равна 1, а все остальные

компоненты нули). Определим в области D функции $\mathcal{D}_j f$ с помощью соотношений

$$\mathcal{D}_j f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t}, \quad x \in D, \tag{1}$$

если при каждом $j = \overline{1, m}$ этот предел существует.

В числителе правой части соотношения (1) приращение получает только j-я компонента вектора x, следовательно, $\mathcal{D}_j f$ является производной функции f по переменной x_j при фиксированных значениях остальных переменных. Поэтому используют обозначения

$$\mathcal{D}_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad \text{или} \quad \mathcal{D}_j f = f'_{x_j}, \tag{2}$$

а значение функции $\mathcal{D}_j f$ в точке $x \in D$ называют *частной производной* функции f в этой точке.

Из определения дифференцируемой в точке $x_0 \in D$ функции f и формулы (6), п. 13.1, следует, что она имеет в этой точке конечные частные производные по всем переменным, причем

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = a_j, \quad j = \overline{1, m}. \tag{3}$$

◀ Если j-я компонента вектора x_0 получает приращение t при фиксированных остальных компонентах, то формула (3), п. 13.1, принимает вид

$$f(x_0 + te_j) - f(x_0) = a_j t + \alpha |t|, \tag{4}$$

где $\alpha \to 0$ при $t \to 0$. Разделив обе части равенства (4) на $t \neq 0$, получим

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_j) - f(x_0)}{t} = a_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0), \quad j = \overline{1, m}. \ \blacktriangleright \tag{5}$$

Из соотношения (5) следует, что для дифференцируемой в точке x_0 функции f существует единственная линейная форма из определения 1. Отметим также очевидную связь между полной производной дифференцируемой функции f и ее частными производными: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = f'(x_0) e_j$, $j = \overline{1, m}$, e_j — векторы стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^m$.

При изучении дифференцируемых функций одной переменной было установлено, что из существования конечной производной f' в точке $x_0 \in \mathcal{I}$ следует дифференцируемость функции f в этой точке. Для функций $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, при $m > 1$ из существования всех конечных частных производных в точке x_0 не следует, вообще говоря, ее дифференцируемость в этой точке. Например, функция $f(x) = \sqrt{|x_1 x_2|}$, $x \in \mathbb{R}^2$, имеет конечные частные производные в точке $0 = (0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{|t \cdot 0|}}{t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{|0 \cdot t|}}{t} = 0,$$

однако она не дифференцируема в этой точке: если бы f была дифференцируема, то, согласно формуле (3), п. 13.1, имели бы

$$\Delta f(0) = f(x) - f(0) = \sqrt{|x_1 x_2|} = \alpha |x|,$$

где x — вектор с компонентами x_1 и x_2, а $\alpha \to 0$ при $|x| \to 0$. Взяв евклидову норму $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и полагая $x_1 = x_2 = t \neq 0$, получим $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, что противоречит определению функции α.

Пусть функция f дифференцируема в точке $x_0 \in D$. Тогда, принимая во внимание формулу (5), приращение функции f в точке x_0 имеет вид

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x, x_0)|x - x_0| =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_i^0) + \alpha(x, x_0)|x - x_0|, \qquad (6)$$

где $\alpha(x, x_0) \to 0$ при $x \to x_0$. Полная производная $f'(x_0)$ функции f принимает вид

$$f'(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \ \ldots \ \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) \right).$$

Так как $\alpha(x, x_0) \cdot |x - x_0| = o(|x - x_0|)$, то формулу (6) записывают в виде

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_i^0) + o(|x - x_0|), \quad x \to x_0. \qquad (7)$$

Приращение дифференцируемой в точке x_0 функции f можно также представить в виде

$$f(x) - f(x_0) = (f'(x_0) + B(x, x_0))(x - x_0), \qquad (8)$$

где B — матрица-строка $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$, элементы которой удовлетворяют соотношениям $\lim\limits_{x \to x_0} \beta_i(x, x_0) = 0$, $i = \overline{1, m}$.

◀ Для доказательства предположим, что норма вектора $x - x_0$ евклидова $|x - x_0| = |x - x_0|_1$. Исходя из неравенства

$$|x - x_0|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{m} |x_i - x_i^0| = \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0) \operatorname{sgn}(x_i - x_i^0)$$

и обозначая $\dfrac{|x - x_0|_1}{\sum\limits_{i=1}^{m} |x_i - x_i^0|} = \theta(x, x_0)$, получим равенство

$$|x - x_0|_1 = \sum_{i=1}^{m} \theta(x, x_0)(x_i - x_i^0) \operatorname{sgn}(x_i - x_i^0), \quad 0 < \theta(x, x_0) \leqslant 1,$$

с помощью которого формула (6) принимает вид

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + B(x, x_0)(x - x_0),$$

где B — матрица-строка $(\beta_1(x, x_0)\ \beta_2(x, x_0) \ldots \beta_m(x, x_0))$, $\beta_j(x, x_0) = \alpha(x, x_0)\,\theta(x, x_0)\,\operatorname{sgn}(x_j - x_j^0)$, $\beta_j \to 0$ при $x \to x_0$, так как $\alpha(x, x_0) \to 0$ при $x \to x_0$. ▶

Из неравенств $|x - x_0|_3 \leqslant |x - x_0|_1 \leqslant |x - x_0|_2$, которые выполнены в $\mathbb{R}^m$, следует, что форма записи сохраняется для третьей и второй норм, причем в последнем случае $\theta(x, x_0) = 1$. Формулу (8) часто записывают в виде

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)(x_j - x_j^0) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(x, x_0)(x_j - x_j^0), \qquad (9)$$

где $\beta_j(x, x_0) \to 0$ при $x \to x_0$, $j = \overline{1, m}$.

13.3 Производная функции по направлению. Пусть D — область пространства $\mathbb{R}^m$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, e — единичный вектор с компонентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, выходящий из точки x_0, $t > 0$ — скаляр и $te \in D$. Рассмотрим приращение функции f в точке x_0 в направлении вектора e: $f(x_0 + te) - f(x_0)$.

Определение. *Если существует конечный предел*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t},$$

то назовем его производной функции f в точке x_0 в направлении e и обозначим $\frac{\partial f}{\partial e}(x_0)$.

Теорема. *Если функция f дифференцируема в точке x_0, то она имеет производную по любому направлению e, выходящему из этой точки, причем*

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) = (\nabla f(x_0), e), \qquad (1)$$

где $\nabla f(x_0) = \operatorname{grad} f(x_0)$ — вектор с компонентами $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0)$, который называют градиентом функции f в точке x_0, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение.

◀ Из дифференцируемости функции f в точке x_0 следует равенство

$$f(x_0 + te) - f(x_0) = t \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\alpha_j + |t|\beta(t),$$

где $\beta(t) \to 0$ при $t \to 0$. Разделив обе части этого равенства на $t > 0$ и выполнив предельный переход при $t \to 0$, получим

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\alpha_j = (\nabla f(x_0), e). \ ▶$$

Анализ формулы (1) позволяет сделать следующие выводы.

1) В направлении вектора $e = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$ функция f возрастает быстрее, чем в любом другом направлении, выходящем из точки x_0,

а скорость этого возрастания $\frac{\partial f}{\partial e}(x_0)$ равна $|\nabla f(x_0)|$. Это направление быстрейшего возрастания функции.

2) В направлении вектора $e = -\frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$ производная $\frac{\partial f}{\partial e}(x_0)$ принимает наименьшее значение, равное $-|\nabla f(x_0)|$. Это направление быстрейшего спуска функции f.

3) В направлении e, ортогональном к вектору $\nabla f(x_0)$, $\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) = 0$; в этом направлении приращение $\Delta f(x_0)$ имеет более высокий порядок малости при $x \to x_0$, чем $|x - x_0|$.

4) Для всех остальных направлений, выходящих из точки x_0, имеем

$$-|\nabla f(x_0)| < \frac{\partial f}{\partial e}(x_0) < |\nabla f(x_0)|.$$

Отметим, что вектор $\nabla f(x_0)$ не зависит от направления e и что он может существовать независимо от дифференцируемости функции f. В то же время, как уже установили, из дифференцируемости функции f в точке x_0 следует существование ее градиента в этой точке.

Итак, вектор-градиент указывает направление быстрейшего возрастания функции f, а его евклидова норма равна производной функции f в точке x_0 в этом направлении.

13.4. Формула конечных приращений. Достаточные условия дифференцируемости функции.

Теорема 1. *Пусть $f: D \to \mathbb{R}$ — непрерывная в области $D \subset \mathbb{R}^m$ функция, частные производные которой $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = \overline{1, m}$, существуют в некоторой окрестности $S(x_0, \delta)$. Тогда для каждого $x \in S(x_0, \delta)$ справедлива формула*

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi_j) h_j, \tag{1}$$

где $h_j = x_j - x_j^0$, $\xi_1 = x_0 + \theta_1 h_1 e_1 + \sum_{j=2}^{m} h_j e_j$, $\xi_2 = x_0 + \theta_2 h_2 e_2 + \sum_{j=3}^{m} h_j e_j$, $\ldots$, $\xi_k = x_0 + \theta_k h_k e_k + \sum_{j=k+1}^{m} h_j e_j$, $\ldots$, $\xi_m = x_0 + \theta_m h_m e_m$, $0 < \theta_j < 1$, *e_j — векторы стандартного базиса пространства* $\mathbb{R}^m$.

Формулу (1) будем называть *формулой Лагранжа конечных приращений* для числовой функции векторного аргумента.

◀ Представим приращение функции f в точке x_0 в виде:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \left(f\left(x_0 + \sum_{j=1}^{m} h_j e_j\right) - f\left(x_0 + \sum_{j=2}^{m} h_j e_j\right)\right) +$$

$$+ \left(f\left(x_0 + \sum_{j=2}^{m} h_j e_j\right) - f\left(x_0 + \sum_{j=3}^{m} h_j e_j\right)\right) + \ldots +$$

$$+ \left(f\left(x_0 + \sum_{j=m-1}^{m} h_j e_j\right) - f(x_0 + h_m e_m)\right) + (f(x_0 + h_m e_m) - f(x_0)).$$

Каждая скобка этой суммы содержит приращение функции f, соответствующее приращению лишь одной координаты. Применив формулу Лагранжа конечных приращений для числовой функции одной переменной к разностям

$$f\left(x_0+\sum_{i=k}^{m}h_ie_i\right)-f\left(x_0+\sum_{i=k+1}^{m}h_ie_i\right),\quad k=\overline{1,\ m-1}\quad\text{и}\quad f(x_0+h_me_m)-f(x_0),$$

получим

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_0+\theta_1h_1e_1+\sum_{i=2}^{m}h_ie_i\right)h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_0+\right.$$

$$\left.+\theta_2h_2e_2+\sum_{i=3}^{m}h_ie_i\right)h_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_{m-1}}(x_0+\theta_{m-1}h_{m-1}e_{m-1}+$$

$$+h_me_m)\,h_{m-1}+\frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0+\theta_mh_me_m)\,h_m=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi_i)\,h_i.\ \blacktriangleright$$

Используя формулу (1), докажем теорему о достаточном условии дифференцируемости функции нескольких переменных в точке.

Теорема 2. *Для того чтобы функция $f: D\to\mathbb{R}$, где D — область пространства $\mathbb{R}^m$, была дифференцируемой в точке $x_0\in D$, достаточно, чтобы частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=\overline{1,\ m}$, существовали в некоторой окрестности $S(x_0,\ \delta)$, а в самой точке x_0 были непрерывны.*

◀ Из существования частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=\overline{1,\ m}$, в окрестности $S(x_0,\ \delta)\subset D$ и их непрерывности в точке x_0 следует, что $\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,\delta_1\leqslant\delta:\forall\,x\in S(x_0,\ \delta_1)\Rightarrow\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{m}$. Фиксируем окрестность $S(x_0,\ \delta_1)$ и пусть $(x_0+h)\in S(x_0,\ \delta_1)$. Применив формулу (1), получим

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\,h_i+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi_i)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\right)h_i,\quad \xi_i\in S(x_0,\ \delta_1).$$

Оценим выражение $\alpha=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi_i)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\right)h_i$. Так как $\xi_i\in S(x_0,\ \delta_1)$, $i=\overline{1,\ m}$, то $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi_i)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{m}$, $i=\overline{1,\ m}$. Тогда $|\alpha|<m\frac{\varepsilon}{m}|h|=\varepsilon|h|$, $\frac{|\alpha|}{|h|}<\varepsilon$, а это означает, что $\alpha=o(|h|)$ при $x\to x_0$. Таким образом, $f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+o(|h|)$, т. е. функция f дифференцируема в точке x_0. ▶

Обращаем внимание на то, что условие непрерывности частных производных функции f в точке $x_0 \in D$ не является необходимым для дифференцируемости функции в этой точке. Приводимый ниже пример показывает, что дифференцируемая в точке функция может иметь разрывные частные производные в этой точке. Функция

$$f(x) = \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2) \sin \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^2,$$

в любой точке $x \neq 0$ имеет частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 2x_1 \sin \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2} \cos \frac{1}{x_1^2 + x_2^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 2x_2 \sin \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2} \cos \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

В точке $x = 0$ частные производные вычислим, исходя из их определения:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) = \lim_{x_1 \to 0} \frac{f(x_1, 0) - f(0, 0)}{x_1} = \lim_{x_1 \to 0} \frac{x_1^2 \sin \dfrac{1}{x_1^2}}{x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0) = \lim_{x_2 \to 0} \frac{f(0, x_2) - f(0, 0)}{x_2} = \lim_{x_2 \to 0} \frac{x_2^2 \sin \dfrac{1}{x_2^2}}{x_2} = 0.$$

Покажем, что частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ и $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$ разрывны в точке 0 и не ограничены в любой ее окрестности. Возьмем последовательность точек $\left\{x_n = \left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right);\ n \in \mathbb{N}\right\}$, сходящуюся к точке 0 при $n \to \infty$. При этом $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_n) = -2\sqrt{n\pi} \to \infty$. Следовательно, производная $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ разрывна в точке 0 и не ограничена в любой ее окрестности. То же самое можно сказать и о частной производной $\frac{\partial f}{\partial x_2}$.

Вместе с тем из того, что $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0) = 0$, а приращение $\Delta f(0)$ имеет вид $\Delta f(0) = (x_1^2 + x_2^2) \sin \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} = \alpha |h|$, где $|h| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\alpha = |h| \cdot \sin \frac{1}{|h|^2} \to 0$ при $|h| \to 0$, следует, что f дифференцируема в точке 0.

13.5. Дифференцирование сложных функций.

Теорема (о дифференцируемости сложной функции). *Пусть D — область пространства $\mathbb{R}^m$, f — отображение об-*

ласти D в пространство $\mathbb{R}^n$, каждая компонента которого $y_k = f_k$, $k = \overline{1, n}$, дифференцируема в точке $x_0 \in D$, g — числовая функция, определенная в области пространства $\mathbb{R}^n$, содержащей множество $f(D)$, дифференцируемая в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда композиция $F = g \circ f$ дифференцируема в точке x_0, а частные производные функции F в этой точке вычисляются по формуле

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y_0) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x_0), \quad i = \overline{1, m}. \tag{1}$$

◀ Так как функции f_k дифференцируемы в точке x_0, то их приращения в этой точке имеют вид

$$f_k(x) - f_k(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_i^0) + \varphi_k(x, x_0), \tag{2}$$

где $|\varphi_k(x, x_0)| = o(|x - x_0|)$, $x \to x_0$, $k = \overline{1, n}$.

Из дифференцируемости функции g в точке $y_0 = f(x_0)$ следует, что

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0)(y - y_0) + \psi(y, y_0), \tag{3}$$

где $|\psi(y, y_0)| = o(|y - y_0|)$, $y \to y_0$.

Подставляя в формулу (3) $f(x)$ вместо y и принимая во внимание формулу (2), получим

$$F(x) - F(x_0) = g(f(x)) - g(f(x_0)) = g'(y_0)(f(x) - f(x_0)) +$$

$$+ \psi(f(x), f(x_0)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y_0)(f_k(x) - f_k(x_0)) + \psi(f(x), f(x_0)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y_0) \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_i^0) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y_0) \varphi_k(x, x_0) + \psi(f(x), f(x_0)). \tag{4}$$

Поскольку $|\varphi_k(x, x_0)| = o(|x - x_0|)$, то

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y_0) \varphi_k(x, x_0) \right| = o(|x - x_0|). \tag{5}$$

Оценим $\psi(f(x), f(x_0))$, приняв во внимание, что $|\psi(f(x), f(x_0))| = o(|f(x) - f(x_0)|)$. Из неравенств $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f_k(x) - f_k(x_0)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_0) \right| \cdot |x_j - x_j^0| + |\varphi_k(x, x_0)| \right) \leqslant C|x - x_0|$, $C = \text{const}$, следует, что $|\psi(f(x), f(x_0))| = o(|x - x_0|)$.

Изменяя в формуле (4) порядок суммирования и принимая во внимание полученные оценки, можем записать приращение функции F

в виде

$$F(x) - F(x_0) = \sum_{i=1}^{m} c_i (x_i - x_i^0) + o(|x - x_0|), \tag{6}$$

где $c_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y_0) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x_0)$.

Следовательно, функция F дифференцируема в точке x_0 и $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0) = c_i$. ▶

Отметим важный частный случай теоремы, когда $f_k = x_k : t \mapsto x_k(t)$, $t_1 < t < t_2$. В этом случае формула (1) принимает вид

$$\frac{dF}{dt}(t_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_k}(x_0) \frac{dx_k}{dt}(t_0), \tag{7}$$

где $x_0 = (x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0))$.

Приведем пример применения формулы (7). Дадим определение, играющее важную роль в теории дифференциальных уравнений.

Определение. *Функция $f : D \to \mathbb{R}$, где D — область пространства $\mathbb{R}^m$, называется однородной функцией степени α в области D, если $\forall\, x \in D$ и $\forall\, t \in \mathbb{R}$ таких, что $tx \in D$, выполняется равенство*

$$f(tx) = t^\alpha f(x). \tag{8}$$

Теорема Эйлера (об однородных функциях). *Если $f : D \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая в области D однородная функция степени α, то*

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha f(x) \quad \forall\, x \in D,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_m). \tag{9}$$

◀ Запишем формулу (8) в виде $\varphi(t) = t^\alpha f(x)$, где $x \in D$ — фиксированная точка. Тогда

$$(t^\alpha f(x))'_t = \alpha t^{\alpha-1} f(x) = \varphi'(t). \tag{10}$$

Дифференцируя функцию φ по формуле (7), получаем

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(tx) \frac{d\xi_i}{dt}(t), \text{ где } \xi_i = x_i t, \quad i = \overline{1, m}. \tag{11}$$

Из формул (10) и (11) имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(tx)\, x_i = \alpha t^{\alpha-1} f(x). \tag{12}$$

Полагая в (12) $t = 1$, получаем формулу (9). ▶

Может оказаться, что функция f однородна в области D не по всем переменным, а лишь по некоторым из них, например,

$$f(y, tz) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k, tx_{k+1}, \ldots, tx_m) = t^\alpha f(x),\ x = (y, z).$$

Тогда, при выполнении условий теоремы Эйлера, справедлива формула

$$\sum_{i=k+1}^{m} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha f(x), \quad x \in D.$$

13.6. Полный дифференциал функции. Приближенные вычисления. В пункте 13.1 определили полный дифференциал дифференцируемой в точке $x_0 \in D$ функции $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, как линейную форму L из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}$, принимающую на произвольном векторе $h \in \mathbb{R}^m$ значение

$$df(x_0)(h) = Lh = f'(x_0)h = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i.$$

Если $\varphi(x) = x_i$, $x \in \mathbb{R}^m$, то $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0$ при $k \neq j$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 1$, следовательно, $\varphi'(x) = (0\ 0\ \ldots\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 0)$ и $dx_j(h) = \varphi'(x)h = h_j$, в силу чего дифференциал функции f, дифференцируемой в точке $x_0 \in D$, принимает вид

$$df(x)(h) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, dx_i(h), \quad dx_i(h) \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Дифференциалы dx_j, $j = \overline{1, m}$, называют дифференциалами независимых переменных.

Дифференциал функции f в точке $x_0 \in D$ можно также записать в виде

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)\, dx(h), \quad dx(h) \in \mathbb{R}^m,$$

где $dx(h)$ — вектор, компоненты которого — дифференциалы независимых переменных.

Если $h = x - x_0$, то вектор h называют вектором смещения из точки x_0 в точку x. В формуле (6), п. 13.1, значение линейной формы $L = df(x_0)$ рассматривается на векторе смещения $h = x - x_0$, $h \in D$.

Если $\mathbb{R}^m$ — евклидово пространство, то дифференциал $df(x_0)(h)$ дифференцируемой в точке $x_0 \in D$ функции f равен скалярному произведению градиента этой функции в точке x_0 и произвольного вектора $h \in \mathbb{R}^m$:

$$df(x_0)(h) = (\nabla f(x_0),\ h). \tag{2}$$

Полагая $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)(h)$ в достаточно малой окрестности $S(x_0, \delta)$, можем приближенно вычислять значения $f(x)$ $\forall\, x \in S(x_0, \delta)$ по формуле

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)(h), \quad h = x - x_0.$$

13.7. Инвариантность формы дифференциала. Пусть выполнены все условия теоремы о дифференцировании сложной функции из пункта 13.5. Тогда дифференциал сложной функции $F = g \circ f$ имеет вид

$$dg(y_0)(h) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y_0)\, dy_k(h), \quad dy_k(h) \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

т. е. форма дифференциала сложной функции такая же, как и в формуле (1), п. 13.6.

◀ При выполнении всех условий упомянутой теоремы, функции $F = g \circ f$ и $y_k = f_k$, $k = \overline{1, n}$, имеют каждая полный дифференциал в точке $x_0 \in D$:

$$d(g \circ f)(x_0)(h) = dF(x_0)(h) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial x_j}(x_0)\, dx_j(h), \quad dx_j(h) \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

$$df_k(x_0)(h) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_0)\, dx_j(h), \quad dx_j(h) \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Подставив в правую часть формулы (2) значения частных производных $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x_0)$, вычисленных по формуле (1), п. 13.5, получаем

$$dg(y_0)(h) = d(g \circ f)(x_0)(h) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y_0)\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_0)\right) dx_j(h). \quad (4)$$

Изменив в правой части формулы (4) порядок суммирования и принимая во внимание формулу (3), получим формулу (1):

$$dg(y_0)(h) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y_0) \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_0)\, dx_j(h) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y_0)\, dy_k(h), \quad dy_k(h) \in \mathbb{R}, \quad dy_k(h) = df_k(x_0)(h). \blacktriangleright$$

Таким образом, полный дифференциал сложной функции сохраняет форму. Однако следует иметь в виду, что сомножители dy_k в формуле (1) являются дифференциалами функций $y_k = f_k$, $k = \overline{1, n}$, в точке x_0, а не приращениями координат точки $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Исходя из доказанного свойства инвариантности формы дифференциала, можно утверждать, что справедливы следующие формулы для любых дифференцируемых функций, независимо от того, являются ли они сложными, или нет:

$$d(u + v) = \frac{\partial}{\partial u}(u + v)\, du + \frac{\partial}{\partial v}(u + v)\, dv = du + dv, \quad (5)$$

$$d(uv) = \frac{\partial}{\partial u}(uv)\, du + \frac{\partial}{\partial v}(uv)\, dv = v\, du + u\, dv, \quad (6)$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{v}\right) du + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\right) dv = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2}, \quad v \neq 0. \quad (7)$$

Например, $d\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{1 + \frac{u^2}{v^2}}\, d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\, du - u\, dv}{u^2 + v^2}$.

13.8. Частные производные высших порядков. Пусть функция $f: D \to \mathbb{R}$, где D — область в $\mathbb{R}^m$, имеет частные производные в не-

которой окрестности $S(x_0, \delta)$. Если функции $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = \overline{1, m}$, имеют каждая частные производные в точке $x_0 \in D$, то будем называть их *частными производными второго порядка* функции f, или *вторыми частными производными* и обозначать $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x_0)$ или $f''_{x_j x_k}(x_0)$, $k = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m}$. Если $k \neq j$, то частные производные называются *смешанными*. Из определения частных производных второго порядка следует, что у функции m переменных их может существовать m^2. Если частные производные второго порядка определены в $S(x_0, \delta)$ и имеют каждая частные производные в точке $x_0 \in D$, то в этой точке можно определить m^3 частных производных третьего порядка: $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_j}(x_0)$, $i, j, k = \overline{1, m}$. Если $i \neq k \vee i \neq j \vee k \neq j$, то частную производную третьего порядка называют *смешанной*.

Совершенно аналогично по индукции определяют n-е частные производные (или частные производные n-го порядка) функции f и обозначают $\frac{\partial^n f}{\partial x_l \dots \partial x_k \partial x_j}(x_0)$, $l, \dots, k$, $j = \overline{1, m}$. По определению, их значения в точке $x_0 \in D$ есть частные производные функций $\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_r \dots \partial x_k \partial x_j}$, $r, \dots, k$, $j = \overline{1, m}$, в этой точке. Таким образом, функция f может иметь в точке $x_0 \in D$ (или в каждой точке $x \in D$) m^n частных производных n-го порядка. Но при выполнении некоторых условий смешанные частные производные высших порядков не зависят от того, в каком порядке производится дифференцирование по переменным $x_l, \dots, x_k, x_j$. Это означает, что такие смешанные производные равны между собой, откуда следует, что общее количество частных производных n-го порядка равно не m^n, а значительно меньше. Например, если $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x_0)$, $j \neq k$, то общее количество частных производных функции f в точке x_0 равно $\frac{m(m+1)}{2}$, а не m^2. Сформулируем и докажем теорему о равенстве смешанных производных второго порядка, называемую теоремой Шварца.

Теорема 1. *Если смешанные производные* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ *и* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ *функции* $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, *существуют в окрестности точки* x_0 *из области* D *и непрерывны в самой точке* x_0, *то*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0). \tag{1}$$

◀ Рассмотрим выражение

$$w = (f(x_0 + h_k e_k + h_j e_j) - f(x_0 + h_k e_k)) - (f(x_0 + h_j e_j) - f(x_0)),$$

где e_k, e_j — векторы стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^m$ и $k < j$. Выражение w можно рассматривать как приращение функции Φ: $x_k \mapsto f(x_0 + (x_k - x_k^0) e_k + h_j e_j) - f(x_0 + (x_k - x_k^0) e_k)$ в точке x_k^0. По формуле Лагранжа конечных приращений для функции одной

переменной имеем

$$w = \Phi(x_k^0 + h_k) - \Phi(x_k^0) = h_k \Phi_{x_k}(x_k^0 + \theta_1 h_k) =$$

$$= h_k \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0 + \theta_1 h_k e_k + h_l e_l) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0 + \theta_1 h_k e_k) \right), \quad 0 < \theta_1 < 1. \quad (2)$$

Повторно применяя к разности в скобках формулу конечных приращений, получим

$$w = h_l h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(x_0 + \theta_1 h_k e_k + \theta_2 h_l e_l), \quad 0 < \theta_2 < 1. \quad (3)$$

Рассматривая выражение w как приращение функции $\psi : x_l \to f(x_0 + h_k e_k + (x_l - x_l^0) e_l) - f(x_0 + (x_l - x_l^0) e_l)$ в точке x_l^0 и дважды применив формулу конечных приращений, находим

$$w = h_l \left(\frac{\partial f}{\partial x_l}(x_0 + h_k e_k + \theta_3 h_l e_l) - \frac{\partial f}{\partial x_l}(x_0 + \theta_3 h_l e_l) \right) =$$

$$= h_k h_l \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(x_0 + \theta_4 h_k e_k + \theta_3 h_l e_l), \quad 0 < \theta_i < 1, \quad i = 3, 4. \quad (4)$$

Приравнивая правые части равенств (3) и (4), сокращая затем на $h_l h_k \neq 0$ и переходя к пределу при $h_l \to 0$, $h_k \to 0$, получим, приняв во внимание непрерывность смешанных производных $\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}$ в точке x_0,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(x_0). \blacktriangleright$$

Доказанная теорема предполагает существование смешанных производных в некоторой окрестности точки x_0, их непрерывность в этой точке и относится к двум фиксированным смешанным производным, без предположения существования остальных.

Выделим класс функций, имеющих все частные производные второго порядка в фиксированной точке $x_0 \in D$ и при этом

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(x_0), \quad k, l = \overline{1, m}, \quad k \neq l.$$

Определение. *Функция $f : D \to \mathbb{R}$, где D — область пространства $\mathbb{R}^m$, называется n раз дифференцируемой в точке $x_0 \in D$, если она имеет в этой точке и в некоторой ее окрестности $S(x_0, \delta)$ все частные производные $(n-1)$-го порядка, каждая из которых является дифференцируемой функцией в точке x_0.*

Теорема 2. *Если функция $f : D \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке $x_0 \in D$, то в этой точке выполняются равенства*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(x_0), \quad k, l = \overline{1, m}, \quad k \neq l. \quad (5)$$

◀ Из определения дважды дифференцируемой в точке x_0 функции следует, что частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_l}(x_0)$, $i, l = \overline{1, m}$, существуют. Вводя в рассмотрение выражение w и функции Φ, Ψ из теоре-

мы 1, равенство (2) запишем в виде

$$w = h_k\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0 + \theta_1 h_k e_k + h_l e_l) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)\right) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0 + \theta_1 h_k e_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)\right)\right). \qquad (6)$$

Поскольку $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ — дифференцируемая в точке x_0 функция, то справедливы равенства

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0 + \theta_1 h_k e_k + h_l e_l) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x_0)\,\theta_1 h_k + \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(x_0)\,h_l + \alpha_1 \theta_1 h_k + \alpha_2 h_l, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0 + \theta_1 h_k e_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x_0)\,\theta_1 h_k + \alpha_3 \theta_1 h_k,$$

где α_s, $s = 1, 2, 3$ — бесконечно малые при $x \to x_0$ функции.

Подставив (7) в (6), получим

$$w = h_k\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(x_0)\,h_l + \bar{\alpha}_1 h_k + \alpha_2 h_l\right), \qquad (8)$$

где $\alpha_1 = (\alpha_1 - \alpha_3)\,\theta_1$ — бесконечно малая при $x \to x_0$ функция. Действуя таким же образом, выражение (4) преобразуем к виду

$$w = h_l\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(x_0)\,h_k + \beta_1 h_l + \beta_2 h_k\right), \qquad (9)$$

где β_1, β_2 — бесконечно малые при $x \to x_0$ функции.

Приравняв правые части равенств (8) и (9), полагая при этом $h_k = h_l = h$ и сокращая на $h^2 \neq 0$, получаем равенство

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(x_0) + \tilde{\alpha} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(x_0) + \tilde{\beta}, \qquad (10)$$

где $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ — бесконечно малые при $x \to x_0$ функции.

Равенство

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(x_0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(x_0) = \gamma(x, x_0),$$

где $\gamma = \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}$ — бесконечно малая при $x \to x_0$ функция, означает, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(x_0). \blacktriangleright$$

При доказательстве теоремы использована формула (9), п. 13.2.

Обобщение теоремы 2 сформулируем в виде следствия.

Следствие. *Если функция f дифференцируема n раз в точке $x_0 \in D$, то любая ее смешанная производная n-го порядка*

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}},$$

взятая в этой точке, не зависит от порядка, в котором производилось дифференцирование.

◀ Рассмотрим при $1 < k \leqslant n - 1$ функцию

$$\varphi : x \mapsto \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_{k-2}} \dots \partial x_{i_1}}(x), \quad x \in S(x_0, \delta),$$

которая, по предположению, дважды дифференцируема в точке x. Тогда, согласно теореме 2, имеем:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}}(x) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k}}(x),$$

т. е. $\dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}(x) = \dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}(x)$, откуда

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \dots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \dots \partial x_{i_1}}(x_0) = \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \dots \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(x_0). \blacktriangleright$$

Из этого следствия получаем следующую форму записи любой частной производной n-го порядка n раз дифференцируемой в точке $x_0 \in D$ функции f:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}(x_0) = \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}}(x_0),$$

где $0 \leqslant k_i \leqslant n$ и $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i = n$.

13.9. Дифференциалы высших порядков. Предположим, что функция $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, дифференцируема n раз в точке $x_0 \in D$. Тогда, согласно определению из пункта 13.8 и следствию из теоремы 2 того же пункта, функция f имеет в этой точке и в некоторой ее окрестности $S(x_0, \delta)$ все частные производные до $(n-1)$-го порядка включительно, каждая из которых является дифференцируемой функцией в точке x_0, а смешанные производные функции f до n-го порядка включительно в этой точке не зависят от того, в какой последовательности производится частное дифференцирование.

Полный дифференциал df функции f в точке x_0 определен в пункте 13.1 как линейная форма $L : h \mapsto Lh$, действующая из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}$.

Из высказанных в начале этого пункта предположений относительно функции f следует, что в окрестности $S(x_0, \delta)$ определена функция $x \mapsto f'(x)h$, где $h \in \mathbb{R}^m$ — фиксированный вектор.

Числовая функция $x \mapsto f'(x)h$ векторного аргумента x дифференцируема в каждой точке $x \in S(x_0, \delta)$, так как ее частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f'(x)h) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) h_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_j, \quad i = \overline{1, m},$$

непрерывны $\forall x \in S(x_0, \delta)$. Следовательно, при фиксированном $h \in \mathbb{R}^m$ и при каждом $x \in S(x_0, \delta)$ определен дифференциал функции $x \mapsto f'(x)h$.

Определение. *Полным дифференциалом второго порядка (или вторым полным дифференциалом)* $d^2f(x_0)$ *функции* f *в точке* x_0, *отвечающим значению* h, *будем называть полный дифференциал функции* $x \mapsto f'(x)h$ *в этой точке.*

Согласно данному определению имеем

$$d^2f(x_0)(h) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, h_j\right)\Bigg|_{x=x_0} h_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\, h_i h_j. \tag{1}$$

Так как $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$, $i, j = \overline{1, m} \wedge i \neq j$, то второй полный дифференциал функции f в точке x_0 является симметричной квадратичной формой $h \mapsto \varphi(h)$, $h \in \mathbb{R}^m$.

Обычно полный второй дифференциал записывают в виде

$$d^2f(x_0)(h) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\, dx_i(h)\, dx_j(h), \tag{2}$$

где dx_i, dx_j — дифференциалы независимых переменных x_p, $p = \overline{1, m}$.

Полный дифференциал функции f n-го порядка (или n-й полный дифференциал) $d^nf(x_0)$, соответствующий значению h, определяется по индукции как полный дифференциал функции

$$x \mapsto \sum_{i_1, \ldots, i_{n-1}=1}^{m} \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_{n-1}} \cdots \partial x_{i_1}}(x)\, h_{i_{n-1}} \ldots h_{i_1}, \quad x \in S(x_0, \delta),$$

в точке x_0. Следовательно

$$d^nf(x_0)(h) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n=1}^{m} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \cdots \partial x_{i_1}}(x_0)\, dx_{i_n}(h)\, dx_{i_{n-1}}(h) \ldots dx_{i_1}(h). \tag{3}$$

Из предположений относительно функции f и следствия из теоремы 2, п. 13.8, получаем, что полный дифференциал n-го порядка n раз дифференцируемой в точке x_0 функции f является n-линейной симметричной формой компонент вектора h.

Кроме полных дифференциалов рассматривают также частные дифференциалы, например

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\, dx_1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\, dx_i dx_j, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j}(x_0)\, dx_k dx_i dx_j,$$

т. е. частные дифференциалы первого, второго, третьего порядков и т. д.

Отметим, что свойство инвариантности формы дифференциала не сохраняется в общем случае для дифференциалов высших порядков.

Пусть D — область пространства $\mathbb{R}^m$; f — отображение области D в пространство $\mathbb{R}^n$, каждая компонента которого f_k, $k = \overline{1, n}$, имеет

непрерывные в D все частные производные второго порядка; g — отображение некоторой области G, содержащей множество $f(D)$, в пространство $\mathbb{R}$, причем функция g имеет непрерывные в G все вторые частные производные по переменным f_j, $j = \overline{1, n}$.

Тогда композиция $F = g \circ f$ имеет дифференциал второго порядка $\forall\, x \in D$. Вычислим $d^2F(x)(h)$, используя при этом инвариантность формы дифференциала $dF(x)(h)$:

$$dF(x)(h) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y(x))\, dy_k(x)(h), \quad y(x) = f(x).$$

Применяя формулу (7), п. 13.7, для вычисления дифференциала произведения двух функций, получаем

$$d^2F(x)(h) = \sum_{k=1}^{n} d\left(\frac{\partial g}{\partial y_k}(y(x))\, dy_k(x)(h)\right)(h) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} d\left(\frac{\partial g}{\partial y_k}(y(x))\right)(h)\, dy_k(x)(h) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y(x))\, d^2y_k(x)(h). \tag{9}$$

Теперь воспользуемся инвариантностью формы дифференциала функции $\frac{\partial g}{\partial y_k}$ и выпишем в явном виде дифференциал $d^2y_k(x)(h)$. При этом формула (9) приобретает вид

$$d^2F(x)(h) = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_k}(y(x))\, dy_i(x)(h)\, dy_k(x)(h) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y(x)) \sum_{j,l=1}^{m} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_j \partial x_l}(x)\, h_j h_l. \tag{10}$$

Формулы для вычисления дифференциалов высших порядков сложных функций значительно усложняются с повышением порядка, а инвариантность их формы не сохраняется уже для дифференциала второго порядка, в чем убеждаемся, рассмотрев формулу (10).

И все же в одном случае отображения $f: D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$, отличном от постоянного, инвариантность формы дифференциалов высших порядков сохраняется. Это случай линейного отображения $f: x \mapsto Ax$, где $A = (a_{kj})$, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$,— матрица с постоянными коэффициентами a_{kj}. В этом случае имеем

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} x_j, \quad k = \overline{1, n}; \quad d^i f_k(x) = 0 \quad \forall\, i > 1$$

и, таким образом, инвариантность формы сохраняется для дифференциалов высших порядков.

В заключение приведем формулу, которой пользуются при вычислении дифференциала n-го порядка функции нескольких независимых переменных:

$$d^n f(\boldsymbol{x}) = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^n f(\boldsymbol{x}). \qquad (11)$$

Формулой (11) пользуются следующим образом: возводят формально в n-ю степень выражение в скобках и затем символ f приставляют справа рядом со степенью оператора дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_j}$; например,

$$d^2 f(x, y) = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x, y) =$$

$$= \left(dx^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2dxdy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + dy^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x, y) =$$

$$= dx^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2dxdy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + dy^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\, dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\, dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\, dy^2,$$

$$d^3 f(x, y) = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x, y) =$$

$$= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y)\, dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y)\, dx^2 dy +$$

$$+ 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y)\, dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y)\, dy^3$$

и т. д.

13.10. Формула Тейлора. Как и в случае отображений $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{J} = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, формула Тейлора для функций нескольких переменных играет важную роль при исследовании их поведения в окрестности фиксированной точки, а также может быть использована для приближенных вычислений.

Теорема 1. *Пусть функция $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$ $n+1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности $S(x_0, \delta) \subset D$. Тогда $\forall\, x \in S(x_0, \delta)$ справедлива формула Тейлора*

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + df(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) + \frac{1}{2!} d^2 f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) + \cdots + \frac{1}{n!} d^n f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} (\boldsymbol{x}_0 + \theta \boldsymbol{h})(\boldsymbol{h}), \qquad (1)$$

где $0 < \theta < 1$, а значения дифференциалов вычисляются при $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$.

◀ Обозначим $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ и рассмотрим при фиксированном $\boldsymbol{x} \in S(\boldsymbol{x}_0, \delta)$ функцию $\varphi : t \mapsto f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h})$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда $\Delta f(\boldsymbol{x}_0) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \varphi(1) - \varphi(0)$. В силу предположений теоремы, функция φ имеет при $0 \leqslant t \leqslant 1$ дифференциалы до $(n+1)$-го включительно. Применяя к функции φ формулу Тейлора (12), п. 7.1, записан-

ную в дифференциалах, с остаточным членом в форме Лагранжа, имеем

$$\Delta f(x_0) = d\varphi(0)(1) + \frac{1}{2!} d^2\varphi(0)(1) + \cdots + \frac{1}{n!} d^n\varphi(0)(1) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}\varphi(\theta)(1), \quad 0 < \theta < 1. \tag{2}$$

Поскольку компоненты вектора $y = x_0 + th$ линейно зависят от h_i, то $d^k\varphi(0)(1) = d^k f(x_0)(h)$, $k = \overline{1, n}$, $d^{n+1}\varphi(\theta)(1) = d^{n+1} f(x_0 + \theta h)(h)$ и, таким образом, получаем формулу (1). ▶

Докажем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, которую называют *локальной формулой Тейлора* для числовой функции нескольких переменных. Этой формулой воспользуемся при исследовании числовых функций нескольких переменных на локальные экстремумы.

Теорема 2. *Пусть* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, n *раз дифференцируема в точке* $x_0 \in D$ *функция. Тогда справедлива формула*

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(h) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0)(h) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0)(h) + o(|h|^n), \quad |h| \to 0, \tag{3}$$

которую называют формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Дифференциалы в формуле (3) вычисляются при $h = x - x_0$.

◀ При $n = 1$ формула (3) — это определение дифференцируемой в точке x_0 функции:

$$f(x) - f(x_0) = df(x_0) + o(|h|).$$

Воспользуемся индукцией по n. Предположим, что формула (3) справедлива для $n - 1$ $(n \geqslant 2)$, т. е. справедливо равенство

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(h) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0)(h) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{(n-1)!} d^{n-1} f(x_0)(h) + o(|h|^{n-1}). \tag{4}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi : h \mapsto f(x_0 + h) - f(x_0) - df(x_0)(h) - \cdots - \frac{d^n f(x_0)(h)}{n!}, \tag{5}$$

$$h \in S(x_0, \delta),$$

где $\delta > 0$ — достаточно малое число.

Вычислим $\frac{\partial \varphi}{\partial h_j}(h)$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Приняв во внимание, что дифференциал $d^k f(x_0)(h)$, $k = \overline{1, n}$, является k-линейной симметричной формой переменных $h_1, h_2, \ldots, h_m$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial h_j}(d^k f(x_0)) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial h_j}\left(\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}}(x_0)\, h_{i_k} h_{i_{k-1}} \ldots h_{i_1}\right) =$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_j \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}}(x_0)\, h_{i_{k-1}} h_{i_{k-2}} \ldots h_{i_1} +$$

$$+ \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-2}, i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_j \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}}(x_0)\, h_{i_k} h_{i_{k-2}} \ldots h_{i_1} + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{i_2, i_3, \ldots, i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_2} \partial x_j}(x_0)\, h_{i_k} h_{i_{k-1}} \ldots h_{i_2} =$$

$$= k \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}=1}^{m} \left(\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right)\right)\Bigg|_{x=x_0} h_{i_{k-1}} \ldots h_{i_1} =$$

$$= k d^{k-1} \psi_j(x_0), \tag{6}$$

где $\psi_j(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, $j = \overline{1, m}$.

В результате находим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial h_j}(h) = \psi_j(x_0 + h) - \psi_j(x_0) - d\psi_j(x_0) - \ldots - \frac{d^{n-1}\psi_j(x_0)}{(n-1)!}, \tag{7}$$

$$j = \overline{1, m}.$$

В силу предположения индукции (см. формулу (4)) имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial h_j}(h) = o(|h|^{n-1}), \quad j = \overline{1, m}. \tag{8}$$

Согласно формуле конечных приращений (формула (1), п. 13.4), в окрестности $S(x_0, \delta)$ найдутся такие точки ξ_j, $j = \overline{1, m}$, что

$$\varphi(h) - \varphi(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial h_1}(\xi_1) h_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial h_2}(\xi_2) h_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial h_m}(\xi_m) h_m. \tag{9}$$

Принимая во внимание соотношение (8) и равенство $\varphi(0) = 0$, получаем $\forall\, j = \overline{1, m}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial h_j}(\xi_j) h_j = o(|h|^{n-1}) h_j = o(|h|^n),$$

откуда $\varphi(h) = o(|h|^n)$. ▶

§ 14. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

14.1. Дифференцируемые отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$. Пусть D — область пространства $\mathbb{R}^m$, f — отображение этой области в пространство $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. *Отображение f называется дифференцируемым в точке $x_0 \in D$, если существует такое линейное отображение $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, что выполняется соотношение*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0. \tag{1}$$

При этом L называется *полным дифференциалом* отображения f в точке x_0 и обозначается $L = df(x_0)$.

В определении 1 вектор $x - x_0$ принадлежит пространству $\mathbb{R}^m$ и поскольку $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, то $L(x - x_0) \in \mathbb{R}^n$, следовательно, нормы в числителе и знаменателе дроби в (1) являются соответственно нормами в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$.

Если отображение f дифференцируемо в точке x_0, то его полный дифференциал $df(x_0)$ определен на всем пространстве $\mathbb{R}^m$ и на произвольном векторе $h \in \mathbb{R}^m$ принимает значение $df(x_0)(h) = Lh$.

Под матрицей линейного отображения $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ относительно стандартных базисов в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ понимается $n \times m$-матрица $A = (a_{ij})$, j-й столбец которой образован коэффициентами разложение вектора Le_j:

$$Le_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i.$$

Определение 2. *Полной производной $f'(x_0)$ дифференцируемого в точке $x_0 \in D$ отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$, будем называть матрицу A линейного отображения L.*

Согласно этому определению имеем

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h, \quad h \in \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

Определение 3. *Если отображение f дифференцируемо в каждой точке $x \in D$, то f называется дифференцируемым в области D.*

Пусть отображение f дифференцируемо в области D. Тогда при каждом фиксированном $x \in D$ полный дифференциал $df(x) = L$ есть линейное отображение $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, т. е. функция, ставящая в соответствие каждому вектору $h \in \mathbb{R}^m$ вектор Lh, $Lh \in \mathbb{R}^n$. А поскольку отображение f дифференцируемо $\forall x \in D$, то каждому $x \in D$ соответствует полная производная $f'(x)$ этого отображения. Следовательно, дифференцируемое в области D отображение f порождает в этой области функцию $x \mapsto f'(x)$, принимающую в каждой точке $x \in D$ значение в пространстве $\mathfrak{M}$ матриц.

Если отображение f дифференцируемо в точке $x_0 \in D$, то соотношение (1) можно записать в виде

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x, x_0)|x - x_0|, \tag{3}$$

где $\alpha \to 0$ при $x \to x_0$. При этом $\alpha(x_0, x_0)$ можно определить произвольно, но при $x \neq x_0$ отображение α определяется единственным

(согласно теореме 1 этого пункта) образом по формуле

$$\alpha(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{|x - x_0|}.$$

Будем для определенности считать, что $\alpha(x_0, x_0) = 0$.

Формула (3) устанавливает запись приращения дифференцируемого отображения в фиксированной точке. Из этой формулы следует, что отображение f непрерывно в каждой точке, в которой оно дифференцируемо.

Докажем теорему о единственности линейного отображения L в соотношении (1) для дифференцируемого в точке x_0 отображения f.

Теорема 1. *Пусть $f: D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$, и $x_0 \in D$. Если существуют такие линейные отображения L_1 и L_2 пространства $\mathbb{R}^m$ в пространство $\mathbb{R}^n$, что*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - L_j(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0, \quad j = 1, 2, \tag{4}$$

то $L_1 = L_2$.

◀ Обозначим $x - x_0 = h$, $L_1 - L_2 = \tilde{L}$. Тогда, в силу линейности отображения $\tilde{L}$, имеем

$$\tilde{L}h = (f(x_0 + h) - f(x_0) - L_2 h) - (f(x_0 + h) - f(x_0) - L_1 h). \tag{5}$$

Из оценки $|\tilde{L}h| \leqslant |f(x_0 + h) - f(x_0) - L_1 h| + |f(x_0 + h) - f(x_0) - L_2 h|$ и соотношений (4) получаем, что $\lim\limits_{h \to 0} \frac{|\tilde{L}h|}{|h|} = 0$, откуда следует, что при фиксированном $h \neq 0$ выполнено соотношение

$$\lim_{t \to 0} \frac{|\tilde{L}(th)|}{|th|} = 0. \tag{6}$$

Так как $\tilde{L}$ — линейное отображение, то левая часть в предельном соотношении (6) не зависит от t, в силу чего $\tilde{L}h = 0 \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^m$. ▶

Установим критерий дифференцируемости отображения $f: D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$.

Теорема 2. *Пусть D — область пространства $\mathbb{R}^m$, f — отображение D в $\mathbb{R}^n$ и $x_0 \in D$ — произвольная точка. Отображение f дифференцируемо в точке x_0 тогда и только тогда, когда каждая компонента f_j, $j = \overline{1, n}$, этого отображения является дифференцируемой числовой функцией в этой точке.*

◀ *Необходимость.* Пусть отображение f дифференцируемо в точке x_0. Тогда выполняется соотношение (1), а j-я компонента вектора $f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)$ имеет следующий вид:

$$f_j(x) - f_j(x_0) - L_j(x - x_0), \quad j = \overline{1, n},$$

где $L_j : \boldsymbol{h} \mapsto L_j\boldsymbol{h}$ — линейная форма из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}$, причем этой форме соответствует матрица-строка, состоящая из m элементов, так как отображению L соответствует матрица, имеющая m столбцов и n строк.

Поскольку абсолютная величина каждой компоненты произвольного вектора пространства $\mathbb{R}^n$ не превосходит его нормы, то из соотношения (1) получим n соотношений

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_j(x) - f_j(x_0) - L_j(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{7}$$

из которых следует, что каждая числовая функция f_j дифференцируема в точке $x_0 \in D$. При этом $L_j \cong f_j'(x_0) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x_0)\ \frac{\partial f_j}{\partial x_2}(x_0)\ \ldots\right.$ $\left.\ldots\ \frac{\partial f_j}{\partial x_m}(x_0)\right)$ и выполняются равенства

$$f_j(x) - f_j(x_0) = f_j'(x_0)(x - x_0) + \alpha_j(x, x_0)|x - x_0|, \quad j = \overline{1, n}, \tag{8}$$

где $\alpha_j(x, x_0) \to 0$ при $x \to x_0$.

Достаточность. Пусть каждая компонента f_j отображения $\boldsymbol{f}$ дифференцируема в точке x_0. Тогда выполнены равенства (8), которые можно записать в виде одного векторного равенства

$$\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{f}(x_0) = L(x - x_0) + \boldsymbol{\alpha}(x, x_0)|x - x_0|, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{\alpha}(x, x_0) \to 0$ при $x \to x_0$, L — линейное отображение пространства $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$, которому соответствует матрица (полная производная отображения $\boldsymbol{f}$)

$$\boldsymbol{f}'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x_0) \end{pmatrix}, \tag{10}$$

называемая *матрицей Остроградского — Якоби* отображения $\boldsymbol{f}$ в точке x_0. Из равенства (9) следует соотношение (1). ▶

В случае, когда $m = n$, определитель матрицы (10)

$$\frac{\mathcal{D}(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(x_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{vmatrix} \tag{11}$$

называют *якобианом отображения* $\boldsymbol{f}$, вычисленным в точке x_0.

Следующая теорема устанавливает правило дифференцирования сложного отображения.

Теорема 3. *Пусть D — область пространства $\mathbb{R}^m$; f — отображение множества D в пространство $\mathbb{R}^n$, дифференцируемое в точке $x_0 \in D$; g — отображение некоторой области $D_1 \subset \mathbb{R}^n$, содержащей множество $f(D)$, в пространство $\mathbb{R}^p$, причем отображение g дифференцируемо в точке $f_0 = f(x_0)$. Тогда композиция $F = g \circ f : D \to \mathbb{R}^p$ дифференцируема в точке x_0 и при этом*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f_0) f'(x_0), \tag{12}$$

◀ Из дифференцируемости отображения f в точке x_0 имеем

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \varphi(x, x_0), \tag{13}$$

где $|\varphi(x, x_0)| = o(|x - x_0|)$ при $x \to x_0$.

Из дифференцируемости отображения g в точке $y_0 = f(x_0)$ следует, что

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0)(y - y_0) + \psi(y, y_0), \tag{14}$$

где $|\psi(y, y_0)| = o(|y - y_0|)$ при $y \to y_0$, $\psi(y, y_0) = 0$ при $y = y_0$. Рассмотрим приращение отображения $F = g \circ f$ в точке x_0:

$$F(x) - F(x_0) = g(f(x)) - g(f(x_0)).$$

Согласно формуле (14), имеем

$$F(x) - F(x_0) = g'(f_0)(f(x) - f(x_0)) + \psi(f(x), f(x_0)).$$

Подставив вместо $f(x) - f(x_0)$ правую часть формулы (13), получим

$$F(x) - F(x_0) = g'(f_0) f'(x_0)(x - x_0) + g'(f_0)\varphi(x, x_0) + \psi(f(x), f(x_0)).$$

Оценим по норме векторы $g'(f_0)\varphi(x, x_0)$ и $\psi(f(x), f(x_0))$. Имеем

$$|g'(f_0)\varphi(x, x_0)| \leqslant \|g'(f_0)\| \cdot |\varphi(x, x_0)| = o(|x - x_0|),$$

$$|\psi(f(x), f(x_0))| = o(|f(x) - f(x_0)|) = o(|x - x_0|),$$

так как $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \|f'(x_0)\| |x - x_0| + |\varphi(x, x_0)| \leqslant M|x - x_0|$, $M = \text{const}$. Из полученных оценок следует, что

$$F(x) - F(x_0) = g'(f_0) f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|),$$

значит, отображение F дифференцируемо в точке x_0, а его полная производная вычисляется по формуле (11). ▶

Теорема 4 *(достаточное условие дифференцируемости отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$). Пусть D — область в $\mathbb{R}^m$, $f : D \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$. Для того чтобы отображение f было дифференцируемым в точке x_0, достаточно, чтобы все частные производные*

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j}, \quad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m},$$

существовали в некоторой окрестности $S(x_0, \delta)$, а в самой точке x_0 были непрерывными функциями.

◀ Если все частные производные функций $f_k : D \to \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n}$, существуют в $S(x_0, \delta)$, а в самой точке x_0 непрерывны, то на основании

утверждения теоремы 2, п. 13.4, заключаем, что f_k — дифференцируемые в точке x_0 функции. Применив теорему 2, приходим к выводу, что f — дифференцируемое в точке x_0 отображение. ▶

Определение 2. *Дифференцируемое отображение f области $D \subset \mathbb{R}^m$ в пространство $\mathbb{R}^n$ называется непрерывно дифференцируемым в области D, если f' — непрерывная в области D функция, т. е.* $\forall\, x \in D$ *и* $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ *такое, что*

$$\|f'(y) - f'(x)\| < \varepsilon, \text{ если } y \in D \text{ и } |y - x| < \delta.$$

Теорема 5. *Пусть f — отображение области $D \subset \mathbb{R}^m$ в пространство $\mathbb{R}^n$. Тогда f непрерывно дифференцируемо в области D в том и только том случае, когда все частные производные $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, существуют и непрерывны в D.*

◀ *Необходимость.* Пусть отображение f непрерывно дифференцируемо в области D. Тогда имеем

$$\left|\frac{\partial f_k}{\partial x_l}(y) - \frac{\partial f_k}{\partial x_l}(x)\right| = |f'(y)e_l - f'(x)e_l|, \quad j = \overline{1, m}, \ k = \overline{1, n},$$

где e_l — вектор стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^m$, $x \in D$, $y \in D$. Из неравенства

$$|f'(y)e_l - f'(x)e_j| \leqslant \|f'(y) - f'(x)\| < \varepsilon$$

при условии, что $|y - x| < \delta$, следуют неравенства

$$\left|\frac{\partial f_k}{\partial x_l}(y) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)\right| < \varepsilon, \quad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m},$$

означающие, что все частные производные отображения f непрерывны в каждой точке $x \in D$.

Достаточность. Пусть частные производные $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, существуют и непрерывны в области D. Тогда, согласно теореме 2, п. 13.4, функции $f_k : D \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в каждой точке $x \in D$, а матрица-строка $\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x)\ \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(x)\ \ldots\ \frac{\partial f_k}{\partial x_m}(x)\right)$ непрерывна в области D.

Следовательно, функция $x \mapsto f'(x)$ также непрерывна в этой области. ▶

14.2. Частные производные по векторным аргументам. Напомним, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$, дифференцируемо в точке $x_0 \in D$, если существует такое линейное отображение $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, что приращение $\Delta f(x_0)$ представимо в виде

$$\Delta f(x_0) = L(x - x_0) + o(|x - x_0|), \quad x \to x_0.$$

Пусть $x \in X$, $y \in Y$, $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, и определено отображение $f : X \times Y \to \mathbb{R}^p$, где X — область из $\mathbb{R}^m$, Y — область из $\mathbb{R}^n$.

Определение. *Отображение f называется дифференцируемым по векторному аргументу x в точке $(x_0, y_0) \in$*

$\in X \times Y$, *если существует такое линейное отображение* $L_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, *что частное приращение* $\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x, y_0) - f(x_0, y_0)$ *представимо в виде*

$$\Delta_x f(x_0, y_0) = L_x(x - x_0) + o(|x - x_0|).$$

Согласно теореме 2, п. 14.1, отображение f дифференцируемо по переменной x тогда и только тогда, когда функции f_j, $j = \overline{1, p}$, дифференцируемы по x в точке (x_0, y_0), т. е.

$$\Delta f_j(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0, y_0)(x_i - x_i^0) + \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij}(x, x_0)(x_i - x_i^0)$$
$$j = \overline{1, p},$$

где $\beta_{ij}(x, x_0) \to 0$ при $x \to x_0$.

Линейному отображению L_x соответствует матрица

$$f'_x(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x_0, y_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_m}(x_0, y_0) \end{pmatrix},$$

которую будем называть *частной производной* отображения f по векторному аргументу x.

Аналогично вводится понятие дифференцируемости отображения по векторному аргументу y. При этом частной производной $f'_y(x_0, y_0)$ называется матрица

$$f'_y(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}(x_0, y_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_p}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial y_n}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Если f — дифференцируемое в точке (x_0, y_0) отображение, то приращение $\Delta f(x_0, y_0)$ можно представить в виде

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) +$$
$$+ o(|x - x_0|) + o(|y - y_0|), \quad x \to x_0, \quad y \to y_0.$$

14.3. Теорема о конечных приращениях. Прежде чем формулировать и доказывать эту теорему для отображений $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$, докажем лемму.

Лемма. *Пусть* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ — *непрерывные отображения, дифференцируемые на интервале* $\mathcal{J} =]a, b[$, *причем*

$$|f'(x)| \leqslant g'(x) \qquad \forall x \in \mathcal{J}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$|f(b)-f(a)|\leqslant g(b)-g(a). \tag{1}$$

◀ Пусть задано произвольное $\varepsilon>0$. Покажем, что при выполнении условий леммы справедливо неравенство

$$|f(b)-f(a)|\leqslant g(x)-g(a)+\varepsilon(x-a)+\varepsilon \quad \forall x\in[a,\ b]. \tag{2}$$

Допустим, что неравенство (2) выполняется не для всех $x\in[a,\ b]$. Тогда на некотором множестве $V\subset[a,\ b]$ выполнено неравенство $\varphi(x)>0$, где $\varphi(x)=|f(x)-f(a)|-(g(x)-g(a)+\varepsilon(x-a)+\varepsilon)$. Покажем, что $V=\varnothing$. Сначала докажем, что множество V открытое. Действительно, поскольку $\varphi\in C[a,\ b]$, то множество $V\subset[a,\ b]$, на котором $\varphi>0$, открыто (см. теорему 3, п. 7.5, гл. 2). Допустим, что множество V непусто. Тогда $\exists \inf V=c$. Поскольку $\varphi(a)<0$, то $\exists\,\delta>0$ такое, что $\varphi(x)<0 \quad \forall x\in]a,\ a+\delta[$, поэтому $c>a$. Докажем, что $c\notin V$. Если бы $c\in V$, то из непрерывности функции φ в точке c и из того, что множество V открытое и $\varphi(c)>0$, следовало бы, что существует такая окрестность $S(c,\ \delta_1)\subset V$, что $\forall x\in S(c,\ \delta_1)\wedge x<c\Rightarrow\varphi(x)>0$, а это противоречит тому, что $c=\inf V$. Таким образом, $c\notin V$. Докажем также, что $c<b$. Действительно, если бы было $c=b$, то это означало бы, что множество V состоит из одной точки $x=b$ и поэтому не являлось бы открытым. Так как $a<c<b$, то в силу предположений имеем

$$|f'(c)|\leqslant g'(c). \tag{3}$$

Так как $f'(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$, $g'(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{g(x)-g(c)}{x-c}$, то для заданного $\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta_2>0:\forall x\in S(c,\ \delta_2)\cap V$ имеем

$$|f'(c)|\geqslant\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right|-\frac{\varepsilon}{2},\quad g'(c)\leqslant\frac{g(x)-g(c)}{x-c}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Из этих неравенств, неравенства (3) и из того, что $x>c$, если $x\in S(c,\ \delta_2)\cap V$, следует, что

$$|f(x)-f(c)|\leqslant g(x)-g(c)+\varepsilon(x-c). \tag{4}$$

Поскольку $c\notin V$, то должно выполняться неравенство

$$|f(c)-f(a)|\leqslant g(c)-g(a)+\varepsilon(c-a)+\varepsilon. \tag{5}$$

Из неравенств (4) и (5) получим неравенство

$$|f(x)-f(a)|\leqslant|f(x)-f(c)|+|f(c)-f(a)|\leqslant$$
$$\leqslant g(x)-g(a)+\varepsilon(x-a)+\varepsilon \quad \forall x\in S(c,\ \delta_2)\cap V,$$

из которого следует, что $\inf V>c$, а это противоречит тому, что $c=\inf V$. Таким образом, $V=\varnothing$, и неравенство (2) выполнено $\forall x\in[a,\ b]$. Взяв в этом неравенстве $x=b$ и перейдя к пределу в правой его части при $\varepsilon\to+0$, получим

$$|f(b)-f(a)|\leqslant g(b)-g(a). \ ▶$$

Теорема (о конечных приращениях). *Если отображение* $f:D\to\mathbb{R}^n$, $D\subset\mathbb{R}^m$, *непрерывно и дифференцируемо в области* D,

то $\forall\, a,\ b \in D$ *таких, что множество точек* $[a, b] = \{a + t(b - a);\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ *целиком содержится в* D, *справедливо неравенство*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \sup_{\xi \in]a,\ b[} \|f'(\xi)\| \cdot |b - a| =$$

$$= \sup_{0<\theta<1} \|f'(a + \theta(b - a))\| \cdot |b - a|. \tag{6}$$

Неравенство (6) называется *формулой Лагранжа конечных приращений.*

◀ Рассмотрим вектор-функцию $\varphi : t \to f(a + t(b - a))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, где a, b — произвольные точки из D, причем $[a, b] \subset D$. Функция φ дифференцируема на интервале $0 < t < 1$, а ее производная φ' в произвольной точке $t \in]0, 1[$ вычисляется по формуле (11), п. 14.1:

$$\varphi'(t) = f'(a + t(b - a))(b - a). \tag{7}$$

Принимая во внимание оценку

$$|\varphi'(t)| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \|f'(a + \theta(b - a))\| \, |b - a|$$

и полагая $a = 0$, $b = 1$, $f(t) = \varphi(t)$, $g(t) = M|b - a|t$, где $M = \sup_{\xi \in]a,\ b[} \|f'(\xi)\| = \sup_{0<\theta<1} \|f'(a + \theta(b - a))\|$, а затем применив лемму, получаем неравенство

$$|\varphi(1) - \varphi(0)| \leqslant g(1) - g(0),$$

эквивалентное неравенству (6). ▶

§ 15. ПРИНЦИП НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Пусть X — метрическое пространство.

Определение 1. *Оператор (отображение)* $A : X \to X$ *называется с ж и м а ю щ и м, если*

$$\exists\, \theta \in [0,\ 1[\ \wedge\ \forall\, x,\ y \in X : \rho(Ax,\ Ay) \leqslant \theta\rho(x,\ y).$$

Из определения вытекает, что оператор A удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, равномерно непрерывен (см. п. 7.8, гл. 2).

Определение 2. *Точка* $x \in X$ *называется н е п о д в и ж н о й точкой оператора* A, *если* $Ax = x$, *т. е. если она является решением операторного уравнения* $x = Ax$.

Теорема (К а ч ч и о п о л л и — П и к а р а — Б а н а х а). *Всякий сжимающий оператор* A, *отображающий полное метрическое пространство* X *в себя, имеет в этом пространстве единственную неподвижную точку.*

◀ Пусть x_0 — произвольная точка метрического пространства X. Рассмотрим последовательность $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1$, ..., $x_n = Ax_{n-1}$, ... Поскольку оператор A отображает пространство X в себя, то $x_n \in X$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. Действительно, используя определение фундаментальной последовательности и условие сжатия, получим $\forall\, n \geqslant 1$

$$\rho(x_n,\ x_{n+1}) = \rho(Ax_{n-1},\ Ax_n) \leqslant \theta\rho(x_{n-1},\ x_n) \leqslant$$

$$\leqslant \theta^2\rho(x_{n-2},\ x_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant \theta^n\rho(x_1,\ x_0).$$

Используя неравенство треугольника и полученное неравенство, для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и всех $p > 0$, $p \in \mathbb{N}$, получаем неравенство

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leqslant$$

$$\leqslant (\theta^n + \theta^{n+1} + \cdots + \theta^{n+p-1})\,\rho(x_1, x_0) \leqslant \frac{\theta^n}{1-\theta}\,\rho(x_1, x_0).$$

При всех достаточно больших n и всех $p > 0$, $p \in \mathbb{N}$, правая часть полученного неравенства становится меньше любого $\varepsilon > 0$, следовательно, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. Так как метрическое пространство X полное, то последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому элементу x этого пространства:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad x \in X.$$

Покажем, что x — неподвижная точка оператора A. Поскольку этот оператор непрерывен, то последовательность $\{x_{n+1} = Ax_n\}$ сходится к Ax, а так как $\{x_{n+1}\}$ также сходится к x, то $x = Ax$ и x является неподвижной точкой оператора A.

Докажем единственность неподвижной точки оператора A. Допустим, что существуют две неподвижные точки этого оператора: $x = Ax$, $y = Ay$, $x, y \in X$ и $x \neq y$, т. е. $\rho(x, y) > 0$. Тогда $\rho(Ax, Ay) \leqslant \theta\rho(x, y)$. Так как $Ax = x$, $Ay = y$, то получили неравенство $\rho(x, y) \leqslant \theta\rho(x, y)$, а поскольку $\rho(x, y) > 0$, то $1 \leqslant \theta$, что противоречит определению числа θ. Следовательно, оператор A имеет единственную неподвижную точку. ▶

§ 16. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

16.1. Определение неявной функции. Пусть задано отображение $f: X \times Y \to Z$, где $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $Z \subset \mathbb{R}^n$, причем множество Z содержит нулевой элемент пространства $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим уравнение

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

Предположим, что существуют непустые множества $E \subset X$ и $F \subset Y$ такие, что $\forall x \in E$ уравнение (1) имеет единственное решение $y \in F$. Тогда можно определить отображение $\varphi: E \to F$, поставив в соответствие каждому $x \in E$ то значение $y = \varphi(x)$, $y \in F$, которое при этом x является решением уравнения (1). В этом случае уравнение (1) определяет y как некоторое отображение $E \to F: x \mapsto \varphi(x)$, которое называется *неявным отображением* (при $n = 1$ — функцией), определяемым уравнением (1). Отображение φ обладает свойством

$$f(x, \varphi(x)) \equiv 0 \qquad \forall x \in E, \tag{2}$$

или, что то же самое: $\forall (x, y) \in E \times F$ тождество (2) эквивалентно равенству $y = \varphi(x)$.

Покажем это на примерах.

Пример 1. Уравнение

$$y^2 - (x^2 - 1)^2 = 0 \tag{3}$$

определяет на всем множестве $\mathbb{R}$ восемь непрерывных функций $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

1) $y = x^2 - 1$; 2) $y = 1 - x^2$; 3) $y = |x^2 - 1|$; 4) $y = -|1 - x^2|$;

5) $y = \begin{cases} x^2 - 1, & -\infty < x < -1, \\ 1 - x^2, & -1 \leqslant x < +\infty; \end{cases}$ 6) $y = \begin{cases} 1 - x^2, & -\infty < x < -1, \\ x^2 - 1, & -1 \leqslant x < +\infty; \end{cases}$

7) $y = \begin{cases} x^2 - 1, & -\infty < x < 1, \\ 1 - x^2, & 1 \leqslant x < +\infty; \end{cases}$ 8) $y = \begin{cases} -x^2 + 1, & -\infty < x < 1, \\ x^2 - 1, & 1 \leqslant x < +\infty. \end{cases}$

Исследуем некоторые из них.

Пусть (x_0, y_0) — произвольная точка, не совпадающая ни с одной из точек $(-1, 0)$, $(1, 0)$ и лежащая на одной из непрерывных кривых, определяемых уравнением (3). В этом случае уравнение (3) определяет четыре непрерывных кривых, проходящих через точку (x_0, y_0), например, если $|x_0| < 1$, $y_0 > 0$, то через точку (x_0, y_0) проходят кривые 2), 3), 5), 8).

Если же рассматривать достаточно малую окрестность указанной точки (x_0, y_0), то в этой окрестности существует лишь одна непрерывная кривая (при $|x_0| < 1$, $y_0 > 0$ это будет кривая $y = 1 - x^2$), определяемая уравнением (3), которой принадлежит точка (x_0, y_0).

Размеры окрестности точки (x_0, y_0), в которой уравнение (3) определяет единственную непрерывную кривую, должны быть такими, чтобы в нее не попали другие непрерывные кривые, в частности, чтобы в нее не попали точки $(-1, 0)$ и $(1, 0)$, через каждую из которых проходит восемь непрерывных кривых. Эти точки называют *критическими*.

В дальнейшем будем называть точку (x_0, y_0) критической для уравнения $f(x, y) = 0$, если $f(x_0, y_0) = 0$ и, кроме того, не существует окрестности этой точки, в которой уравнение $f(x, y) = 0$ определяло бы единственную непрерывную функцию $y : x \mapsto y(x)$, которая при $x = x_0$ принимает значение y_0. Здесь единственность следует понимать в том смысле, что если уравнение $f(x, y) = 0$ определяет две непрерывные функции y_1 и y_2, соответственно в окрестностях $S(x_0, \delta_1)$ и $S(x_0, \delta_2)$, принимающие значения y_0 при $x = x_0$, то на пересечении $S(x_0, \delta_1) \cap S(x_0, \delta_2)$ эти функции совпадают.

Отметим, что разрывных функций, удовлетворяющих уравнению (3), существует бесконечное множество, например, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ функция

$$y_n(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < n, \\ 1 - x^2, & x \geqslant n, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R},$$

удовлетворяет уравнению (3).

Пример 2. Показать, что уравнение

$$\sin y - \sin x = 0 \tag{4}$$

определяет на множестве $\mathbb{R}$ бесконечное множество непрерывных функций.

Действительно, уравнение (4) имеет решения

$$y = x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$
$$y = -x + (2n + 1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Графики полученных функций образуют на плоскости xOy квадратную сетку, из звеньев которой строится вся совокупность непрерывных решений. Узлы этой сетки — точки $\left(\left(n + k + \frac{1}{2}\right)\pi, \left(n - k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$, где $n, k \in \mathbb{Z}$, являются критическими точками уравнения (4).

Пусть точка $M_0 = (x_0, y_0)$ не совпадает с критической и принадлежит одной из кривых, определяемых уравнением (4). Тогда существует такая окрестность $\bar{S}(M_0, \delta)$ этой точки, что уравнение (4) определяет в ней единственную непрерывную функцию, которая при $x = x_0$ принимает значение y_0. Число $\delta > 0$ выбирается так, чтобы в окрестность $\bar{S}(M_0, \delta)$ не попали узлы сетки и чтобы эта окрестность не содержала других непрерывных кривых, определяемых уравнением (4).

Рассмотренные примеры показывают, что теоремы, условия которых должны обеспечить существование единственного непрерывного решения уравнения (1), носят локальный характер.

16.2. Теоремы о неявной функции. Пусть задано уравнение

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m, y) = 0,$$

которое запишем в виде $f(\boldsymbol{x}, y) = 0$.

Здесь $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $\boldsymbol{x} \in S(\boldsymbol{x}_0, a)$, $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m)$, $y \in S(y_0, b)$, $S(y_0, b) =]y_0 - b, y_0 + b[$. Обозначим $D = S(\boldsymbol{x}_0, a) \times S(y_0, b)$.

Сначала докажем теорему о существовании неявной функции, определяемой уравнением (1) в некоторой окрестности точки $(\boldsymbol{x}_0, y_0)$.

Теорема 1. *Пусть функция $f: D \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:* 1) *f непрерывна в D и $f(\boldsymbol{x}_0, y_0) = 0$;* 2) *в D существует частная производная f'_y, непрерывная в точке $(\boldsymbol{x}_0, y_0)$;* 3) *$f'_y(\boldsymbol{x}_0, y_0) \neq 0$.*

Тогда $\exists\, \delta \in]0, a[\wedge \exists\, \varepsilon \in]0, b[$ такие, что уравнение (1) определяет единственную функцию

$$y: \overline{S}(\boldsymbol{x}_0, \delta) \to \overline{S}(y_0, \varepsilon), \tag{2}$$

непрерывную в шаре $\overline{S}(\boldsymbol{x}_0, \delta)$, и такую, что $y(\boldsymbol{x}_0) = y_0$.

◀ Уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$y = Ay, \tag{3}$$

где оператор A определен равенством

$$A: y \to F(\boldsymbol{x}, y) \equiv y - \frac{f(\boldsymbol{x}, y)}{f'_y(\boldsymbol{x}_0, y_0)}, \quad \boldsymbol{x} \in \overline{S}(\boldsymbol{x}_0, a), \quad y \in \overline{S}(y_0, b).$$

Числовая функция $F: \overline{S}(\boldsymbol{x}_0, a) \times \overline{S}(y_0, b) \to \mathbb{R}$, согласно условиям 1) — 3) теоремы, непрерывна и имеет частную производную

$$F'_y: (\boldsymbol{x}, y) \mapsto 1 - \frac{f'_y(\boldsymbol{x}, y)}{f'_y(\boldsymbol{x}_0, y_0)},$$

равную нулю в точке $(\boldsymbol{x}_0, y_0)$. А поскольку функция f'_y непрерывна в точке $(\boldsymbol{x}_0, y_0)$, то $\forall\, \theta \in [0, 1[$ существует такое положительное число $\varepsilon < \min\{a, b\}$, что $\forall\, (\boldsymbol{x}, y) \in \overline{S}(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) \times \overline{S}(y_0, \varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|F'_y(\boldsymbol{x}, y)| = \left|1 - \frac{f'_y(\boldsymbol{x}, y)}{f'_y(\boldsymbol{x}_0, y_0)}\right| \leqslant \theta < 1. \tag{4}$$

Далее, поскольку $f(\boldsymbol{x}_0, y_0) = 0$, то существует такое положительное число $\delta \leqslant \varepsilon$, что

$$|y_0 - F(\boldsymbol{x}, y_0)| \leqslant (1 - \theta)\varepsilon \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in \overline{S}(\boldsymbol{x}_0, \delta). \tag{5}$$

Через M_δ обозначим множество всех непрерывных функций, отображающих замкнутый шар $\overline{S}(\boldsymbol{x}_0, \delta)$ в замкнутый шар (сегмент) $\overline{S}(y_0, \varepsilon)$. Согласно следствию из теоремы пункта 8.2, гл. 2, это множество является полным метрическим пространством, снабженным

метрикой

$$\rho(g,\ h) = \sup_{x \in \bar{S}(x_0,\ \delta)} |g(x) - h(x)|, \quad h,\ g \in M_\delta.$$

Покажем, что оператор A является в M_δ оператором сжатия и отображает множество M_δ в себя.

Действительно, $\forall\ y,\ z \in \bar{S}(y_0,\ \varepsilon)$, применив теорему Лагранжа о конечных приращениях для функций одной переменной (см. § 3), получаем

$$Ay - Az = F(x,\ y) - F(x,\ z) = y - z - \frac{f(x,\ y) - f(x,\ z)}{f'_y(x_0,\ y_0)} =$$

$$= \left(1 - \frac{f'_y(x,\ \xi)}{f'_y(x_0,\ y_0)}\right)(y - z),$$

где $\xi = z + q(y - z)$, $0 < q < 1$, $x \in \bar{S}(x_0,\ \delta)$.

Полагая здесь $y : x \mapsto g(x)$, $z : x \mapsto h(x)$ и воспользовавшись неравенством (4), а также определением метрики, получаем оценку

$$|Ag(x) - Ah(x)| = \left|1 - \frac{f'_y(x,\ \xi(x))}{f'_y(x_0,\ y_0)}\right| |g(x) - h(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \theta \sup_{x \in \bar{S}(x_0,\ \delta)} |g(x) - h(x)| = \theta\rho(g,\ h).$$

Следовательно,

$$\sup_{x \in \bar{S}(x_0,\ \delta)} |Ag(x) - Ah(x)| = \rho(Ag,\ Ah) \leqslant \theta\rho(g,\ h),$$

и сжимаемость оператора A доказана.

Покажем, что $A : M_\delta \to M_\delta$. Пусть $h \in M_\delta$ — произвольный элемент этого пространства, т. е. $h : \bar{S}(x_0,\ \delta) \to \bar{S}(y_0,\ \varepsilon)$, а значит

$$\rho(h,\ y_0) \leqslant \varepsilon. \tag{6}$$

Следует доказать, что $Ah \in M_\delta$, т. е. что $\rho(Ah,\ y_0) \leqslant \varepsilon$. Используя свойства абсолютной величины, сжимаемости оператора A и неравенства (5), (6), получаем оценку

$$|y_0 - Ah(x)| \leqslant |y_0 - Ay_0| + |Ay_0 - Ah(x)| \leqslant |y_0 - F(x,\ y_0)| +$$

$$+ \sup_{x \in \bar{S}(x_0,\ \delta)} |Ay_0 - Ah(x)| \leqslant (1 - \theta)\varepsilon + \rho(Ay_0,\ Ah) \leqslant$$

$$\leqslant (1 - \theta)\varepsilon + \theta\rho(y_0,\ h) \leqslant (1 - \theta)\varepsilon + \theta\varepsilon = \varepsilon.$$

Отсюда $\sup_{x \in \bar{S}(x_0,\ \delta)} |y_0 - Ah(x)| = \rho(y_0,\ Ah) \leqslant \varepsilon$, т. е. $Ah \in M_\delta$.

Таким образом, согласно теореме параграфа 15, операторное уравнение (3), а тем самым и уравнение (1) имеет в пространстве M_δ

единственное решение $y : \bar{S}(x_0, \delta) \to \bar{S}(y_0, \varepsilon)$. Поскольку элементами пространства M_δ являются непрерывные функции, то функция y непрерывна в замкнутом шаре $\bar{S}(x_0, \delta)$. Далее, так как при $x = x_0$ уравнение (1) имеет единственное решение y_0, то $y(x_0) = y_0$. ▶

Отметим, что неизвестная функция y, существование которой доказано в теореме 1, может быть найдена с наперед заданной точностью с помощью метода последовательных приближений, рассмотренного при доказательстве теоремы Каччиополли — Пикара — Банаха.

Взяв y_0 в качестве нулевого приближения, строим последовательность $y_n \to y$ при $n \to \infty$ следующим образом:

$$y_1 = y_0 - (f'_y(x_0, y_0))^{-1} f(x, y_0),$$
$$y_2 = y_1 - (f_y(x_0, y_0))^{-1} f(x, y_1),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_n = y_{n-1} - (f'_y(x_0, y_0))^{-1} f(x, y_{n-1}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Пусть y — точное решение уравнения $f(x, y) = 0$. Оценим $\rho(y, y_n)$, используя при этом оценки, полученные при доказательстве теоремы Каччиополли — Пикара — Банаха. Имеем $\forall\, \varepsilon > 0$

$$\rho(y, y_n) = \max_{x \in \bar{S}(x_0, \delta)} |y(x) - y_n(x)| \leqslant \frac{\theta^n}{1-\theta}\varepsilon, \quad \theta \in]0, 1[.$$

Пример. Исследовать уравнение $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2) = 0$.

Функция $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, непрерывна в $\mathbb{R}^2$. Ее частная производная $f'_y(x, y) = 4y(x^2 + y^2) - 2y$ обращается в нуль в точках $M_0 = (0, 0)$, $M_1 = (1, 0)$, $M_2 = (-1, 0)$. Это критические точки, в силу чего не существует таких окрестностей точек M_i, $i = 0, 1, 2$, чтобы уравнение $f(x, y) = 0$ определяло в каждой из них единственную непрерывную функцию y, принимающую значение y_i в точке $x = x_i$. Частная производная $f'_x(x, y) = 4x(x^2 + y^2) - 2x$ также обращается в нуль в точке M_0, поэтому уравнение $f(x, y) = 0$ не определяет ни в какой окрестности этой точки единственной непрерывной функции $x : y \mapsto x(y)$, которая принимала бы значение $x = 0$ при $y = 0$.

Поскольку $f'_x(M_i) \neq 0$, $i = 1, 2$, то существуют такие окрестности точек M_1 и M_2, в каждой из которых уравнение $f(x, y) = 0$ определяет единственную непрерывную функцию $x : y \mapsto x(y)$, принимающую значение x_i в точке y_i.

Докажем теорему о дифференцируемости неявной функции.

Теорема 2. *Если выполнены все условия теоремы 1 и в области* $S(x_0, \delta) \times S(y_0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^{m+1}$ *существуют и непрерывны все частные производные функции* f *и в этой области* $f'_y \neq 0$, *то неявная функция* $y : \bar{S}(x_0, \delta) \to \bar{S}(y_0, \varepsilon)$ *дифференцируема в каждой точке открытого шара* $S(x_0, \delta)$, *а ее частные производные вычисляются по формулам*

$$y'_{x_j}(x) = -(f'_y(x, y(x)))^{-1} f'_{x_j}(x, y(x)), \quad j = \overline{1, m}. \qquad (1)$$

◀ Из существования и непрерывности всех частных производных функции f следует, что она дифференцируема в области $S(x_0, \delta) \times$

$\times S(y_0, \varepsilon)$ (теорема 2, п. 13.4). Пусть координата x_j точки $x \in S(x_0, \delta)$ получает такое приращение h_j, что точка $x + h_j e_j$ также принадлежит открытому шару $S(x_0, \delta)$ (здесь e_j, как обычно, вектор стандартного базиса $\mathbb{R}^m$). Тогда неявная функция y получит в точке x приращение $\Delta_{x_j} y = y(x + h_j e_j) - y(x)$, а функция f в точке $(x, y(x))$ получит приращение $\Delta f(x, y(x)) = f(x + h_j e_j, y(x + h_j e_j)) - f(x, y(x)) \equiv 0$, так как $x \in S(x_0, \delta)$, $(x + h_j e_j) \in S(x_0, \delta)$.

В силу дифференцируемости функции f имеем

$$\Delta f(x, y(x)) = f'_{x_j}(x, y(x))\, h_j + f'_y(x, y(x))\, \Delta_{x_j} y(x) + \alpha h_j + \beta \Delta_{x_j} y(x) = 0, \tag{2}$$

где $\alpha \to 0$ при $h_j \to 0$, $\beta \to 0$ при $\Delta_{x_j} y(x) \to 0$. Из непрерывности функции y следует, что $\Delta_{x_j} y(x) \to 0$ при $h_j \to 0$; следовательно, $\beta \to 0$ при $h_j \to 0$. Из равенства (2) находим

$$\frac{\Delta_{x_j} y(x)}{h_j} = -\frac{f'_{x_j}(x, y(x)) + \alpha}{f'_y(x, y(x)) + \beta}. \tag{3}$$

Поскольку предел правой части равенства (3) при $h_j \to 0$ существует и равен $-(f'_y(x, y(x)))^{-1} f'_{x_j}(x, y(x))$, то функция y имеет частную производную $y'_{x_j}(x)$ $\forall x \in S(x_0, \delta)$, $j = \overline{1, m}$. Из непрерывности частных производных y'_{x_j} следует дифференцируемость функции y $\forall x \in S(x_0, \delta)$. ▶

Рассмотрим общий случай существования неявной функции.

Пусть задана система уравнений

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{4}$$

которую запишем в виде одного векторного уравнения

$$f(x, y) = 0. \tag{5}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $x \in S(x_0, a)$, $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $y \in S(y_0, b)$, $y_0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$. Обозначим $D = S(x_0, a) \times S(y_0, b)$.

Теорема 3. *Пусть отображение $f: D \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет следующим условиям:* 1) *f непрерывное в D отображение и $f(x_0, y_0) = 0$;* 2) *в D существует частная производная $f'_y(x, y)$ (см. п. 14.2), непрерывная в точке (x_0, y_0);* 3) *матрица*

$$f'_y(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}(x_0, y_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_n}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

невырождена, т. е. $\det f'_y(x_0, y_0) = \frac{\mathcal{D}(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\mathcal{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда $\exists\,\delta\in]0,\ a[\ \wedge\ \exists\,\varepsilon\in]0,\ b[$ *такие, что уравнение* (5) *определяет единственное отображение*

$$y:\bar{S}(x_0,\ \delta)\to\bar{S}(y_0,\ \varepsilon),\tag{6}$$

непрерывное в замкнутом шаре $\bar{S}(x_0,\ \delta)$ *и такое, что* $y(x_0)=y_0$.

◀ Уравнение (5) эквивалентно уравнению

$$y=Ay,\tag{7}$$

в котором оператор A определен равенством

$$A:y\mapsto F(x,\ y)\equiv y-(f'_y(x_0,\ y_0))^{-1}f(x,\ y),$$

где $(f'_y(x_0,\ y_0))^{-1}$ — матрица, обратная матрице $f'_y(x_0,\ y_0)$.

Отображение $F:S(x_0,\ a)\times S(y_0,\ b)\to\mathbb{R}^n$, согласно условиям 1)—3) теоремы, непрерывно и имеет частную производную

$$F'_y:(x,\ y)\mapsto I-(f'_y(x_0,\ y_0))^{-1}f'_y(x,\ y),$$

где I — тождественная матрица $I:D\to D$, причем в точке $(x_0,\ y_0)$ частная производная F'_y, обращается в нулевую матрицу.

Поскольку производная f'_y непрерывна в точке $(x_0,\ y_0)$, то $\forall\,\theta\in\in[0,\ 1[$ существует такое положительное число $\varepsilon<\min\{a,\ b\}$, что $\forall\,(x,\ y)\in\{\bar{S}(x_0,\ \varepsilon)\times\bar{S}(y_0,\ \varepsilon)\}$ выполняется неравенство

$$\|F'_y(x,\ y)\|=\|I-(f'_y(x_0,\ y_0))^{-1}f'_y(x,\ y)\|\leqslant\theta.\tag{8}$$

Далее, поскольку $f(x_0,\ y_0)=0$, то существует такое положительное число $\delta\leqslant\varepsilon$, что

$$|y_0-F(x,\ y_0)|\leqslant(1-\theta)\varepsilon\quad\forall\,x\in\bar{S}(x_0,\ \delta).\tag{9}$$

Обозначим через M_δ множество всех непрерывных отображений замкнутого шара $\bar{S}(x_0,\ \delta)$ в замкнутый шар $\bar{S}(y_0,\ \varepsilon)$.

Согласно следствию из теоремы пункта 8.2, гл. 2, это множество является полным метрическим пространством, снабженным метрикой

$$\rho(g,\ h)=\sup_{x\in\bar{S}(x_0,\ \delta)}|g(x)-h(x)|,\quad g,\ h\in M_\delta.$$

Покажем, что оператор A является в M_δ оператором сжатия и отображает множество M_δ в себя.

Действительно, $\forall\,y,\ z\in\bar{S}(y_0,\ \varepsilon)$ имеем

$$Ay-Az=F(x,\ y)-F(x,\ z),\quad x\in\bar{S}(x_0,\ \delta).$$

Применяя теорему о конечных приращениях (см. п. 14.3), получаем неравенство

$$|Ay-Az|=|F(x,\ y)-F(x,\ z)|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{\xi\in]y,\ z[}\|I-(f'_y(x_0,\ y_0))^{-1}f'_y(x,\ \xi)\|\,|y-z|,$$

где $z,\ y\in\bar{S}(y_0,\ \varepsilon)$, $x\in\bar{S}(x_0,\ \delta)$. Полагая здесь $y:x\to g(x)$, $z:x\mapsto$ $\mapsto h(x)$, $x\in\bar{S}(x_0,\ \delta)$, а также пользуясь неравенством (8) и опреде-

лением метрики в M_δ, получим оценку

$$|Ag(x) - Ah(x)| \leqslant \sup_{\xi \in]y,\, z[} \|I - (f'_y(x_0, y_0))^{-1} f'_y(x, \xi)\| \times$$

$$\times \sup_{x \in \bar{S}(x_0, \delta)} |g(x) - h(x)| \leqslant \theta\rho(g, h).$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\sup_{x \in \bar{S}(x_0, \delta)} |Ag(x) - Ah(x)| = \rho(Ag, Ah) \leqslant \theta\rho(g, h), \quad \theta \in [0, 1[,$$

и сжимаемость оператора A доказана.

Покажем, что $A : M_\delta \to M_\delta$. Возьмем произвольное отображение $h \in M_\delta$, $h : \bar{S}(x_0, \delta) \to \bar{S}(x_0, \varepsilon)$. Тогда, очевидно

$$\rho(h, y_0) \leqslant \varepsilon. \tag{10}$$

Покажем, что $Ah \in M_\delta$, т. е., что $\rho(Ah, y_0) \leqslant \varepsilon$. Используя сжимаемость оператора A и неравенство (9), имеем

$$|y_0 - Ah(x)| \leqslant |y_0 - Ay_0| + |Ay_0 - Ah(x)| = |y_0 - F(x, y_0)| +$$

$$+ |Ay_0 - Ah(x)| \leqslant |y_0 - F(x, y_0)| + \sup_{x \in \bar{S}(x_0, \delta)} |Ay_0 - Ah(x)| \leqslant$$

$$\leqslant (1 - \theta)\varepsilon + \rho(Ay_0, Ah) \leqslant (1 - \theta)\varepsilon + \theta\rho(y_0, h) \leqslant (1 - \theta)\varepsilon + \theta\varepsilon = \varepsilon.$$

Следовательно, $\sup_{x \in \bar{S}(x_0, \delta)} |y_0 - Ah(x)| = \rho(y_0, Ah) \leqslant \varepsilon$, т. е. $Ah \in M_\delta$.

Таким образом, операторное уравнение (7), а значит и уравнение (5), имеет в пространстве M_δ единственное решение $y : \bar{S}(x_0, \delta) \to \bar{S}(y_0, \varepsilon)$. Поскольку элементы пространства M_δ являются непрерывными отображениями, то y — непрерывное в замкнутом шаре $\bar{S}(x_0, \delta)$ отображение. Так как уравнение (5) при $x = x_0$ имеет единственное решение y_0, то $y(x_0) = y_0$. ▶

Докажем теорему о дифференцируемости отображения, заданного неявно уравнением $f(x, y) = 0$.

Теорема 4. *Если выполнены все условия теоремы 3 и в области D существуют и непрерывны частные производные f'_x, f'_y, а матрица $f'_y(x, y)$ обратима в этой области, то отображение $y : \bar{S}(x_0, \delta) \to \bar{S}(y_0, \varepsilon)$ дифференцируемо в каждой точке $x \in S(x_0, \delta)$ и при этом*

$$y'(x) = -(f'_y(x, y(x)))^{-1} f'_x(x, y(x)). \tag{11}$$

◀ Возьмем произвольные точки $x \in S(x_0, \delta)$, $(x + h) \in S(x_0, \delta)$ и, соответственно, точки $(x, y(x)) \in S(x_0, \delta) \times S(y_0, \varepsilon)$, $(x + h, y(x + h)) \in S(x_0, \delta) \times S(y_0, \varepsilon)$, где $S(x_0, \delta)$ и $S(y_0, \varepsilon)$ — открытые шары из теоремы 3.

Из существования и непрерывности частных производных f'_x и f'_y следует, что отображение f из теоремы 3 дифференцируемо в области

$S(x_0, \delta) \times S(y_0, \varepsilon)$. Кроме того, справедливы тождества

$$f(x+h,\ y(x+h)) \equiv 0, \quad f(x,\ y(x)) \equiv 0, \quad x \in S(x_0,\ \delta) \wedge (x + h) \in S(x_0,\ \delta).$$

Таким образом, имеем

$$f(x+h,\ y(x+h)) - f(x,\ y(x)) = f'_x(x,\ y(x))\,h + f_y(x,\ y(x))\,\Delta y + \alpha h + \beta \Delta y = 0, \tag{12}$$

где $\Delta y = y(x+h) - y(x)$,

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12} \ldots \alpha_{1m} \\ \alpha_{21}\alpha_{22} \ldots \alpha_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2} \ldots \alpha_{nm} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_{11}\beta_{12} \ldots \beta_{1n} \\ \beta_{21}\beta_{22} \ldots \beta_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \beta_{n1}\beta_{n2} \ldots \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрицы, причем $\|\alpha\| \to 0$ при $|h| \to 0$ и $\|\beta\| \to 0$ при $|\Delta y| \to 0$.

Из непрерывности отображения y следует, что $|\Delta y| \to 0$ при $|h| \to 0$, следовательно, $\|\beta\| \to 0$ при $|h| \to 0$. Равенство (12) с помощью матрицы $(f'_y(x,\ y(x)))^{-1}$ запишем в виде

$$(f'_y(x,\ y(x)))^{-1} f'_x(x,\ y(x))\,h + \Delta y = -(f'_y(x,\ y(x)))^{-1}(\alpha h + \beta \Delta y). \tag{13}$$

Оценивая обе части равенства (13), имеем

$$|\Delta y + (f'_y(x, y(x)))^{-1} f'_x(x,\ y(x))\,h| \leqslant \|(f'_y(x, y(x)))^{-1}\|(\|\alpha\| \cdot |h| + \|\beta\| \cdot |\Delta y|). \tag{14}$$

Поскольку $\|\alpha\| \to 0$ и $\|\beta\| \to 0$ при $|h| \to 0$, то возьмем вектор h таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\|(f'_y(x,\ y(x)))^{-1}\|(\|\alpha\| \cdot |h| + \|\beta\| \cdot |\Delta y|) \leqslant \frac{1}{2}(|\Delta y| + |h|). \tag{15}$$

Такой выбор h возможен, поскольку непрерывная матрица $(f_y(x,\ y(x)))^{-1}$ ограничена по норме в замкнутой области $\overline{S}(x_0, \delta) \times \overline{S}(y_0, \varepsilon) \subset D$, а $\|\alpha\| \cdot |h| + \|\beta\| \cdot |\Delta y| = o(|h|) + o(|\Delta y|)$. Используя теперь оценку

$$|\Delta y + (f'_y(x, y(x)))^{-1} f'_x(x, y(x))\,h| \geqslant |\Delta y| - \|(f'_y(x, y(x)))^{-1}\| \cdot \|f_x(x,\ y(x))\| \cdot |h|$$

и неравенства (14), (15), приходим к оценке

$$\frac{1}{2}|\Delta y| \leqslant \|(f'_y(x,\ y(x)))^{-1}\| \cdot \|f'_x(x,\ y(x))\| \cdot |h| \leqslant c|h|, \tag{16}$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от h. При этом неравенство (14) принимает вид

$$|\Delta y + (f'_y(x,\ y(x)))^{-1} f'_x(x,\ y(x))\,h| \leqslant \|(f'_y(x,\ y(x)))^{-1}\|(\|\alpha\| + 2c\|\beta\|)|h| = o(|h|).$$

Из последнего неравенства следует, что приращение отображения y $\forall\, x \in S(x_0, \delta)$ можно представить в виде

$$\Delta y(x) = -(f'_y(x, y(x)))^{-1} f'_x(x, y(x))\, h + o(|h|),$$

поэтому справедлива формула (11). Из этой формулы получаем правило: *если выполнены все условия теоремы* 4, *то для вычисления* $y'(x)$ *равенство* $f(x, y(x)) = 0$ *можно дифференцировать как сложную функцию.* ▶

16.3. Обратное отображение. Пусть задано отображение $f: X \to Y$, где $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ — области пространства $\mathbb{R}^n$.

Если для каждого $y \in Y$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение $x \in X$, то на множестве Y можно определить отображение $f^{-1}: Y \to X$, поставив в соответствие каждому $y \in Y$ то значение $x \in X$, которое при этом y является решением уравнения $f(x) = y$. Так определенное отображение называется *обратным* по отношению к отображению $f: X \to Y$.

Ясно, что отображение f является обратным отображению f^{-1}, поэтому отображения f и f^{-1} называются *взаимно-обратными.*

Из данного выше определения следует, что

$$f^{-1}(f(x)) \equiv x \quad \forall\, x \in X,$$
$$f(f^{-1}(y)) \equiv y \quad \forall\, y \in Y.$$

Теорема. *Пусть отображение* $f: X \to Y$ *удовлетворяет следующим условиям:* 1) f *непрерывно в* X *и* $y_0 = f(x_0)$, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$; 2) *в области* X *существует производная* f', *непрерывная в точке* x_0, *причем матрица*

$$f'(x_0) = \begin{Vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{Vmatrix}$$

невырождена, т. е. $\det f'(x_0) = \frac{\mathscr{D}(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\mathscr{D}(x_1, x_2, \dots, x_n)}(x_0) \neq 0$.

Тогда $\exists\, \overline{S}(x_0, \varepsilon) \subset X \wedge \exists\, \overline{S}(y_0, \delta) \subset Y$ *такие, что для сужения отображения* f *на шар* $\overline{S}(x_0, \varepsilon)$ *существует единственное непрерывное отображение* $f^{-1}: \overline{S}(y_0, \delta) \to \overline{S}(x_0, \varepsilon)$, *принимающее значение* x_0 *при* $y = y_0$, *т. е.* $f^{-1}(y_0) = x_0$.

Это отображение дифференцируемо в точке y_0 *и его производная в этой точке вычисляется по формуле*

$$(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}. \tag{1}$$

◀ Для доказательства достаточно применить к уравнению $f(x) - y = 0$ теорему 3, п. 16.2, заменив при этом x на y, а y на x. В результате получим единственное непрерывное отображение $x: y \mapsto f^{-1}(y)$, где $f^{-1}: \overline{S}(y_0, \delta) \to \overline{S}(x_0, \varepsilon)$, причем $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

Это отображение, согласно теореме 4, п. 16.2, дифференцируемо в точке y_0. Применив теорему о дифференцируемости сложного отображения к тождеству

$$f(f^{-1}(y)) = y, \tag{2}$$

получим

$$f'(x_0)(f^{-1})'(y_0) = I, \tag{3}$$

где I — тождественная матрица. Поскольку матрица Остроградского — Якоби невырожденная, то формулу (3) можно записать в виде

$$(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}. \blacktriangleright$$

Для якобианов из формулы (3) получаем равенство

$$\frac{\mathscr{D}(f_1^{-1}, f_2^{-1}, \ldots, f_n^{-1})}{\mathscr{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}(y_0) = \frac{1}{\dfrac{\mathscr{D}(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\mathscr{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(x_0)}. \tag{4}$$

16.4. Теорема о постоянном ранге.

Теорема. *Пусть $f : X \to Y$ — такое непрерывно дифференцируемое отображение области $X \subset \mathbb{R}^m$ на область $Y \subset \mathbb{R}^n$, что в каждой точке $x \in X$ его матрица Остроградского—Якоби $f'(x)$ имеет ранг $r \leqslant m \wedge r < n$.*

Тогда для каждой точки $x \in X$ существует открытое множество $V \subset X$, содержащее x, образ которого $f(V)$ при отображении f является таким множеством точек пространства $\mathbb{R}^n$, что $n - r$ координат точек $y \in Y \cap f(V)$ являются дифференцируемыми функциями остальных r координат, играющих роль свободных параметров.

◀ Не ограничивая общности можем считать, что базисный минор матрицы Остроградского — Якоби $f'(x)$ является якобианом $\dfrac{\mathscr{D}(f_1, f_2, \ldots, f_r)}{\mathscr{D}(x_1, x_2, \ldots, x_r)}(x)$.

Так как отображение f непрерывно дифференцируемо в области X, то якобиан $\dfrac{\mathscr{D}(f_1, f_2, \ldots, f_r)}{\mathscr{D}(x_1, x_2, \ldots, x_r)}(x)$ является непрерывной числовой функцией на X, и для всякой точки $x_0 \in X$ существует такая ее окрестность $S(x_0, \delta)$, что $\dfrac{\mathscr{D}(f_1, f_2, \ldots, f_r)}{\mathscr{D}(x_1, x_2, \ldots, x_r)}(x) \neq 0 \quad \forall x \in S(x_0, \delta)$. Вместе с тем, в каждой точке множества $S(x_0, \delta)$ всякий минор матрицы Остроградского — Якоби, порядка выше чем r, равен нулю.

Рассматривая пространство $\mathbb{R}^m$ как произведение $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$, точку $x \in \mathbb{R}^m$ будем обозначать через (x_r, x_{m-r}), где $x_r = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$, $x_{m-r} = (x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_m)$. Тогда $x_0 = (x_r^0, x_{m-r}^0)$. Аналогично, представляя $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$, положим $y = (y_r, y_{n-r})$, где $y_r = (y_1, y_2, \ldots, y_r)$, $y_{n-r} = (y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_n)$.

Пусть $y_0 = f(x_0) = (y_r^0, y_{n-r}^0)$ и пусть $y_r = f_r(x_r, x_{m-r})$, $y_{n-r} = f_{n-r}(x_r, x_{m-r})$, определяют отображение $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$.

Из предположения относительно якобиана $\dfrac{\mathscr{D}(f_1, f_2, \ldots, f_r)}{\mathscr{D}(x_1, x_2, \ldots, x_r)}$ и из теорем 3 и 4, п. 16.2, следует, что существуют открытые

шары $S(x_r^0, \delta_1)$ и $S(x_{m-r}^0, \delta_2)$ в пространствах $\mathbb{R}^r$ и $\mathbb{R}^{n-r}$, такие, что $S(x_r^0, \delta_1) \times S(x_{m-r}^0, \delta_2) \subset S(x_0, \delta)$ и такая окрестность $S(y_r^0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^r$, что на множестве $S(y_r^0, \varepsilon) \times S(x_{m-r}^0, \delta_2)$ определено единственное непрерывно дифференцируемое отображение $x_r = \varphi_r(y_r, x_{m-r})$, действующее в $S(x_r^0, \delta_1)$.

Рассматривая отображение $y_r = f_r(x_r, x_{m-r})$ как уравнение в некоторой области пространства $\mathbb{R}^{m+r}$ и подставив в его правую часть $x_r = \varphi_r(y_r, x_{m-r})$, получим тождество $y_r \equiv f_r(\varphi_r(y_r, x_{m-r}), x_{m-r}) \equiv \psi_r(y_r, x_{m-r})$ относительно $(y_r, x_{m-r}) \in S(y_r^0, \varepsilon) \times S(x_{m-r}^0, \delta_2)$, эквивалентное r тождествам

$$y_j \equiv f_j(\varphi_r(y_r, x_{m-r}), x_{m-r}) \equiv \psi_j(y_1, y_2, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_m). \quad (1)$$

Дифференцируя эти тождества по x_p $(p > r)$, получаем

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial x_p} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_p} + \frac{\partial f_j}{\partial x_p} = (\mathscr{D}_p f_j, \mathscr{D}_p \varphi) \equiv 0, \quad (2)$$

$$j = \overline{1, r}; \quad p = \overline{r+1, m},$$

где $\mathscr{D}_p f_j = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}, \frac{\partial f_j}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f_j}{\partial x_r}, \frac{\partial f_j}{\partial x_p}\right)$, $\mathscr{D}_p \varphi = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_p}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_p}, \ldots\right.$ $\ldots, \left.\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_p}, 1\right)$ — векторы пространства $\mathbb{R}^{r+1}$.

Обозначим через V^0 произведение $S(x_r^0, \delta_1) \times S(x_{m-r}^0, \delta_2)$, а через $Y^0 = f(V^0)$ — его образ при отображении f. Если $y = (y_r, y_{n-r})$, $y \in Y^0$ и если при этом $y_r \in S(y_r^0, \varepsilon)$, то $x_r = \varphi_r(y_r, x_{m-r})$, в силу чего имеем $y_{n-r} = f_{n-r}(\varphi_r(y_r, x_{m-r}), x_{m-r}) = g_{n-r}(y_r, x_{m-r})$. Покажем, что отображение g_{n-r} в действительности от x_{m-r} не зависит. Для этого достаточно показать, что от x_{m-r} не зависит каждая его компонента

$$g_s(y_1, y_2, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_m) \equiv f_s(\varphi_r(y_r, x_{m-r}), x_{m-r}), \quad s > r. \quad (3)$$

Дифференцируя g_s по переменным x_p $(p > r)$, имеем

$$\frac{\partial g_s}{\partial x_p} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial f_s}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_p} + \frac{\partial f_s}{\partial x_p} = (\mathscr{D}_p f_s, \mathscr{D}_p \varphi), \quad (4)$$

где $\mathscr{D}_p f_s = \left(\frac{\partial f_s}{\partial x_1}, \frac{\partial f_s}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f_s}{\partial x_r}, \frac{\partial f_s}{\partial x_p}\right)$, $\mathscr{D}_p \varphi$ — вектор из тождества (2).

Поскольку $s > r$, то, в силу предположения относительно ранга матрицы Остроградского — Якоби, каждый вектор $\mathscr{D}_p f_s$ при $s > r$ является линейной комбинацией векторов $\mathscr{D}_p f_j$ из тождества (2):

$$\mathscr{D}_p f_s = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j^s \mathscr{D}_p f_j, \quad (5)$$

где λ_j^s — числовые параметры.

Подставив в скалярное произведение (4) вектор $\mathscr{D}_p f_s$ из (5) и приняв во внимание тождество (2), получим

$$\frac{\partial g_s}{\partial x_p} = \left(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j^s \mathscr{D}_p f_j,\ \mathscr{D}_p \varphi\right) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j^s (\mathscr{D}_p f_j,\ \mathscr{D}_p \varphi) = 0.$$

Следовательно, множество M точек (y_r, y_{n-r}), принадлежащих множеству Y^0, для которых $y_r \in S(y_r^0, \varepsilon)$, определяется уравнением $y_{n-r} = g_{n-r}(y_r)$. Множество M является образом при отображении f пересечения множества V^0 и множества точек $\{x\} = y_r^{-1}(S(y_r^0, \varepsilon))$, таких, что $y_r(x) \in S(y_r^0, \varepsilon)$, т. е. образом пересечения двух открытых множеств, в силу чего оно является образом открытого множества V, содержащего точку x_0. ▶

Рассмотрим полный прообраз точки $y = (y_r, y_{n-r}) = f(x)$, $y \in Y^0$. По доказанному, такая точка определяется уравнением $y_{n-r} = g_{n-r}(y_r)$, $y_r \in S(y_r^0, \varepsilon)$.

Следствие. *Если заданы* $x_{m-r} \in S(x_{m-r}^0, \delta_2)$ *и* $y_r \in S(y_r^0, \varepsilon)$, *то на множестве* $S(y_r^0, \varepsilon) \times S(x_{m-r}^0, \delta_2)$ *однозначно определено отображение*

$$x_r : S(y_r^0, \varepsilon) \times S(x_{m-r}^0, \delta_2) \to S(x_r^0, \delta_1),$$

которое при фиксированном y_r *является функцией от* $x_{m-r} \in S(x_{m-r}^0, \delta_2)$.

При фиксированном y_r, очевидно, y_{n-r} также будет фиксированным, в силу теоремы о ранге, поэтому полный прообраз $f^{-1}(y)$ точки y описывается уравнением $x_r = z_r(x_{m-r})$, $x_{m-r} \in S(x_{m-r}^0, \delta_2)$, где z_r — непрерывно дифференцируемое отображение.

Рассмотрим в качестве примера систему уравнений $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, где f, g, h — дифференцируемые функции с непрерывными частными производными.

Пусть $f(u_0, v_0) = x_0$, $g(u_0, v_0) = y_0$, $h(u_0, v_0) = z_0$, $(u_0, v_0) \in D$ и ранг матрицы Остроградского — Якоби

$$\begin{pmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \\ h'_u & h'_v \end{pmatrix}$$

равен 2 в точке (u_0, v_0). Если определитель

$$\begin{vmatrix} f'_u(u_0, v_0) & f'_v(u_0, v_0) \\ g'_u(u_0, v_0) & g'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix}$$

является базисным минором матрицы Остроградского — Якоби, то он отличен от нуля в точке (u_0, v_0). В силу непрерывности частных производных функций f и g, этот определитель отличен от нуля в некоторой окрестности точки (u_0, v_0). Тогда, согласно теореме о ранге, множество образов отображения этой окрестности в некоторую окрестность точки (x_0, y_0, z_0) с помощью рассматриваемой системы уравнений можно задать одной дифференцируемой функцией вида $z = \varphi(x, y)$.

16.5. Зависимые и независимые функции. Пусть f_j, $j = \overline{1, n}$, дифференцируемые в области $X \subset \mathbb{R}^m$ функции.

Определение 1. *Функция f_k зависит в области X от функций f_1, f_2, ..., f_{k-1}, f_{k+1}, ..., f_n, если $\forall\, x \in X$ выполняется соотношение*

$$f_k = F(f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}, f_{k+1}, \ldots, f_n), \qquad (1)$$

где F — дифференцируемая в области изменения своих аргументов функция. Если хотя бы одна из функций f_k зависит в области X от остальных, то функции f_j, $j = \overline{1, n}$, называются зависимыми в области X. Если не существует функции F с указанными свойствами, то функции f_j называются независимыми в области X.

Теорема 1. *Пусть f_j, $j = \overline{1, n}$,— непрерывно дифференцируемые в области $X \subset \mathbb{R}^m$ функции, $n \leqslant m$ и $y_0 = (f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots, f_n(x_0)) = f(x_0)$, $x_0 \in X$, причем ранг матрицы Остроградского — Якоби*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x_0) \end{pmatrix}$$

равен n. Тогда функции f_j, $j = \overline{1, n}$, независимы в некоторой окрестности точки x_0.

◀ Согласно теореме о ранге, образ некоторой окрестности точки $x_0 \in X$ при отображении $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ является окрестностью точки $y_0 = f(x_0)$. Функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ в этой окрестности являются свободными параметрами и поэтому могут принимать произвольные значения, достаточно близкие к значениям $f_1(x_0) = y_1^0$, $f_2(x_0) = y_2^0$, ..., $f_n(x_0) = y_n^0$, где $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) = y_0$. Если в указанной окрестности точки x_0 функции f_j связаны соотношением вида (1), то это означает, что k-я строка матрицы Остроградского — Якоби является линейной комбинацией остальных ее строк в силу тождеств

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\partial F}{\partial f_l} \cdot \frac{\partial f_l}{\partial x_j} + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial F}{\partial f_i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad j = \overline{1, m},$$

получаемых с помощью правила дифференцирования сложных функций. Поскольку ранг матрицы Остроградского — Якоби в указанной окрестности равен n, то все ее строки линейно-независимы. ▶

Теорема 2. *При выполнении всех условий теоремы о ранге и предположении, что базисный минор матрицы Остроградского — Якоби находится в ее верхнем левом углу, r функций $f_1, f_2, \ldots, f_r$ независимы в окрестности V, а каждая функция f_s, $s = \overline{r+1, n}$, зависит в этой окрестности от функций f_j, $j = \overline{1, r}$.*

◀ Согласно теореме о ранге, существует окрестность V, содержащая точку x_0, образ которой $f(V)$ в пределах некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ задается уравнением вида $y_{n-r} = g(y_r)$, или, что то же

самое, системой уравнений вида

$$y_s = g_s(y_1, y_2, \ldots, y_r), \quad s = \overline{r+1, n}. \tag{2}$$

Тогда на множестве V функции f_s удовлетворяют нетривиальным соотношениям

$$f_s(x) = g_s(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_r(x)), \tag{3}$$

т. е. функции f_s, $s = \overline{r+1, n}$, зависят на этом множестве от функций f_j, $j = \overline{1, r}$. Независимость функций f_j, $j = \overline{1, r}$, следует из теоремы 1. ▶

Определение 2. *Гомеоморфизмом метрического пространства E на метрическое пространство F называется любая биекция E на F, непрерывная вместе со своей обратной биекцией.*

Определение 3. *Множество $M \subset \mathbb{R}^m$ называется многообразием размерности $p \leqslant m$, принадлежащим классу C, если для каждой точки $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_p, a_{p+1}, \ldots, a_m)$, $\boldsymbol{a} \in M$, и некоторой окрестности $S(\boldsymbol{a}, \delta)$ существуют окрестность $S(\boldsymbol{a}_p, \delta_1)$ точки $\boldsymbol{a}_p = (a_1, \ldots, a_p)$ и такой гомеоморфизм $\varphi : S(\boldsymbol{a}_p, \delta_1) \to M \cap S(\boldsymbol{a}, \delta)$, что $\varphi_j(\boldsymbol{a}_p) = a_j$, $j = \overline{p+1, m}$, причем координаты точек $x \in M \cap S(\boldsymbol{a}, \delta)$ удовлетворяют уравнениям*

$$x_j = \varphi_j(\boldsymbol{x}_p) = \varphi_j(x_1, \ldots, x_p) \quad \boldsymbol{x}_p \in S(\boldsymbol{a}_p, \delta_1), \quad j = \overline{p+1, m}. \tag{1}$$

Заметим, что если зависимы не координаты $x_{p+1}, \ldots, x_m$, а другие $m - p$ координат, то можно изменить порядок векторов базиса пространства $\mathbb{R}^m$ так, чтобы первые p координат множества $M \cap S(\boldsymbol{a}, \delta)$ были независимы.

В случае $p = 2$ многообразие M называется *поверхностью класса C*.

§ 17. ЛОКАЛЬНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

17.1. Локальные максимумы и минимумы. Необходимое условие экстремума. Пусть числовая функция f определена в области $D \subset \subset \mathbb{R}^m$.

Определение. *Точка $\boldsymbol{x}_0 \in D$ называется точкой локального максимума (минимума) функции f, если существует такая окрестность $S(\boldsymbol{x}_0, \delta)$, что $\forall x \in S(\boldsymbol{x}_0, \delta) \bigwedge x \neq \boldsymbol{x}_0$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(\boldsymbol{x}_0)$ (неравенство $f(x) \geqslant f(\boldsymbol{x}_0)$).*

Точки локального максимума и локального минимума функции f называются ее *точками локального экстремума*.

Из определения локальных экстремумов функции f следует, что в точке $\boldsymbol{x}_0$ приращение функции неположительное или неотрицательное: в случае максимума $\Delta f(\boldsymbol{x}_0) \leqslant 0$, а в случае минимума $\Delta f(\boldsymbol{x}_0) \geqslant \geqslant 0$.

Заметим, что функция f может иметь экстремум по всем направлениям, проходящим через точку $\boldsymbol{x}_0$ и не иметь локального экстремума в этой точке.

Для примера рассмотрим функцию $f(x, y) = (x - y^2)(2x - y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Возьмем произвольную прямую $y = tx$. На этой прямой

имеем $f(x, tx) = x^2(1 - t^2x)(2 - t^2x)$, $f(x, tx) - f(0, 0) = f(x, tx) > 0$, следовательно, функция f имеет локальный минимум, равный нулю, в направлении всех прямых, проходящих через точку (0, 0) (в том числе и в направлении каждой из осей координат). Однако локального экстремума в начале координат функция не имеет, так как ее приращение

$$\Delta f(0, 0) = 2x^2 - 3xy^2 + y^4 = \left(y^2 - \frac{3}{2}x\right)^2 - \frac{x^2}{4}$$

при $x = 6t^2$, $y = 3t$, $t > 0$, и при $x = 0$, $|y| > 0$ имеет разные знаки.

Если в окрестности $S(x_0, \delta)$ выполняются строгие неравенства $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$, то локальные экстремумы называются *строгими*.

Выясним теперь необходимые условия локального экстремума функции нескольких переменных. Предположим, что функция $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, имеет локальный экстремум в точке x_0 из области D, и все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$, $j = \overline{1, m}$, существуют. Фиксируя все координаты, кроме x_j, рассмотрим числовую функцию $F: x_j \mapsto f(x_0 + (x_j - x_j^0)e_j)$, $x_j \in S(x_j^0, \delta)$. Функция F имеет локальный экстремум в точке x_j^0, а ее производная в этой точке $F'(x_j^0)$ совпадает с частной производной функции f по переменной x_j в точке x_0: $F'(x_j^0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$. Поскольку функция F имеет экстремум в точке x_j^0, то в этой точке должно выполняться необходимое условие экстремума $F'(x_j^0) = 0$, т. е. $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = 0$. Так как x_j^0 — произвольная координата точки x_0, то необходимое условие экстремума функции f в точке x_0 принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \tag{1}$$

или $df(x_0) = 0$. Таким образом, для отыскания точек возможного экстремума функции f следует решить в области D систему уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{2}$$

Точки из области D, удовлетворяющие уравнению (2), называется *стационарными*. Не всякая стационарная точка является экстремальной, поэтому каждую такую точку следует подвергнуть проверке на наличие в ней экстремума.

Отметим также, что если $x_0 \in D$ — экстремальная точка, то она не обязательно стационарна. Например, рассмотрим функцию $f: x \mapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2}$, $x \in D$, $D \subset \mathbb{R}^m$, причем область D содержит точку $\mathbf{0}$ (0, 0, ..., 0). Поскольку $\Delta f(\mathbf{0}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2}$, $\Delta f(\mathbf{0}) > 0$, если $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 \neq 0$, то, согласно определению,

функция имеет локальный минимум в точке 0. Однако частные производные этой функции в точке 0 не существуют.

Таким образом, к числу точек возможного экстремума функции следует отнести и те, в которых она не имеет хотя бы некоторых частных производных.

17.2. Достаточные условия локального экстремума. Пусть функция $f : D \to \mathbb{R}$, где D — область пространства $\mathbb{R}^m$, дважды дифференцируема в точке $x_0 \in D$ и в этой точке выполнено необходимое условие локального экстремума $df(x_0)(h) = 0$. Применив формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, получим

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)(dx)}{2} + o(|dx|^2), \tag{1}$$

где $dx = x - x_0$ — вектор смещения из точки x_0 в произвольную точку $x \in S(x_0, \delta)$ при достаточно малом $\delta > 0$. Докажем, что знак приращения функции f в точке x_0 полностью определяется знаком второго дифференциала функции f в точке x_0

$$d^2 f(x_0)(dx) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\, dx_i dx_j, \quad dx_p = x_p - x_p^0, \quad p = \overline{1, m}, \tag{2}$$

являющегося симметричной квадратичной формой (см. пункт 13.9), определенной на множестве векторов смещений из точки x_0. Полагая $h_i = \frac{dx_i}{|dx|}$, $h_j = \frac{dx_j}{|dx|}$, представим $d^2 f(x_0)(dx)$ в виде

$$d^2 f(x_0)(dx) = |dx|^2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j. \tag{3}$$

Квадратичная форма $Q(h) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j$ является непрерывной функцией на единичной сфере $|h| = 1$ с центром в точке x_0 и поэтому, согласно теореме Вейерштрасса, достигает наименьшего значения $\min_{|h|=1} Q|h| = c$ в какой-то точке на этой сфере, т. е. $Q(h) \geqslant c$ для всех h таких, что $|h| = 1$. Записав теперь приращение функции f в точке x_0 в виде

$$\Delta f(x_0) = \frac{1}{2} |dx|^2 \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j + \alpha(x, x_0) \right), \tag{4}$$

где $\alpha(x, x_0) \to 0$ при $x \to x_0$, получим неравенство

$$\Delta f(x_0) \geqslant \frac{1}{2} |dx|^2 (c + \alpha), \text{ если } c > 0. \tag{5}$$

Таким образом, если квадратичная форма $Q(h)$ принимает лишь положительные значения (в этом случае она называется *положительно определенной*), то существует такая окрестность точки x_0, в пределах которой приращение функции f в точке x_0 положительное, а это означает, что в точке x_0 функция f имеет строгий локальный минимум.

Если же квадратичная форма $Q(\boldsymbol{h})$ принимает лишь отрицательные значения (в этом случае ее называют *отрицательно определенной*), то она достигает своего наибольшего значения c_1 на единичной сфере. Тогда из неравенства

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)\,h_i h_j + \alpha \leqslant c_1 + |\alpha|$$

следует, что в достаточно малой окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$ выполняется неравенство $\Delta f(\boldsymbol{x}_0) < 0$, в силу которого функция f имеет в точке $\boldsymbol{x}_0$ строгий локальный максимум.

Если квадратичная форма $Q(\boldsymbol{h})$ принимает как положительные, так и отрицательные значения и не обращается в нуль (в этом случае говорят, что она не является *знакоопределенной*), то это означает, что на одних векторах смещений $d\boldsymbol{x}$ второй дифференциал $d^2 f(\boldsymbol{x}_0)$ положительный, а на других — отрицательный. В этом случае функция f не имеет экстремума в точке $\boldsymbol{x}_0$. Например, приращение функции $f(x, y) = x^2 - y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, в точке (0, 0) не сохраняет определенного знака, причем $f(0, 0) = 0$. Это означает, что точка (0, 0) не является экстремальной.

Если квадратичная форма $Q(\boldsymbol{h})$, будучи в целом неположительной или неотрицательной, обращается в нуль на некоторых векторах смещений $\boldsymbol{h}$, отличных от нуль-вектора, то ее называют *квазизнакоопределенной*. В этом случае нельзя судить о поведении функции f в окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$ по ее второму дифференциалу и для определения знака приращения $\Delta f(\boldsymbol{x}_0)$ потребуется исследовать дифференциал $d^3 f(\boldsymbol{x}_0)(d\boldsymbol{x})$, если он существует, и т. д.

Если функция f дважды дифференцируема в точке $\boldsymbol{x}_0$ (что и предполагаем), то ее второй дифференциал $d^2 f(\boldsymbol{x}_0)(d\boldsymbol{x})$ является симметричной квадратичной формой, коэффициенты которой образуют квадратную матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m}(\boldsymbol{x}_0) \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix} \tag{6}$$

с главными минорами

$$A_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}_0), \quad A_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x}_0) \end{vmatrix},$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x_0) \end{vmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_m = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m}(x_0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(x_0) \end{vmatrix}.$$

В алгебре доказан критерий Сильвестра, позволяющий непосредственно по коэффициентам симметричной квадратичной формы судить о ее знакоопределенности. Сформулируем его применительно ко второму дифференциалу d^2f.

Теорема (критерий Сильвестра). *Для того чтобы второй дифференциал $d^2f(x_0)$ дважды дифференцируемой в точке $x_0 \in D$, $D \subset \mathbb{R}^m$, функции $f : D \to \mathbb{R}$ был положительно определенной квадратичной формой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $A_j > 0$, $j = \overline{1, m}$, а для того чтобы, этот дифференциал был отрицательно определенной квадратичной формой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$A_1 < 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 < 0, \quad \ldots,$$

т. е. чтобы знаки миноров A_j строго чередовались, начиная с $A_1 < 0$.

Таким образом, если в стационарной точке функции f выполнены неравенства $A_j > 0$, $j = \overline{1, m}$, то в этой точке f имеет строгий локальный минимум; если же в этой точке выполнены неравенства $A_1 < 0$, $A_2 > 0$, $A_3 < 0$, ..., то функция f имеет строгий локальный максимум.

Выделим особо случай функции двух переменных $f : D \to \mathbb{R}$, где D — область пространства $\mathbb{R}^2$. Матрица квадратичной формы $d^2f(x_0)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $x_0 \in D$ — стационарная точка. Тогда, если $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, то функция f имеет в точке x_0 локальный минимум. Если $A_1 < 0$, $A_2 > 0$, то функция f имеет в точке x_0 локальный максимум. Если $A_2 < 0$ и $A_1 \neq 0$, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

Таким образом, при $A_2 \neq 0$ условие $A_2 > 0$ всегда является необходимым условием экстремума.

Пример. Исследовать на экстремум функцию

$$z(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вычислив частные производные и приравняв их к нулю, получим систему

$$z'_x = 3x^2 - 3y = 0, \quad z'_y = 3y^2 - 3x = 0,$$

решив которую находим стационарные точки $M_1(0, 0)$ и $M_2(1, 1)$. Найдя вторые частные производные $z''_{x^2} = 6x$, $z''_{xy} = -3$, $z''_{y^2} = 6y$, получаем

$$A_2(x, y) = 36xy - 9.$$

В точке M_1 имеем $A_2 = -9 < 0$, поэтому она не является экстремальной. В точке M_2 выполнены неравенства $A_2 > 0$, $A_1 > 0$, следовательно, в ней функция z имеет минимум, причем $z_{\min} = -1$.

17.3. Экстремум неявно заданной функции. Если неявная функция $y : D \to \mathbb{R}$, где D — область пространства $\mathbb{R}^m$, определяется уравнением

$$f(x, y) = 0,$$

то, как известно, $f(x, y(x)) \equiv 0 \quad \forall x \in D$.

Пусть функция y дважды дифференцируема в области D и $x_0 \in D$ — ее стационарная точка. Тогда в точке x_0 имеем

$$dy(x_0)(dx) = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0)\, dx_i = 0, \quad f(x_0, y_0) = 0. \quad (1)$$

Поскольку справедливо и обратное утверждение, то стационарные точки функции y могут быть найдены из системы уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y(x)) = 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad f(x, y(x)) = 0. \quad (2)$$

Дифференцируя равенство

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x, y(x))\, dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x, y(x))\, dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x, y(x))\, dx_m +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))\, dy = 0$$

и принимая во внимание, что в стационарной точке x_0 $dy = 0$, получаем

$$d^2y(x_0)(dx) = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0, y_0)\, dx_i dx_j. \quad (3)$$

Если $d^2y(x_0)(dx) > 0$, то функция y имеет минимум в точке x_0; если $d^2y(x_0)(dx) < 0$, то функция y имеет максимум в этой точке.

Пример. Исследовать на экстремум функцию z, заданную неявно уравнением $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$.

Это уравнение определяет замкнутую поверхность $z = f(x, y)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, точки которой симметричны относительно плоскости xOy, поэтому в условии задачи речь идет о двух неявно заданных функциях. Полагая в уравнении $z = 0$

и переходя к полярным координатам, получаем равенство $\rho^2 = a^2$, из которого следует, что поверхность пересекается с плоскостью xOy по окружности $x^2 + y^2 = a^2$. Записав исходное уравнение в виде

$$z^2(a^2 + 2(x^2 + y^2)) = (x^2 + y^2)(a^2 - (x^2 + y^2)) - z^4,$$

заключаем, что любая точка (x, y), лежащая вне круга $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, уравнению поверхности не удовлетворяет, в силу чего стационарные точки следует искать в круге $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

Дифференцируя обе части исходного уравнения, получаем

$$2(x^2 + y^2 + z^2)(xdx + ydy) = a^2(xdx + ydy - zdz).$$

В стационарных точках $dz = 0$, поэтому имеем уравнение

$$2(x^2 + y^2 + z^2)(xdx + ydy) = a^2(xdx + ydy),$$

решая которое совместно с исходным уравнением, получаем, что стационарными точками являются все точки окружности $x^2 + y^2 = \frac{3}{8}a^2$. Вычисляя значения z в точках этой окружности, находим

$$z = \pm \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Для вычисления второго дифференциала, продифференцируем исходное уравнение дважды. Принимая во внимание, что в стационарных точках $dz = 0$, имеем

$$d^2z = -\frac{2(xdx + ydy)^2}{a^2 z}.$$

Если $z = \frac{a}{2\sqrt{2}}$, то $d^2z < 0$ и, следовательно $z_{\max} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$. Если $z = -\frac{a}{2\sqrt{2}}$, то $d^2z > 0$, в силу чего $z_{\min} = -\frac{a}{2\sqrt{2}}$.

§ 18. УСЛОВНЫЕ И АБСОЛЮТНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ ЧИСЛОВОЙ ФУНКЦИИ ВЕКТОРНОГО АРГУМЕНТА

18.1. Условные экстремумы. Пусть D — область пространства $\mathbb{R}^m$, f, g_1, ..., g_r — непрерывно дифференцируемые числовые функции на D.

Исследуем на экстремум функцию f на подмножестве $\Omega \subset D$, определенном уравнениями

$$g_1(x) = 0, \quad g_2(x) = 0, \quad \ldots, \quad g_r(x) = 0, \tag{1}$$

называемыми *уравнениями связи*.

Определение. *Функция f при наличии уравнений связи имеет условный максимум (минимум) в точке $a \in D$, которая удовлетворяет всем уравнениям* (1), *если существует такая окрестность этой точки, в пределах которой значение $f(a)$ является наибольшим (наименьшим) среди значений f во всех точках, удовлетворяющих уравнению* (1).

Из определения условных экстремумов следует, что приращение функции f в точке a рассматривается в пределах окрестности этой точки, принадлежащей множеству, определенному уравнениями связи (1).

Теорема. *Пусть f, g_1, g_2, ..., g_r — числовые непрерывно дифференцируемые функции, определенные в области $D \subset \mathbb{R}^m$, $a \in D$ — некото-*

рая точка, удовлетворяющая уравнениям (1) *и ранг матрицы Остроградского — Якоби системы функций* g_j, $j = \overline{1, r}$, *в точке* $\boldsymbol{a}$ *равен* $r < m$, *причем базисный минор этой матрицы является якобианом* $\frac{\mathscr{D}(g_1, g_2, \ldots, g_r)}{\mathscr{D}(x_1, x_2, \ldots, x_r)}(\boldsymbol{a})$. *Для того чтобы точка* $\boldsymbol{a}$ *была точкой условного максимума или условного минимума функции* f *на подмножестве* Ω *множества* D, *определенном уравнениями* (1), *необходимо, чтобы существовало* r *действительных постоянных* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, *при которых выполняется соотношение*

$$f'(\boldsymbol{a}) = \lambda_1 g_1'(\boldsymbol{a}) + \lambda_2 g_2'(\boldsymbol{a}) + \cdots + \lambda_r g_r'(\boldsymbol{a}). \tag{2}$$

Числа λ_j называются *множителями Лагранжа*, соответствующими экстремальной точке $\boldsymbol{a}$.

◀ Система уравнений связи (1), согласно теореме 3, п. 16.2, может быть разрешена в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{a}$ относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_r$ как функций от $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_m$:

$$x_j = u_j(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_m) = u_j(\boldsymbol{x}_{m-r}), \quad \boldsymbol{x}_{m-r} \in S(\boldsymbol{a}_{m-r}, \delta), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{a}_{m-r} = (a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_m)$. Функции u_j дифференцируемы в шаре $S(\boldsymbol{a}_{m-r}, \delta)$. Подставляя полученные значения x_j в уравнения связи, получим r тождеств относительно $\boldsymbol{x}$, принадлежащих некоторой окрестности точки $\boldsymbol{a}$,

$$g_j(u_1(\boldsymbol{x}_{m-r}), \ldots, u_r(\boldsymbol{x}_{m-r}), x_{r+1}, \ldots, x_m) = \\ = \varphi_j(x_{r+1}, \ldots, x_m) \equiv 0, \quad j = \overline{1, r}. \tag{4}$$

Дифференцируя эти тождества по переменным x_p, $p > r$, получаем

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_p} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial g_j}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_p} + \frac{\partial g_j}{\partial x_p} = (\mathscr{D}_p g_j, \mathscr{D}_p u) \equiv 0, \quad j = \overline{1, r}, \tag{5}$$

где $\mathscr{D}_p g_j = \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_1}, \frac{\partial g_j}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial g_j}{\partial x_r}, \frac{\partial g_j}{\partial x_p}\right)$, $\mathscr{D}_p u = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_p}, \frac{\partial u_2}{\partial x_p}, \ldots, \frac{\partial u_r}{\partial x_p}, 1\right)$, $p > r$,— векторы пространства $\mathbb{R}^{r+1}$; $(\mathscr{D}_p g_j, \mathscr{D}_p u)$ — скалярное произведение.

Приняв во внимание (3), функцию f можно считать непрерывно дифференцируемой функцией $m - r$ независимых переменных $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_m$:

$$f(u_1(\boldsymbol{x}_{m-r}), \ldots, u_r(\boldsymbol{x}_{m-r}), x_{r+1}, \ldots, x_m) = \psi(x_{r+1}, \ldots, x_m). \tag{6}$$

Вопрос существования условного экстремума функции f в точке $\boldsymbol{a}$ сведен к существованию локального экстремума функции ψ в точке $(a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_m) = \boldsymbol{a}_{m-r}$. В этой точке должны выполняться необходимые условия локального экстремума

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_p}(\boldsymbol{a}_{m-r}) = 0, \quad p = \overline{r+1, m}. \tag{7}$$

Поскольку

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_p} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_p} + \frac{\partial f}{\partial x_p} = (\mathscr{D}_p f,\ \mathscr{D}_p u),$$

где $\mathscr{D}_p f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_r}, \frac{\partial f}{\partial x_p} \right)$, $\mathscr{D}_p u$ — вектор из тождества (5), то условия (7) принимают вид

$$(\mathscr{D}_p f(\boldsymbol{a}),\ \mathscr{D}_p u(\boldsymbol{a}_{m-r})) = 0. \tag{8}$$

Сравнивая (5) и (8), замечаем, что векторы $\mathscr{D}_p g_j(\boldsymbol{a})$, $j = \overline{1, r}$, и вектор $\mathscr{D}_p f(\boldsymbol{a})$ ортогональны к одному и тому же ненулевому вектору $\mathscr{D}_p u(\boldsymbol{a}_{m-r})$.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{r+1}$ r-мерное подпространство, ортогональное к ненулевому вектору $\mathscr{D}_p u(\boldsymbol{a}_{m-r})$. Из (5) следует, что векторы $\mathscr{D}_p g_j$, $j = \overline{1, r}$, принадлежат этому подпространству. Поскольку, согласно теореме 1, п. 16.5, функции g_j, $j = \overline{1, r}$, независимы в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{a}$, то векторы $\mathscr{D}_p g_j$, $j = \overline{1, r}$ линейно-независимы и образуют базис рассматриваемого подпространства. Из равенства (8) заключаем, что вектор $\mathscr{D}_p f(\boldsymbol{a})$ также принадлежит рассматриваемому подпространству, в силу чего является линейной комбинацией базисных векторов $\mathscr{D}_p g_j(\boldsymbol{a})$:

$$\mathscr{D}_p f(\boldsymbol{a}) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \mathscr{D}_p g_j(\boldsymbol{a}), \quad p = \overline{r+1, m}, \tag{9}$$

где λ_j — действительные постоянные, не все равные нулю. Формулу (9) запишем в виде

$$\mathscr{D}_p \left(f - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j g_j \right)(\boldsymbol{a}) = 0, \quad p = \overline{r+1, m}. \tag{10}$$

Введем в рассмотрение функцию $F = f - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j g_j$, которую называют *функцией Лагранжа*. Принимая во внимание, что первые r координат вектора $\mathscr{D}_p F$ фиксированы, а p пробегает последовательно все значения от $r+1$ до m, заключаем, что соотношение (10) эквивалентно системе

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \tag{11}$$

из которой следует соотношение (2). ▶

Таким образом, для отыскания точек возможного условного экстремума требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}), \quad i = \overline{1, m}, \\ g_i(\boldsymbol{a}) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

относительно $m + r$ неизвестных: m координат точки $\boldsymbol{a}$ и r числовых параметров λ_j.

18.2. Достаточные условия условного экстремума. Поскольку уравнения связи удовлетворяются не только в точке $\boldsymbol{a}$, но и в некоторой ее окрестности, принадлежащей множеству, определяемому этими уравнениями, то для всех точек $\boldsymbol{x}$ из этой окрестности $\Delta f(\boldsymbol{a}) = \Delta F(\boldsymbol{a})$, т. е. приращение функции f в точке $\boldsymbol{a}$ совпадает с приращением в ней функции Лагранжа. Поэтому функция f имеет в точке $\boldsymbol{a}$ условный максимум, если $\Delta F(\boldsymbol{a}) < 0$ и условный минимум, если $\Delta F(\boldsymbol{a}) > 0$. Знак приращения функции Лагранжа в точке $\boldsymbol{a}$ определяется знаком $d^2F(\boldsymbol{a})$, если этот дифференциал существует, что обычно предполагается. Поскольку не все переменные являются независимыми, то дифференцируя уравнения связи, устанавливают зависимость между дифференциалами переменных и принимают во внимание эту зависимость при определении знака $d^2F(\boldsymbol{a})$.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z) = xy + yz$, $(x > 0, y > 0, z > 0)$, если $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$.

Образовав функцию Лагранжа $F(x, y, z) = xy + yz - \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) - \lambda_2(y + z - 2)$ и составив систему уравнений

$$F'_x = y - 2\lambda_1 x = 0, \quad F'_y = x + z - 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0,$$

$$F'_z = y - \lambda_2 = 0, \quad x^2 + y^2 = 2, \quad y + z = 2,$$

найдем числа λ_1, λ_2 и координаты стационарной точки:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = 1, \quad x = y = z = 1.$$

Запишем второй дифференциал $d^2F = -2\lambda_1(dx^2 + dy^2) + 2dxdy + 2dydz = -dx^2 - dy^2 + 2dxdy + 2dydz$. Из уравнений связи следует, что $dy = -dz = -dx$, поэтому $d^2F(1, 1, 1) = -dx^2 - 3dy^2 - 2dz^2 < 0$. Таким образом, в точке (1, 1, 1) функция f имеет условный максимум, равный 2.

18.3. Абсолютные экстремумы. Пусть $f : \bar{D} \to \mathbb{R}$ — непрерывная в замкнутой области $\bar{D} \subset \mathbb{R}^m$ функция. *Абсолютным максимумом (минимумом)* функции f в $\bar{D}$ называют ее наибольшее (наименьшее) значение в $\bar{D}$.

Абсолютные максимум и минимум функции f называют ее *абсолютными экстремумами*. Для абсолютных экстремумов приняты обозначения

$$\max_{x \in \bar{D}} f(x), \quad \min_{x \in \bar{D}} f(x).$$

Согласно известной теореме Вейерштрасса, непрерывная на компакте функция f достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значения. Эти значения могут достигаться как во внутренних точках компакта $\bar{D}$, так и на его границе.

Если какой-либо из абсолютных экстремумов достигается во внутренней точке из $\bar{D}$, то он является одновременно и локальным экстремумом.

Если же абсолютный экстремум достигается в точке, принадлежащей границе замкнутой области $\bar{D}$, то это точка условного экстремума (уравнениями связи являются уравнения границы области $\bar{D}$).

18.4. Замена переменных. Пусть в выражении $L(x, z, z'_x, \ldots)$, где $z: x \to z(x)$, $z: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$, требуется перейти к новому аргументу $t \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, и новой функции $w: t \to w(t)$, где

$$t = \varphi(x, z), \quad w = \psi(x, z). \tag{1}$$

Дифференцируя тождество $w \circ \varphi = \psi$, получаем

$$w'(\varphi'_x + \varphi'_z z') = \psi'_x + \psi'_z z',$$

откуда находим

$$z' = -\frac{\psi'_x - w'\varphi'_x}{\psi'_z - w'\varphi'_z}, \tag{2}$$

где

$$\psi'_x = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right), \quad w' = \left(\frac{\partial w}{\partial t_1} \quad \frac{\partial w}{\partial t_2} \quad \frac{\partial w}{\partial t_3}\right),$$

$$\psi'_z = \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad z' = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} \quad \frac{\partial z}{\partial x_3}\right),$$

$$\varphi'_x = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}, \quad \varphi'_z = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

В случае, когда производится замена лишь аргумента по формуле

$$t = \varphi(x, z), \tag{3}$$

то, обозначив $z = w \circ \varphi$ и дифференцируя, получаем

$$z' = w'(\varphi'_x + \varphi'_z z'),$$

откуда имеем

$$z' = \frac{w'\varphi'_x}{1 - w'\varphi'_z}. \tag{4}$$

Если, в частности, равенство (3) имеет вид

$$t = \varphi(x), \tag{5}$$

то из (4) следует равенство

$$z' = w'\varphi'. \tag{6}$$

Если же вместо (5) задано

$$x = F(t), \tag{7}$$

то, дифференцируя композицию $w = z \circ F$, имеем

$$w' = z'F', \tag{8}$$

откуда

$$z' = w'(F')^{-1}. \tag{9}$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} \quad \frac{\partial z}{\partial x_3}\right) =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\mathscr{D}(F_1, F_2, F_3)}{\mathscr{D}(t_1, t_2, t_3)}} \left(\frac{\mathscr{D}(w, F_1, F_2)}{\mathscr{D}(t_1, t_2, t_3)} \quad \frac{\mathscr{D}(F_1, w, F_2)}{\mathscr{D}(t_1, t_2, t_3)} \quad \frac{\mathscr{D}(F_1, F_2, w)}{\mathscr{D}(t_1, t_2, t_3)}\right). \qquad (10)$$

Наконец, если функция $x \mapsto z(x)$ связана с новой функцией $t \mapsto w(t)$ равенствами

$$x = f(t, w), \quad z = h(t, w), \qquad (11)$$

то, дифференцируя композицию $z \circ f = h$, находим $z'f' = h'$, откуда

$$z' = h'(f')^{-1}. \qquad (12)$$

Из (12) следует, что

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} \quad \frac{\partial z}{\partial x_3}\right) =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\mathscr{D}(f_1, f_2, f_3)}{\mathscr{D}(t_1, t_2, t_3)}} \left(\frac{\mathscr{D}(h, f_2, f_3)}{\mathscr{D}(t_1, t_2, t_3)} \quad \frac{\mathscr{D}(f_1, h, f_2)}{\mathscr{D}(t_1, t_2, t_3)} \quad \frac{\mathscr{D}(f_1, f_2, h)}{\mathscr{D}(t_1, t_2, t_3)}\right),$$

где

$$\frac{\mathscr{D}(h, f_2, f_3)}{\mathscr{D}(t_1, t_2, t_3)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial t_1} + \dfrac{\partial h}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial w}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial h}{\partial t_3} + \dfrac{\partial h}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial w}{\partial t_3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial t_1} + \dfrac{\partial f_3}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial w}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_3}{\partial t_3} + \dfrac{\partial f_3}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial w}{\partial t_3} \end{vmatrix}$$

и т. д.

Пример. В выражении $L = (xy + z)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (1 - y^2)\dfrac{\partial z}{\partial y} = x + yz$ перейти к новой переменной $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz - x \\ xz - y \end{pmatrix}$ и новой функции $w = xy - z$.

Записав левую часть данного выражения в виде

$$L = z' \begin{pmatrix} xy + z \\ 1 + y^2 \end{pmatrix}$$

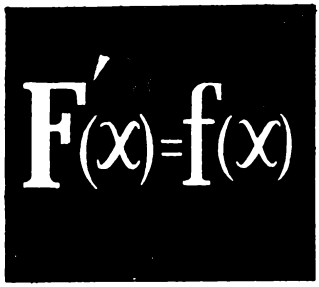
и применив формулу (2), получим

$$L = \frac{-1}{-1 - \left(\dfrac{\partial w}{\partial u} \quad \dfrac{\partial w}{\partial v}\right)\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}} \left((yx) - \left(\frac{\partial w}{\partial u} \quad \frac{\partial w}{\partial v}\right)\begin{pmatrix} -1 & z \\ z & -1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} xy + z \\ 1 - y^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{zy + x + y(x + zy)\dfrac{\partial w}{\partial u} + (1 - y^2 - z^2 - xyz)\dfrac{\partial w}{\partial v}}{1 + y\dfrac{\partial w}{\partial u} + x\dfrac{\partial w}{\partial v}} = x + yz.$$

Следовательно, после замены выражение $L = x + yz$ принимает вид

$$\frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$



5

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. ПЕРВООБРАЗНЫЕ И ИНТЕГРАЛЫ

В этой главе рассматриваются числовые функции, а также вектор-функции и функциональные матрицы одной переменной, принимающие свои значения в полном нормированном пространстве над полем $\mathbb{R}$.

Понятие *первообразной* (или *примитивной*) функции является одним из важнейших в математическом анализе.

1.1. Первообразная функция. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ — некоторые функции, причем F дифференцируема на сегменте $[a, b]$ и $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

Каким требованиям должна удовлетворять функция f, чтобы существовала функция F с указанным свойством?

Согласно теореме Дарбу из главы 4, непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция, имеющая производную на этом сегменте, принимает все промежуточные значения между $F'_+(a) = f(a)$ и $F'_-(b) = f(b)$. Поэтому функция f должна принимать все промежуточные значения между ее значениями в точках a и b. Этим свойством обладает, например, непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция.

Определение 1. *Пусть $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{J}$ — сегмент или интервал, конечный или бесконечный. Функция $F : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ называется точной первообразной (или точной примитивной) функции f на $\mathcal{J}$, если F дифференцируема на $\mathcal{J}$, причем*

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathcal{J}$$

В главе 6 будет показано, что все непрерывные на $\mathcal{J}$ функции имеют точные первообразные.

Однако класс непрерывных на $\mathcal{J}$ функций недостаточно широк для применений; даже простейшие кусочно-непрерывные функции могут не иметь точных первообразных в области своего определения. Например, функция $f : x \mapsto \operatorname{sgn} x$, $a \leqslant x \leqslant b$, $ab < 0$, не имеет точной первообразной на сегменте $[a, b]$, так как принимает на нем лишь значения -1, 0, 1, и поэтому не может совпадать с производной некоторой функции $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, которая согласно теореме Дарбу должна принимать все промежуточные значения между числами -1 и 1.

Обобщим теперь понятие первообразной на более широкий класс функций.

Определение 2. *Функция $F : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ называется первообразной (или примитивной) функции $f: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ на $\mathcal{J}$, если F непрерывна на $\mathcal{J}$ и имеет производную F', равную f во всех точках дополнения (относительно $\mathcal{J}$) некоторой не более чем счетной части $\mathcal{J}$.*

Приняв во внимание это определение, видим, что функция $f : x \mapsto \operatorname{sgn} x$, $a \leqslant x \leqslant b$, $ab < 0$, имеет первообразную $F : x \to |x|$, $a \leqslant x \leqslant b$, $ab < 0$, поскольку функция F непрерывна на $[a, b]$ и имеет производную $F'(x) = \operatorname{sgn} x \quad \forall x \in [a, b] \setminus \{0\}$.

Из определения 2 следует, что если функция $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ имеет на $\mathcal{J}$ первообразную F, то функция F является первообразной и для любой функции $\varphi : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, совпадающей с f всюду на $\mathcal{J}$, за исключением множества точек некоторой не более чем счетной части $\mathcal{J}$.

Например, функция $F : x \mapsto x[x] - \frac{[x]([x]+1)}{2}$, $0 \leqslant x < +\infty$, есть первообразная разрывной неограниченной функции $f : x \mapsto [x]$, $0 \leqslant x < +\infty$. Если образовывать новые функции путем изменения значений функции f, например, в точках $x = n$, $n \in \mathbb{N}$, то для каждой такой функции F является первообразной при $x \geqslant 0$.

Напомним, что символом $\mathcal{J}$ в этой главе обозначаем сегмент, или интервал (конечный или бесконечный).

Теорема 1. *Пусть $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ и функция $F : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ — первообразная функции f на $\mathcal{J}$. Тогда множество $\{\Phi\}$ всех первообразных функции f на $\mathcal{J}$ совпадает с множеством функций $\{F + C\}$, где $C \in \mathbb{R}$ — произвольная постоянная.*

◀ Если F — первообразная функции f на $\mathcal{J}$, то функция $F + C$, где $C \in \mathbb{R}$ — произвольная постоянная, также является первообразной функции f, поскольку функция $F + C$ непрерывна на $\mathcal{J}$ и $(F + C)' = f$ во всех точках $x \in \mathcal{J}$, за исключением некоторой не более чем счетной части $\mathcal{J}$. Пусть $\Phi_0 \in \{\Phi\}$ — произвольная первообразная функции f на $\mathcal{J}$, причем $\Phi_0 \neq F$. Тогда функция $\varphi = \Phi_0 - F$ имеет производную в каждой точке $x \in \mathcal{J}$, за исключением некоторой не более чем счетной части $\mathcal{J}$, причем в точках существования $\varphi'(x) \equiv 0$. Поскольку функция φ непрерывна на $\mathcal{J}$, а ее производная φ' равна нулю в каждой точке $x \in \mathcal{J}$, за исключением не более чем счетной части $\mathcal{J}$, то согласно следствию 2 из теоремы § 5, гл. 4, имеем $\varphi(x) = C \quad \forall x \in \mathcal{J}$, где $C = \text{const}$. Поэтому $\Phi_0 = F + C$. Так как Φ_0 — произвольная первообразная функции f на $\mathcal{J}$, то теорема доказана. ▶

Таким образом, будем считать, что первообразные функции $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ (если они существуют) определены с точностью до аддитивной постоянной.

Для того чтобы выделить какую-либо одну первообразную функции f на $\mathcal{J}$, достаточно задать ее значение в фиксированной точке $x_0 \in \mathcal{J}$. Тогда, в частности, существует единственная первообразная F функции f такая, что $F(x_0) = 0$.

Определение 3. *Вектор-функция $\mathbf{F} : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^m$ называется первообразной (или примитивной) вектор-функции $\mathbf{f} : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^m$ на $\mathcal{J}$, если F непрерывна на $\mathcal{J}$ и имеет производную $\mathbf{F}'$,*

равную f во всех точках дополнения (относительно $\mathcal{J}$) некоторой не более чем счетной части $\mathcal{J}$.

Теорема 2. *Пусть $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^m$, а вектор-функция $F : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^m$ — первообразная вектор-функции f на $\mathcal{J}$. Тогда множество $\{\Phi\}$ всех первообразных вектор-функции f на $\mathcal{J}$ совпадает с множеством вектор-функций $\{F + C\}$, где $C \in \mathbb{R}^m$ — произвольный постоянный вектор.*

◀ Утверждение теоремы следует из того, что каждая из компонент вектор-функции F является первообразной соответствующей компоненты вектор-функции f на $\mathcal{J}$. Остается лишь применить теорему 1 к m числовым функциям. ▶

Определение 4. *Функциональная матрица $B(x) = (b_{ij}(x))$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, элементы которой — функции $b_{ij} : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, называется первообразной (или примитивной) на $\mathcal{J}$ функциональной матрицы $A(x) = (a_{ij}(x))$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, элементы которой — функции $a_{ij} : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, если B непрерывна на $\mathcal{J}$ и имеет производную, равную A во всех точках дополнения (относительно $\mathcal{J}$) некоторой не более чем счетной части $\mathcal{J}$.*

Как и в случае числовой, так и для вектор-функции справедливо утверждение: *множество всех первообразных функциональной матрицы A на $\mathcal{J}$ совпадает с множеством функциональных матриц $\{B + C\}$, где B — произвольная первообразная матрица для A, C — произвольная постоянная матрица (c_{ij}), $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.*

Определение 5. *Пусть функция $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ имеет на $\mathcal{J}$ первообразную. Неопределенным интегралом функции f на $\mathcal{J}$ назовем множество $\{\Phi\}$ всех ее первообразных на $\mathcal{J}$ и обозначим это множество символом $\int f(x)\,dx$.*

При этом произведение $f(x)\,dx$ называется *подынтегральным выражением*, а функция f — *подынтегральной функцией*.

Определение 6. *Пусть $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^m$ — вектор-функция, имеющая на $\mathcal{J}$ первообразную. Неопределенным интегралом вектор-функции f на $\mathcal{J}$ называется множество $\{\Phi\}$ всех ее первообразных на $\mathcal{J}$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx$.*

Произведение $f(x)\,dx$ называется *подынтегральным выражением*, а функция f — *подынтегральной функцией*.

Определение 7. *Пусть $A(x) = (a_{ij}(x))$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$,— функциональная матрица, имеющая на $\mathcal{J}$ первообразную. Неопределенным интегралом матрицы A на $\mathcal{J}$ назовем множество $\{B\}$ всех ее первообразных на $\mathcal{J}$ и обозначим это множество символом $\int A(x)\,dx$.*

Произведение $A(x)\,dx$ называется *подынтегральным выражением*, а матрица A — *подынтегральной функцией*.

Из определений 1—7 и теорем 1, 2 следует, что

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\}, \quad x \in \mathcal{J}, \tag{1}$$

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\}, \quad x \in \mathcal{J}, \tag{2}$$

$$\int A(x)\,dx = \{B(x) + C^*\}, \quad x \in \mathcal{J}, \tag{3}$$

где F, $\boldsymbol{F}$, B — произвольные первообразные для f, $\boldsymbol{f}$ и A соответственно, C — произвольная постоянная, $\boldsymbol{C}$ — произвольный постоянный вектор, C^*— произвольная постоянная матрица.

Лейбниц понимал неопределенный интеграл как произвольную (неопределенную) первообразную и обозначал ее $\int f(x)\,dx$. Это одно из наиболее слабых мест в системе разумных обозначений Лейбница. Позднее, чтобы сделать корректным обозначение Лейбница, под неопределенным интегралом стали понимать множество всех первообразных функций. За счет этого усложнились операции с неопределенными интегралами, которые стали операциями с множествами, а не с функциями. Условимся о некоторых действиях над неопределенными интегралами. Эти операции позволят объединить преимущества современной идеи и идеи Лейбница.

Пусть F — первообразная функции f. Будем писать $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ вместо $\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\}$. Далее, сумму двух множеств, состоящих из элементов некоторой абелевой группы, будем понимать как множество сумм, у которых первое слагаемое взято из первого множества, а второе слагаемое взято из второго множества. Такая сумма множеств называется *арифметической*.

Для случая множеств всех первообразных операция сложения заметно упрощается. Достаточно взять какую-нибудь первообразную F функции f, сложить ее с произвольно выбранной, но фиксированной первообразной G функции g, и образовать множество $\{F(x) + G(x) + C\}$, где C — произвольная постоянная. Это множество и есть сумма неопределенных интегралов. Принимая во внимание сказанное выше, это можно записать так:

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = F(x) + G(x) + C.$$

Совершенно аналогично рассматриваются и другие операции с неопределенными интегралами. Например, если f и g — функции, заданные на одном и том же промежутке, то $f(x) + \int g(x)\,dx$ есть множество $\{f(x) + G(x) + C\}$, где C — произвольная постоянная, а G — некоторая первообразная функции g. Таким образом, в процессе вычислений неопределенный интеграл можно понимать как произвольную первообразную, а ответ нужно понимать как множество функций, составленное из всевозможных результатов таких вычислений. Наконец, формально за счет наличия пустого множества при нашем определении неопределенный интеграл всегда существует. Условимся считать, что функция на промежутке имеет неопределенный интеграл, если у нее есть хотя бы одна первообразная. Поэтому неопределенный интеграл, если он существует, является непустым множеством.

В дальнейшем будем предполагать, что функции, о которых будет идти речь, имеют первообразные на промежутке $\mathcal{J}$.

1.2. Свойства неопределенного интеграла.

а) Производная неопределенного интеграла

$$\int f(x)\,dx \tag{1}$$

функции $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ существует в каждой точке $x \in \mathcal{J}$, за исключением некоторой не более чем счетной части $\mathcal{J}$ и при этом

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x). \tag{2}$$

Если f имеет точную первообразную на $\mathcal{J}$, то равенство (2) справедливо $\forall\, x \in \mathcal{J}$.

◀ Справедливость утверждения следует из определения первообразной, точной первообразной и неопределенного интеграла функции f. ▶

б) Дифференциал неопределенного интеграла функции $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ существует в каждой точке $x \in \mathcal{J}$, за исключением некоторой его не более чем счетной части и при этом

$$d \int f(x)\,dx = f(x)\,dx. \tag{3}$$

Если f имеет точную первообразную на $\mathcal{J}$, то равенство (3) выполняется $\forall\, x \in \mathcal{J}$.

◀ Доказательство следует из свойства а). ▶

Равенство (3) показывает, что знаки d и $\int$ взаимно сокращаются на $\mathcal{J}$, если f имеет точную первообразную на $\mathcal{J}$, а знак дифференциала стоит перед знаком интеграла.

в) Пусть $F : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая на $\mathcal{J}$ функция. Тогда справедлива формула

$$\int dF(x) = F(x) + C. \tag{4}$$

◀ Из определения функции F следует, что она является точной первообразной некоторой функции $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ на $\mathcal{J}$:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Тогда на основании формулы (3) имеем

$$f(x)\,dx = dF(x) \quad \forall\, x \in \mathcal{J}, \quad \text{т. е.} \int dF(x) = F(x) + C. \ \blacktriangleright$$

Из формулы (4) следует, что знаки $\int$ и d взаимно сокращаются и тогда, когда знак интеграла стоит перед знаком дифференциала, но при этом к функции F добавляется произвольная постоянная C.

Аналогичные свойства для интегралов вектор-функций и матриц предлагаем сформулировать читателю самостоятельно.

1.3. Таблица основных неопределенных интегралов. Таблицу интегралов получим, используя таблицу производных из гл. 4 (в каждой формуле таблицы интегралов C — произвольная постоянная):

1) $\int 0\,dx = C$;

2) $\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \quad \mu \neq -1, \quad x \in \mathbb{R}$;

3) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \quad x \in \mathcal{J}, \quad \mathcal{J} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

4) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C, \quad x \in \mathbb{R}$;

5) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad |x| < 1$;

6) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R}$;

7) $\int e^x dx = e^x + C, \quad x \in \mathbb{R};$

8) $\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad x \in \mathbb{R};$

9) $\int \cos x dx = \sin x + C, \quad x \in \mathbb{R};$

10) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \in \mathcal{J}, \quad \mathcal{J} \subset \mathbb{R} \setminus \{k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\};$

11) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad x \in \mathcal{J}, \ \mathcal{J} \subset \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\};$

12) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C, \quad x \in \mathbb{R};$

13) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C, \quad x \in \mathbb{R};$

14) $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C, \quad x \in \mathcal{J}, \quad \mathcal{J} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\};$

15) $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C, \quad x \in \mathbb{R};$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int (\operatorname{arsh} x)' dx = \ln (x + \sqrt{x^2+1}) + C, \quad x \in \mathbb{R};$

17) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \int (\operatorname{arch} x)' dx = \ln (x + \sqrt{x^2-1}) + C, \quad x > 1;$

18) $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C, \quad x \in \mathcal{J}, \quad \mathcal{J} \subset \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$

Дифференцируя левые и правые части формул 1) — 18), убеждаемся в их справедливости.

1.4. Простейшие правила интегрирования.

1) Если функция $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ имеет первообразную $\mathcal{J}$, то и функция αf, $\alpha = \text{const}$, имеет на $\mathcal{J}$ первообразную, причем

$$\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx, \tag{1}$$

т. е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

◀ Доказательство утверждения следует из свойства а) и правила дифференцирования, согласно которому постоянный множитель можно выносить за знак производной. Применив это правило и формулу (2), п. 1.2, получим

$$\frac{d}{dx} (\alpha \int f(x) dx) = \alpha \frac{d}{dx} \int f(x) dx = \alpha f(x)$$

для всех $x \in \mathcal{J}$, за исключением не более чем счетной части $\mathcal{J}$.

Таким образом, функция αf имеет на $\mathcal{J}$, согласно определению, первообразную F, причем $F(x) = \alpha \int f(x) dx$. Поскольку функция F определена с точностью до аддитивной постоянной, то и равенство (1) следует понимать выполненным с точностью до аддитивной постоянной. ▶

2) Если функции $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $g : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ имеют каждая первообразную на $\mathcal{J}$, то и функции $f \pm g$ имеют первообразные на $\mathcal{J}$, причем

$$\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx. \qquad (2)$$

◀ Обозначим $F(x) = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$ и воспользуемся правилом дифференцирования суммы двух функций и формулой (2), п. 1.2. Функция F, определяемая с точностью до аддитивной постоянной, имеет производную в каждой точке $x \in \mathcal{J}$, за исключением некоторой счетной части $\mathcal{J}$, и для указанных значений x имеем

$$F'(x) = f(x) \pm g(x).$$

Из полученного соотношения следует, что функции $f \pm g$ имеют на $\mathcal{J}$ первообразную F, т. е. справедливо (с точностью до аддитивной постоянной) равенство (2). ▶

Аналогичные свойства для вектор-функций и функциональных матриц предлагаем сформулировать самостоятельно.

3) Если функция $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ имеет на $\mathcal{J}$ первообразную F, т. е.

$$\int f(t)\, dt = F(t) + C,$$

то

$$\int f(Ax + B)\, dx = \frac{1}{A} F(Ax + B) + C, \quad A \neq 0. \qquad (3)$$

◀ Функция F непрерывна на $\mathcal{J}$, а равенство $F'(t) = f(t)$ выполняется в каждой точке $t \in \mathcal{J}$, за исключением некоторой не более чем счетной части $\mathcal{J}$. Тогда для каждого x из некоторой области $\mathcal{J}_1$, за исключением не более чем счетной части $\mathcal{J}_1$, имеем

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{F(Ax + B)}{A}\right) = F'(Ax + B) = f(Ax + B),$$

т. е. непрерывная функция $\varphi : x \mapsto \dfrac{F(Ax + B)}{A}$, $x \in \mathcal{J}$, является первообразной для функции $x \mapsto f(Ax + B)$ на $\mathcal{J}_1$. ▶

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение формулы (3).

Пример. Вычислить $\int \sqrt[3]{1 - 3x}\, dx$, $-\infty < x < +\infty$.

Согласно таблице интегралов, имеем

$$\int \sqrt[3]{t}\, dt = \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} + C,$$

а применив формулу (3), получим

$$\int \sqrt[3]{1 - 3x}\, dx = -\frac{1}{4}(1 - 3x)^{\frac{4}{3}} + C.$$

Сделаем одно замечание, относящееся к технике отыскания первообразных для разрывных ограниченных функций.

Пусть $x_0 \in \mathcal{J}$ — точка разрыва первого рода функции $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{J}$, например, интервал $]a, b[$. Если удалось построить точные пер-

вообразные F_1 и F_2 сужений функции f на интервалы $]a, x_0[$ и $]x_0, b[$, которые, как будет показано в гл. 5, для непрерывных функций всегда существуют, то первообразную функции f на всем интервале $\mathcal{J}$ будем строить, полагая

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) + C, & x \in]a, x_0[, \quad C = \text{const}, \\ F_2(x), & x \in]x_0, b[, \\ F(x_0) = F_1(x_0 - 0) + C = F_2(x_0 + 0). \end{cases}$$

Построенная так функция F удовлетворяет определению первообразной функции f на интервале $\mathcal{J}$ и ее непрерывность достигается выбором постоянной C. Построим, например, первообразную функции $f: x \to [x]$, $x \in \mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}: x \geqslant 0\}$. Если $x \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}$, то $f(x) = n - 1$; если $x \in]n, n+1[$, $n \in \mathbb{N}$, то $f(x) = n$.

Таким образом, функция $F_{n-1}: x \to (n-1)x + C_{n-1}$, $C_{n-1} \in \mathbb{R}$, является первообразной сужения функции f на интервал $]n-1, n[$, а функция $F_n: x \to nx + C_n$, $C_n \in \mathbb{R}$,— первообразной для сужения f на интервал $]n, n+1[$. Из условия непрерывности первообразной в точках $x = n$ находим, что $F_{n-1}(n-0) = F_n(n+0)$, т. е. $(n-1)n + C_{n-1} = n^2 + C_n$, откуда $C_n = C_{n-1} - n$, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, при $n = 1, 2, \ldots$, получаем

$$C_1 = C_0 - 1, \quad C_2 = C_1 - 2 = C_0 - 3, \quad C_3 = C_2 - 3 = C_0 - 6,$$

$$C_4 = C_3 - 4 = C_0 - 10, \ \ldots, \ C_n = C_0 - \frac{n(n+1)}{2}, \quad C_0 = \text{const}.$$

Поскольку $n = [x]$, $x \in [n, n+1]$, то

$$F(x) = x[x] - \frac{[x]([x]+1)}{2} + C_0,$$

где C_0 —произвольная постоянная, является первообразной для функции f на положительной полуоси $x \geqslant 0$.

§ 2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

2.1. Метод разложения. Этот метод применяют в случаях, когда функцию $f: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ можно представить в виде суммы функций $f_j: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$, таких, первообразные которых легко построить. Тогда, согласно формуле (2), п. 1.4, получим

$$\int f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \int f_j(x)\,dx, \quad x \in \mathcal{J}.$$

Пример. Вычислить $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx$, $x \neq 1$.

Разложим x^2 по степеням бинома $(1-x)$, получим

$$x^2 = (1-x)^2 - 2(1-x) + 1.$$

Подставив это разложение в числитель подынтегрального выражения, применив формулы (1), (2), п. 1.4, табличный интеграл 2) и формулу (3), п. 1.4, получим

$$\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx = \int \frac{(1-x)^2 - 2(1-x) + 1}{(1-x)^{100}}\,dx =$$

$$= \int \frac{dx}{(1-x)^{98}} - 2\int \frac{dx}{(1-x)^{99}} + \int \frac{dx}{(1-x)^{100}} =$$

$$= \frac{1}{97(1-x)^{97}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{99(1-x)^{99}} + C, \quad x \neq 1.$$

2.2. Метод подстановки (замены переменной). Пусть $\varphi : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ непрерывная на $\mathcal{T}$ функция, дифференцируемая на $\mathcal{T}$ в каждой точке дополнения (относительно $\mathcal{T}$) не более чем счетной части $\mathcal{T}$. Тогда φ является первообразной для всякой функции, определенной на $\mathcal{T}$ и принимающей значения φ' в каждой точке $x \in \mathcal{T}$, в которой функция φ дифференцируема. Обозначим любую такую функцию символом φ'. Пусть $g : \mathcal{T}_1 \to \mathbb{R}$ — непрерывная на $\mathcal{T}_1$ функция, причем $\mathcal{T}_1 \supset \varphi(\mathcal{T})$. Тогда на $\mathcal{T}$ определена сложная функция $g \circ \varphi : x \mapsto g(\varphi(x))$. Пусть G — точная первообразная функции g на $\mathcal{T}_1$: $G'(t) = g(t) \quad \forall\, t \in \mathcal{T}_1$. Поскольку функция G определена на $\mathcal{T}_1$, то в силу включения $\mathcal{T}_1 \supset \varphi(\mathcal{T})$ на $\mathcal{T}$ определена композиция $F = G \circ \varphi : x \mapsto G(\varphi(x))$, причем функция F непрерывна на $\mathcal{T}$ и имеет производную, равную $g(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ во всех точках дополнения (относительно $\mathcal{T}$) некоторой не более чем счетной части $\mathcal{T}$. Поэтому функция $G \circ \varphi$ является на $\mathcal{T}$ первообразной функции $x \mapsto g(\varphi(x))\,\varphi'(x)$, где φ'— функция, о которой упоминалось выше:

$$\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = G(\varphi(x)) + C.$$

Таким образом, если G — точная первообразная функции g на $\mathcal{T}_1$, то $G \circ \varphi$ — первообразная функции $x \mapsto g(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ на $\mathcal{T}$.

Пусть требуется вычислить $\int f(x)\,dx$. Если с помощью подстановки $t = \varphi(x)$, где φ — функция, о которой говорилось выше, придем к равенству $f(x)\,dx = g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$, причем легко вычисляется $\int g(t)\,dt = G(t) + C$, то

$$\int f(x)\,dx = \int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = G(\varphi(x)) + C. \qquad (1)$$

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Иногда при вычислении $\int f(x)\,dx$ делают замену $x = \varphi(t)$, $t \in \mathcal{T}_1$, при условии, что существует обратная функция $\varphi^{-1}: x \mapsto \varphi^{-1}(x)$, $x \in \mathcal{T}$, непрерывная на $\mathcal{T}$ и дифференцируемая в каждой точке $x \in \mathcal{T}$, за исключением не более чем счетного множества точек из $\mathcal{T}$. Если легко вычисляется $\int g(t)\,dt = G(t) + C$, где $g(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$, то

$$\int f(x)\,dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

Пример. Вычислить $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx, \quad x \in \mathbb{R}$.

Разделив числитель и знаменатель подынтегрального выражения на $x^2 \neq 0$, запишем его в виде

$$\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \frac{d\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}{\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + 2}.$$

Замена $x - \frac{1}{x} = t\sqrt{2}$ приводит к интегралу

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C.$$

Поскольку функция $F : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, не определена при $x = 0$, то она не является первообразной подынтегральной функции на всей числовой прямой. Приняв во внимание соотношение $F(-0) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, $F(+0) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, видим, что функция

$$\Phi : x \mapsto \begin{cases} F(x) + \varepsilon(x), & \text{если } x \neq 0, \quad \text{где } \varepsilon(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \operatorname{sgn} x, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

удовлетворяет определению первообразной подынтегральной функции на всей числовой прямой. Следовательно,

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx = \Phi(x) + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.3. Интегрирование по частям. При умелом использовании интегрирование по частям позволяет эффективно находить многие первообразные.

Пусть $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $g : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ — непрерывные на $\mathcal{J}$ функции, дифференцируемые в каждой точке дополнения (относительно $\mathcal{J}$) некоторого не более чем счетного множества точек $\mathcal{J}$. Тогда функции f и g являются на $\mathcal{J}$ первообразными для некоторых функций (которые для простоты обозначим символами f' и g'), определенных на $\mathcal{J}$ и принимающих в точках дифференцируемости функций f и g значения их производных.

Функция fg в каждой точке x дополнения некоторой не более чем счетной части $\mathcal{J}$ имеет производную

$$(fg)'(x) = f(x)\, g'(x) + g(x)\, f'(x) \tag{1}$$

и является первообразной функции $fg' + gf'$ на $\mathcal{J}$, где f' и g' — функции, о которых упоминалось выше. Таким образом, интегрируя правую часть равенства (1), получим

$$\int (f(x)\, g'(x) + g(x)\, f'(x))\, dx = f(x)\, g(x) + C, \quad x \in \mathcal{J}.$$

Исходя из предположения, что функции fg' и gf' имеют первообразные, полученную формулу обычно записывают в виде

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int g(x) f'(x)\, dx, \quad x \in \mathcal{J}, \tag{2}$$

и называют *формулой интегрирования по частям*. Постоянная в формулу (2) не входит, так как она подразумевается неявно в правой части этой формулы.

Если f и g дифференцируемы на $\mathcal{T}$, то формулу (2) записывают в виде

$$\int f(x)\,dg(x) = f(x)\,g(x) - \int g(x)\,df(x), \quad x \in \mathcal{T}. \tag{3}$$

Рассмотрим пример на интегрирование с помощью формулы (3).

Пример. Вычислить $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$, $(|x| < 1,\ x \neq 0)$.

Записав интеграл в виде

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx = \int \arcsin x\, d\left(-\frac{1}{x}\right)$$

и применив формулу (3), в которой $f(x) = \arcsin x$, $dg(x) = d\left(-\frac{1}{x}\right)$, получим

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\arcsin x + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Полученный в правой части интеграл легко приводится к табличному. В самом деле, замечая, что

$$\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{dx}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} = -\frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{|x|}\right)^2-1}}$$

и принимая во внимание формулу 17) таблицы интегралов, находим

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\ln\left(\frac{1}{|x|} + \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right) + C = \ln\frac{|x|}{1+\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\arcsin x + \ln\frac{|x|}{1+\sqrt{1-x^2}} + C, \quad |x| < 1,\ x \neq 0.$$

2.4. Замена переменной в интеграле от вектор-функции. Пусть $\varphi : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ — непрерывная на $\mathcal{T}$ функция, дифференцируемая на $\mathcal{T}$ в каждой точке дополнения (относительно $\mathcal{T}$) некоторой не более чем счетной части $\mathcal{T}$. Тогда φ является первообразной всякой функции, определенной на $\mathcal{T}$ и принимающей значения φ' в каждой точке $x \in \mathcal{T}$, в которой функция φ, дифференцируема, а в точках недифференцируемости φ, принимающей произвольные конечные значения. Обозначим такую функцию символом φ'. Пусть $\boldsymbol{g} : \mathcal{T}_1 \to \mathbb{R}^m$ — непрерывная на $\mathcal{T}_1$ вектор-функция, причем $\mathcal{T}_1 \supset \varphi(\mathcal{T})$; тогда на $\mathcal{T}$ определена сложная вектор-функция $\boldsymbol{g} \circ \varphi : x \mapsto \boldsymbol{g}(\varphi(x))$. Пусть G — точная первообразная вектор-функции $\boldsymbol{g}$ на $\mathcal{T}_1$: $G'(t) = \boldsymbol{g}(t) \quad \forall t \in \mathcal{T}_1$. Поскольку вектор-функция $\boldsymbol{G}$ определена на $\mathcal{T}_1$, то в силу включения $\mathcal{T}_1 \supset \varphi(\mathcal{T})$, на $\mathcal{T}$ определена композиция $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} \circ \varphi : x \mapsto \boldsymbol{G}(\varphi(x))$, причем вектор-функция $\boldsymbol{F}$ непрерывна на $\mathcal{T}$ и имеет производную, равную $\boldsymbol{g}(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ во всех точках дополнения (относительно $\mathcal{T}$) некоторой не более чем счетной части $\mathcal{T}$ (так как $\boldsymbol{F}'(x) =$

$= \boldsymbol{G}'(\varphi(x))\,\varphi'(x) = \boldsymbol{g}(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ в указанных точках). Поэтому вектор-функция $\boldsymbol{G} \circ \varphi$ является первообразной вектор-функции $x \mapsto \boldsymbol{g}(\varphi(x))\,\varphi'(x)$, $x \in \mathcal{T}$ (где φ'— функция, о которой упоминалось выше):

$$\int \boldsymbol{g}(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \boldsymbol{G}(\varphi(x)) + \boldsymbol{C}.$$

Таким образом, если $\boldsymbol{G}$ — точная первообразная вектор-функции $\boldsymbol{g}$ на $\mathcal{T}_1$, то вектор-функция $\boldsymbol{G} \circ \varphi$—первообразная функции $x \mapsto \boldsymbol{g}(\varphi(x)) \times \varphi'(x)$ на $\mathcal{T}$.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int \boldsymbol{f}(x)\,dx$. Если с помощью подстановки $t = \varphi(x)$, где φ — функция, рассмотренная выше, получим равенство $\boldsymbol{f}(x)\,dx = \boldsymbol{g}(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$ (где φ' — функция, введенная в рассмотрение выше), причем легко вычисляется $\int \boldsymbol{g}(t)\,dt = \boldsymbol{G}(t) + \boldsymbol{C}$, то

$$\int \boldsymbol{f}(x)\,dx = \int \boldsymbol{g}(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \boldsymbol{G}(\varphi(x)) + \boldsymbol{C},$$

где $\boldsymbol{C}$ — произвольный постоянный вектор.

Полученную формулу называют формулой замены переменной в интеграле от вектор-функции. Однако поскольку интегрирование вектор-функции $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^m$ приводит к интегрированию числовых функций — компонент вектора $\boldsymbol{f}$, то вопрос замены переменной в интеграле от вектор-функции сводится в общем случае к замене переменной в каждом из интегралов

$$\int f_j(x)\,dx, \quad j = \overline{1,\ m}.$$

2.5. Интегрирование по частям вектор-функций и матриц. Пусть $\boldsymbol{f}: \mathcal{T} \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{g}: \mathcal{T} \to \mathbb{R}^m$ — непрерывные на $\mathcal{T}$ вектор-функции, дифференцируемые в каждой точке дополнения (относительно $\mathcal{T}$) некоторого не более чем счетного множества точек $\mathcal{T}$. Тогда вектор-функции $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ являются на $\mathcal{T}$ первообразными для некоторых вектор-функций (которые обозначим символами $\boldsymbol{f}'$ и $\boldsymbol{g}'$), определенных на $\mathcal{T}$ и принимающих в точках дифференцируемости вектор-функций $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ значения их производных. Тогда скалярное и векторное произведения вектор-функций $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ в каждой точке x дополнения (относительно $\mathcal{T}$) некоторой не более чем счетной части $\mathcal{T}$ имеют производные, соответственно равные

$$(\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{g})'(x) = (\boldsymbol{f}'(x),\ \boldsymbol{g}(x)) + (\boldsymbol{f}(x),\ \boldsymbol{g}'(x)),$$

$$[\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{g}]'(x) = [\boldsymbol{f}'(x),\ \boldsymbol{g}(x)] + [\boldsymbol{f}(x),\ \boldsymbol{g}'(x)],$$

(см. формулу, п. 12.6, и формулу (1), п. 12.7, гл. 4), и являются первообразными соответственно для функций

$$x \mapsto (\boldsymbol{f}'(x),\ \boldsymbol{g}(x)) + (\boldsymbol{f}(x),\ \boldsymbol{g}'(x)), \quad x \in \mathcal{T}, \tag{1}$$

$$x \mapsto [\boldsymbol{f}'(x),\ \boldsymbol{g}(x)] + [\boldsymbol{f}(x),\ \boldsymbol{g}'(x)], \quad x \in \mathcal{T}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{f}'$ и $\boldsymbol{g}'$— вектор-функции, введенные в рассмотрение выше.

Интегрируя (1) и (2), приходим к формулам интегрирования по частям:

$$\int (f(x),\ g'(x))\,dx = (f(x),\ g(x)) - \int (f'(x),\ g(x))\,dx, \tag{3}$$

$$\int [f(x),\ g'(x)]\,dx = [f(x),\ g(x)] - \int [f'(x),\ g(x)]\,dx. \tag{4}$$

Если f и g — дифференцируемые на $\mathcal{J}$ функции, то формулы (3) и (4) принимают вид

$$\int (f(x),\ dg(x)) = (f(x),\ g(x)) - \int (g(x),\ df(x)), \tag{5}$$

$$\int [f(x),\ dg(x)] = [f(x),\ g(x)] - \int [df(x),\ g(x)]. \tag{6}$$

Если функциональные матрицы $A(x) = (a_{ij}(x))$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, и $B(x) = (b_{ks}(x))$, $k = \overline{1, m}$, $s = \overline{1, n}$, дифференцируемы на $\mathcal{J}$, то справедлива формула интегрирования по частям

$$\int A(x)\,B'(x)\,dx = A(x)\,B(x) - \int A'(x)\,B(x)\,dx,$$

доказать которую предлагаем самостоятельно.

Сделаем одно замечание, относящееся к интегрированию с помощью подстановки.

Производя замену переменной по формуле $t = \varphi(x)$, предполагаем, что функция φ имеет обратную функцию $\psi : \mathcal{J}_1 \to \mathcal{J}$, а для этого достаточно, чтобы φ была строго монотонной на $\mathcal{J}$. Поскольку φ, по предположению, дифференцируемая в каждой точке $\mathcal{J}$, за исключением некоторой не более чем счетной части $\mathcal{J}$, то, согласно следствию 5 из теоремы § 5, гл. 4, функция φ строго монотонна на $\mathcal{J}$ тогда и только тогда, когда $\varphi'(x) \geqslant 0$ ($\varphi'(x) \leqslant 0$) в точках существования φ' и множество тех точек $x \in \mathcal{J}$, в которых $\varphi'(x) > 0$, всюду плотно на $\mathcal{J}$.

Если это условие не выполнено, то, применив подстановку, можно получить неправильный результат.

2.6. Некоторые часто встречающиеся интегралы. Рассмотрим некоторые интегралы, которые в дальнейшем часто будут встречаться:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $a > 0$, $|x| < a$.

Применим подстановку $x = at$; тогда $dx = a\,dt$ и после проведения замены получим табличный интеграл 5):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

2) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Полагая в интеграле $x = at$, получаем после замены табличный интеграл 4):

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Замена $x = at$ приводит к табличному интегралу 16):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \operatorname{arsh} t + C =$$

$$= \operatorname{arsh} \frac{x}{a} + C = \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

(аддитивное слагаемое $-\ln a$, получаемое из формулы $\operatorname{arsh} \frac{x}{a} = \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1} \right) = \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \ln a$, внесено в постоянную C).

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, $a > 0$, $|x| > a$.

Замена переменной по формуле $x = at$ приводит к табличному интегралу 17):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \operatorname{arch} t + C =$$

$$= \operatorname{arch} \frac{x}{a} + C = \ln (x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C.$$

5) $\int \frac{dx}{x - a}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq a$.

Замена $x - a = t$ позволяет получить табличный интеграл 3):

$$\int \frac{dx}{x - a} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |x - a| + C.$$

6) $\int \frac{dx}{(x - a)^n}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq a$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$.

Произведем замену переменной $x - a = t$; тогда $dx = dt$, и после замены получим табличный интеграл 2), в котором $\mu = -n$:

$$\int \frac{dx}{(x - a)^n} = \int \frac{dt}{t^n} = -\frac{1}{(n - 1)\, t^{n-1}} + C = -\frac{1}{(n - 1)\, (x - a)^{n-1}} + C.$$

7) $\int \frac{dx}{x^2 + px + q}$, $p, q \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим сначала случай, когда квадратный трехчлен, стоящий под знаком интеграла в знаменателе, не имеет действительных нулей. Тогда $A^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$ и, полагая в интеграле $t = \frac{x + \frac{p}{2}}{A}$, получим $x = At - \frac{p}{2}$, $dx = A\,dt$, $x^2 + px + q = A^2 (1 + t^2)$ и

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{A} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C.$$

Если квадратный трехчлен имеет действительные нули, то $A_1^2 = \frac{p^2}{4} - q > 0$ и, полагая в интеграле $t = \frac{x + \frac{p}{2}}{A_1}$, получим

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{A_1} \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2A_1} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} \ln \left| \frac{x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}{x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} \right| + C$$

(использован табличный интеграл 18)). Здесь $x \neq x_1$, $x \neq x_2$, где x_1, x_2 — нули квадратного трехчлена.

Если квадратный трехчлен $y = x^2 + px + q$ имеет кратный действительный нуль, то $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ и интеграл является табличным:

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = -\frac{1}{x + \frac{p}{2}} + C, \quad x \neq -\frac{p}{2}.$$

8) $\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx$, M, N, p, $q \in \mathbb{R}$.

Вычисление этого интеграла можно свести к вычислению интеграла 7) с помощью простого приема. Исходя из тождества $(Mx + N)\,dx = \frac{M}{2} d(x^2 + px + q) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) dx$, представим рассматриваемый интеграл как сумму двух интегралов, один из которых табличный, а другой — рассмотренный в 7) с постоянным множителем перед интегралом:

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \frac{M}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{x^2 + px + q} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2 + px + q} =$$

$$= \frac{M}{2} \ln |x^2 + px + q| + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2 + px + q}.$$

2.7. Рекуррентные формулы. В некоторых случаях подынтегральная функция зависит не только от переменной интегрирования, но и от натурального числа n (например, $\int \sin^n x\,dx$, $\int \cos^n x\,dx$, $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ и т. д.). Применяя к таким интегралам формулу интегрирования по частям, часто удается привести интеграл к интегралу того же вида, но с меньшим значением индекса, т. е. получить формулу понижения, с помощью которой после конечного числа шагов ее применения удается получить табличный интеграл.

Рассмотрим некоторые интегралы такого вида.

1) $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Принимая во внимание тождество

$$\frac{1}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{(x^2 + a^2) - x^2}{a^2 (x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2 (x^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{x^2}{a^2 (x^2 + a^2)^n},$$

и интегрируя его, получаем I_n в виде

$$I_n = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^n}. \tag{1}$$

К интегралу $\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^n}$ применим формулу интегрирования по частям (3), п. 2.3, полагая, что $dg(x) = \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^n}$, $f(x) = x$. Тогда $g(x) = -\frac{1}{2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}}$, $df = dx$ и

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^n} = -\frac{x}{2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}.$$

Подставив полученное в равенство (1), получим формулу понижения

$$I_n = \frac{x}{2a^2 (n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1}, \tag{2}$$

с помощью которой вычисление интеграла I_n приводится к вычислению интеграла I_{n-1}. Если $n - 1 > 1$, то с помощью формулы (2) интеграл I_{n-1} выразится через интеграл I_{n-2}. Этот процесс в итоге приводит к интегралу $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ с некоторым постоянным множителем.

Описанный процесс вычисления интеграла называется *рекуррентным процессом.*

Если рассмотреть интеграл $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то используя формулу (2), можем сразу написать для него формулу понижения

$$I_n = -\frac{x}{2a^2 (n-1)(x^2 - a^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1} \tag{3}$$

Описанный выше рекуррентный процесс приводит к интегралу

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$$

с некоторым постоянным множителем (замена в этом интеграле $x = at$ приводит к табличному интегралу 18)).

2) $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ $p, q \in \mathbb{R}$.

Если $A^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$, то, приняв во внимание пример 7), п. 2.6, и сделав подстановку $t = \frac{x + \frac{p}{2}}{A}$, получим интеграл

$$I_n = \frac{1}{A^{2n-1}} \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$$

к которому остается лишь применить рекуррентную формулу (2). Рекуррентный процесс в итоге приведет к интегралу

$$\int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C$$

с некоторым постоянным множителем.

Если $A_1^2 = \frac{p^2}{4} - q > 0$, то подстановка $t = \frac{x + \frac{p}{2}}{A_1}$ приводит к интегралу

$$I_n = \frac{1}{A_1^{2n-1}} \int \frac{dt}{(t^2-1)^n},$$

к вычислению которого применим рекуррентную формулу (3). Рекуррентный процесс приведет к интегралу

$$\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}{x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} \right| + C$$

с некоторым постоянным множителем.

Таким образом, полученный интеграл I_n всегда вычисляется и в результате интегрирования получаем сумму некоторой дробно-рациональной функции и логарифма, или арктангенса, в зависимости от знака числа $\frac{p^2}{4} - q$.

3) Рассмотрим интеграл $\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx$, M, N, p, $q \in \mathbb{R}$, и покажем, что его вычисление можно свести к вычислению рассмотренного в 2) интеграла.

По аналогии с примером 8), п. 2.6, запишем интеграл в виде

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx = \frac{M}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{(x^2 + px + q)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}$$

и, приняв во внимание, что $\int \frac{dt}{t^n} = -\frac{1}{(n-1)\,t^{n-1}} + C$, получим

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx = -\frac{M}{2(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

Интеграл приведен к рассмотренному в примере 2).

§ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Класс рациональных функций занимает особое место в анализе, поскольку первообразная любой такой функции является элементарной функцией. Заметим, что интегрируя в классе элементарных функций, можно в отдельных случаях получить функции, не выражающиеся через элементарные с помощью конечного числа арифметических действий и композиций. Например, интегралы элементарных функций

$$x \mapsto e^{-x^2}, \quad x \mapsto \sin x^2, \quad x \mapsto \cos x^2 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$x \mapsto \frac{\sin x}{x}, \quad x \mapsto \frac{\cos x}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad x \mapsto \frac{1}{\ln x} \quad (x > 0)$$

не являются элементарными функциями. Рассмотрим сначала вопрос об интегрировании рациональных функций, а затем выделим некоторые классы функций, интегрирование которых с помощью определенных подстановок приводит к интегрированию рациональных выражений.

3.1. Элементарные сведения из алгебры. Рассмотрим многочлен $Q(x)$ степени n

$$Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{0,\ n},$$

с целыми степенями x. Число $x_0 \in \mathbb{R}$ называется нулем этого многочлена, если $Q(x_0) = 0$. Пусть x_0 — нуль многочлена $Q(x)$. Говорят, что x_0 имеет кратность $\alpha \in \mathbb{N}$, если $Q(x) = (x - x_0)^{\alpha}T(x)$, где $T(x)$ — многочлен степени $n - \alpha$ и такой, что $T(x_0) \neq 0$.

Если $z = a + ib$, $a,\ b \in \mathbb{R}$ — комплексный нуль многочлена $Q(x)$ с действительными коэффициентами a_j, т. е. $Q(z) = 0$, то комплексно-сопряженное число $\bar{z} = a - ib$ также является нулем этого многочлена (доказать это предлагаем самостоятельно). Тогда $(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - x(z + \bar{z}) + |z|^2 = x^2 + px + q$, где $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$.

Если $a_0 = 1$ (что в дальнейшем и предполагаем), то многочлен $Q(x)$ всегда можно представить в виде

$$Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \ldots (x - x_m)^{\alpha_m}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \times \times (x^2 + p_2x + q_2)^{\beta_2} \ldots (x^2 + p_kx + q_k)^{\beta_k},$$

где $x = x_j$, $j = \overline{1,\ m}$ — действительные нули этого многочлена, каждый из квадратных трехчленов $x^2 + p_ix + q_i$, $i = \overline{1,\ k}$, не имеет действительных нулей, а $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,\ m}$, $\beta_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,\ k}$, — кратности

нулей, причем

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i + 2 \sum_{i=1}^{k} \beta_i = n.$$

Рассмотрим теперь дробно-рациональную функцию $f: x \to \frac{P(x)}{Q(x)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, где $P(x)$ — многочлен по целым степеням x. Если степень многочлена P выше или равна степени многочлена Q, то дробь $\frac{P}{Q}$ называется неправильной, в противном случае дробь называется правильной. Разделив в первом случае числитель на знаменатель, получим тождество $\frac{P}{Q} = P_1 + \frac{P_2}{Q_2}$, где P_1 — некоторый многочлен, $\frac{P_2}{Q_2}$ — правильная дробь. Интегрирование многочлена не представляет никаких затруднений, поэтому вопрос интегрирования любой рациональной дроби сводится к умению интегрировать правильные дроби. Будем считать в дальнейшем дробь $\frac{P}{Q}$ правильной. Записав ее в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - x_1)^{\alpha_1} Q_1(x)},$$

где Q_1 — некоторый многочлен такой, что $Q_1(x_1) \neq 0$, берем такое постоянное число $A_1^{(1)}$, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \frac{P_1(x)}{(x - x_1)^{\alpha_1 - 1} Q_1(x)}, \tag{1}$$

в котором P_1 — некоторый многочлен. Из тождества

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1^{(1)}}{(x - x_1)^{\alpha}} + \frac{P(x) - A_1^{(1)} Q_1(x)}{(x - x_1)^{\alpha_1} Q_1(x)}$$

заключаем, что представление (1) возможно лишь тогда, когда x_1 является нулем многочлена $P(x) - A_1^{(1)} Q_1(x)$, т. е. когда $P(x_1) - A_1^{(1)} Q_1(x_1) = 0$. Таким образом, $A_1^{(1)} = \frac{P(x_1)}{Q_1(x_1)}$. Аналогично найдем число $A_2^{(1)}$ такое, что

$$\frac{P_1(x)}{(x - x_1)^{\alpha_1 - 1} Q_1(x)} = \frac{A_2^{(1)}}{(x - x_1)^{\alpha_1 - 1}} + \frac{P_2(x)}{(x - x_1)^{\alpha_1 - 2} Q_1(x)}. \tag{2}$$

Продолжая этот процесс, получим представление дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{\alpha_1} \frac{A_j^{(1)}}{(x - x_1)^{\alpha_1 - j + 1}} + \frac{P_{\alpha_1}(x)}{Q_1(x)}, \tag{3}$$

где $Q_1(x) = (x - x_2)^{\alpha_2} Q_2(x)$, $Q_2(x_2) \neq 0$.

Продолжая эти же рассуждения до тех пор, пока будут исчерпаны все линейные сомножители, входящие в разложение многочлена Q,

получим представление дроби $\frac{P}{Q}$ в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_j^{(i)}}{(x - x_i)^{\alpha_i - j + 1}} + \frac{P_{\beta_1}(x)}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_k x + q_k)^{\beta_k}}. \tag{4}$$

Отметим, что некоторые из постоянных $A_j^{(i)}$ могут быть равны нулю.

Запишем многочлен, стоящий в знаменателе правильной дроби, в виде

$$(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{\beta_2} \dots (x^2 + p_k x + q_k)^{\beta_k} = \\ = (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} Q_{\beta_1}(x),$$

где $Q_{\beta_1}(x)$ — многочлен, нули которого комплексные и не совпадают с нулями z_1 и $\bar{z}_1$ квадратного трехчлена $x^2 + p_1 x + q_1$. Попробуем теперь подобрать постоянные $M_1^{(1)}$ и $N_1^{(1)}$ такие, чтобы выполнялось тождество

$$\frac{P_{\beta_1}(x)}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} Q_{\beta_1}(x)} \equiv \frac{M_1^{(1)} x + N_1^{(1)}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1}} + \frac{P_{\beta_1}^{(1)}(x)}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1 - 1} Q_{\beta_1}(x)}, \tag{5}$$

где $P_{\beta_1}^{(1)}(x)$ — некоторый многочлен.

Из тождества

$$\frac{P_{\beta_1}(x)}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} Q_{\beta_1}(x)} \equiv \frac{M_1^{(1)} x + N_1^{(1)}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1}} + \frac{P_{\beta_1}(x) - (M_1^{(1)} x + N_1^{(1)}) Q_{\beta_1}(x)}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} Q_{\beta_1}(x)} \tag{6}$$

заключаем, что представление (5) возможно лишь тогда, когда многочлен $\bar{P}(x) = P_{\beta_1}(x) - (M_1^{(1)} x + N_1^{(1)}) Q_{\beta_1}(x)$ делится на квадратный трехчлен $x^2 + p_1 x + q_1$ без остатка. Но для этого нули z_1 и $\bar{z}_1$ квадратного трехчлена должны быть одновременно нулями многочлена $\bar{P}$. Пусть $z_1 = a_1 + ib_1$, $b_1 \neq 0$. Для определения констант $M_1^{(1)}$ и $N_1^{(1)}$ получаем уравнение $\bar{P}(z_1) = 0$, эквивалентное уравнению

$$M_1^{(1)} z_1 + N_1^{(1)} = \frac{P_{\beta_1}(z_1)}{Q_{\beta_1}(z_1)}, \tag{7}$$

имеющему смысл в силу условия $Q_{\beta_1}(z_1) \neq 0$. Подставив в (7) $z_1 = a_1 + ib_1$, выделив в левой и правой частях полученных выражений действительные и мнимые части, получим уравнение вида

$$M_1^{(1)} a_1 + N_1^{(1)} + iM_1^{(1)} b_1 = \alpha + i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Комплексные числа равны между собой тогда и только тогда, когда равны между собой соответственно их действительные и мнимые части. Таким образом, уравнение (8) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} M_1^{(1)} a_1 + N_1^{(1)} = \alpha, \\ M_1^{(1)} b_1 = \beta, \end{cases} \tag{9}$$

имеющей единственное решение $(M_1^{(1)}, N_1^{(1)})$ в силу условия $b_1 \neq 0$.

Продолжая аналогично рассуждать, в итоге получим для правильной дроби $\frac{P}{Q}$ представление

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_j^{(i)}}{(x - x_i)^{\alpha_i - j + 1}} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\beta_k} \frac{M_j^{(i)} x + N_j^{(i)}}{(x^2 + p_i x + q_i)^{\beta_i - j + 1}}, \quad (10)$$

называемое *разложением* этой дроби на простейшие дроби.

3.2. Интегрирование правильной рациональной дроби. Определение коэффициентов разложения (10), п. 3.1. Интегрируя левую и правую части разложения (10), п. 3.1, получаем

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\alpha_i} A_j^{(i)} \int \frac{dx}{(x - x_i)^{\alpha_i - j + 1}} + \\ + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\beta_k} \int \frac{M_j^{(i)} x + N_j^{(i)}}{(x^2 + p_i x + q_i)^{\beta_i - j + 1}}\,dx. \quad (1)$$

Еще раз отметим, что некоторые из постоянных $A_i^{(i)}$, $M_i^{(i)}$ и $N_i^{(i)}$ могут быть равны нулю.

Таким образом, интегрирование правильной рациональной дроби $\frac{P}{Q}$ сводится к интегрированию четырех типов простейших дробей:

$$\frac{A}{x - a}; \quad \frac{A}{(x - a)^{\alpha}}, \ \alpha \in \mathbb{N}, \ \alpha > 1; \quad \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}; \\ \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^{\beta}}, \quad \beta \in \mathbb{N}, \ \beta > 1.$$

Все эти дроби рассмотрены в пунктах 2.6 и 2.7. Следует отметить, что первообразная функция рациональной функции есть в общем случае сумма рациональной функции, логарифмов и арктангенсов.

Считая разложение многочлена Q на множители известным, рассмотрим вопрос об определении коэффициентов разложения (10), п. 3.1.

Рассмотрим случай, когда многочлен Q имеет лишь простые действительные нули, т. е.

$$Q(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - x_j), \quad (3)$$

где $x_j \neq x_k$ при $j \neq k$. Тогда разложение (10), п. 3.1, имеет вид

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{(x - x_i)}. \quad (4)$$

Для определения коэффициента A_k, $k = \overline{1, n}$, умножим обе части равенства (4) на $x - x_k$; при этом получим

$$\frac{P(x)}{(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)} =$$

$$= A_k + \left(\frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_{k-1}}{x - x_{k-1}} + \frac{A_{k+1}}{x - x_{k+1}} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}\right) \times$$

$$\times (x - x_k). \tag{5}$$

Полагая в (5) $x = x_k$, находим

$$A_k = \frac{P(x_k)}{(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)} = \frac{P(x_k)}{Q'(x)|_{x=x_k}}. \tag{6}$$

Таким образом, разложение (4) имеет вид

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{P(x_j)}{Q'(x_j)} \cdot \frac{1}{(x - x_j)}. \tag{7}$$

Интегрируя полученное равенство, находим

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \sum_{j=1}^{n} \frac{P(x_j)}{Q'(x_j)} \ln|x - x_j| + C, \quad x \neq x_j. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь общий случай разложения (10), п. 3.1. Общим знаменателем всех простых дробей в этом разложении является многочлен Q, а их сумма после приведения к общему знаменателю будет правильной дробью, степень числителя которой не превосходит $n - 1$. Отбросив слева и справа знаменатель Q, получим тождественное относительно x равенство двух многочленов, один из которых многочлен P, а другой многочлен с неопределенными коэффициентами $A_j^{(i)}$, $M_j^{(i)}$, $N_j^{(i)}$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему линейных уравнений, решив которую, найдем все неизвестные коэффициенты разложения (10), п. 3.1.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Вычислить $\int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4}\,dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Выделяя целую часть, получим

$$\frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} = 1 - \frac{5x^2 + 4}{x^4 + 5x^2 + 4}.$$

Принимая во внимание, что $x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2 + 1)(x^2 + 4)$, для второго слагаемого в правой части получаем разложение

$$\frac{-5x^2 - 4}{x^2 + 5x^2 + 4} = \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + 1} + \frac{M_2 x + N_2}{x^2 + 4}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, запишем равенство числителей:

$$-5x^2 - 4 = (M_1 x + N_1)(x^2 + 4) + (M_2 x + N_2)(x^2 + 1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{array}{l|l} x^3 & M_1 + M_2 = 0 \\ x^2 & N_1 + N_2 = -5, \\ x & 4M_1 + M_2 = 0, \\ x^0 & 4N_1 + N_2 = -4, \end{array}$$

решая которую находим: $M_1 = M_2 = 0$; $N_1 = \frac{1}{3}$, $N_2 = -\frac{16}{3}$. Подставляя найденные коэффициенты в разложение и интегрируя его, получаем

$$\int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4}\,dx = x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пример 2. Вычислить $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Поскольку $x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)$, то разложение подынтегральной функции на простые дроби ищем в виде

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + \sqrt{2}\,x + 1} + \frac{M_2 x + N_2}{x^2 - \sqrt{2}\,x + 1}.$$

Из тождества

$$1 \equiv (M_1 x + N_1)(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1) + (M_2 x + N_2)(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)$$

получаем систему уравнений

$$\begin{array}{c|l} x^3 & M_1 + M_2 = 0, \\ x^2 & -\sqrt{2}\,M_1 + N_1 + \sqrt{2}\,M_2 + N_2 = 0, \\ x & M_1 - \sqrt{2}N_1 + M_2 + \sqrt{2}\,N_2 = 0, \\ x^0 & N_1 + N_2 = 1. \end{array}$$

Решив систему, находим $M_1 = -M_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$; $N_1 = N_2 = \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}\,dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}\,dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} -$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}\,dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg}(x\sqrt{2} + 1) + \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} - 1)\right) + C.$$

Если воспользоваться формулой сложения арктангенсов

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x + y}{1 - xy} + \varepsilon\pi,$$

где $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ — функция, принимающая одно из трех значений: 0, 1, —1, то полученный результат интегрирования можно записать в виде

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}\,x + 1}{x^2 - \sqrt{2}\,x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\,x}{1 - x^2} +$$

$$+ \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,\varepsilon(x) + C = \Phi(x) + C;$$

здесь

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 1, \\ 0, & \text{если } |x| \leqslant 1, \\ -1, & \text{если } x < -1, \end{cases}$$

$$\Phi(1) = \lim_{x \to 1} \Phi(x), \quad \Phi(-1) = \lim_{x \to -1} \Phi(x).$$

3.3. Метод М. В. Остроградского. Подробно проанализируем формулу (1), п. 3.2, выделив в ней члены, куда входят только логарифмы и арктангенсы; при этом воспользуемся решениями примеров 5) и 8), п. 2.6:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \sum_{i=1}^{m} A_{\alpha_i}^{(i)} \int \frac{dx}{x - x_i} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\alpha_i - 1} A_j^{(i)} \int \frac{dx}{(x - x_i)^{\alpha_i - j + 1}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \int \frac{M_{\beta_k}^{(i)} x + N_{\beta_k}^{(i)}}{x^2 + p_i x + q_i}\,dx + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\beta_k - 1} \int \frac{M_j^{(i)} x + N_j^{(i)}}{(x^2 + p_i x + q_i)^{\beta_i - j + 1}}\,dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} A_{\alpha_i}^{(i)} \ln|x - x_i| + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{M_{\beta_k}^{(i)}}{2} \ln(x^2 + p_i x + q_i) + \right.$$

$$\left. + \left(N_{\beta_k}^{(i)} - \frac{M_{\beta_k}^{(i)} p_i}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{q_i - \frac{p_i^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p_i}{2}}{\sqrt{q_i - \frac{p_i^2}{4}}} \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\alpha_i - 1} A_j^{(i)} \int \frac{dx}{(x - x_i)^{\alpha_i - j + 1}} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\beta_k - 1} \int \frac{M_j^{(i)} x + N_j^{(i)}}{(x^2 + p_i x + q_i)^{\beta_i - j + 1}}. \quad (1)$$

Используя решение примера 6), п. 2.6, имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\alpha_i - 1} A_j^{(i)} \int \frac{dx}{(x - x_i)^{\alpha_i - j + 1}} = -\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\alpha_i - 1} \frac{A_j^{(i)}}{(\alpha_i - j)(x - x_i)^{\alpha_i - j}} =$$

$$= -\left(\frac{A_1^{(1)}}{(\alpha_1 - 1)(x - x_1)^{\alpha_1 - 1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(\alpha_2 - 1)(x - x_2)^{\alpha_2 - 1}} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{A_1^{(m)}}{(\alpha_m - 1)(x - x_m)^{\alpha_m - 1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha_m - 1}^{(1)}}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_{\alpha_m - 1}^{(m)}}{x - x_m} \right). \quad (2)$$

В правую часть формулы (2) входит сумма правильных дробей. Если все их привести к общему знаменателю и сложить, то в результате получим правильную дробь, знаменатель которой $Q_1(x)$ имеет вид

$$Q_1(x) = (x - x_1)^{\alpha_1 - 1} (x - x_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (x - x_m)^{\alpha_m - 1}. \quad (3)$$

Используя теперь решение примера 3), п. 2.7, получаем

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\beta_k-1}\int\frac{M_j^{(i)}x+N_j^{(i)}}{(x^2+p_ix+q_i)^{\beta_i-j+1}}\,dx=-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\beta_k-1}\frac{M_j^{(i)}}{2(\beta_i-1)(x^2+p_ix+q_i)^{\beta_i-j}}+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\beta_k-1}\left(N_j^{(i)}-\frac{M_j^{(i)}p_i}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+p_ix+q_i)^{\beta_i-j+1}}\,. \qquad (4)$$

Первая группа слагаемых в правой части формулы (4) — правильные дроби:

$$-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\beta_k-1}\frac{M_j^{(i)}}{2(\beta_i-1)(x^2+p_ix+q_i)^{\beta_i-j}}=$$

$$=-\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{M_1^{(i)}}{2(\beta_i-1)(x^2+p_ix+q_i)^{\beta_i-1}}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{M_{\beta_k-1}^{(i)}}{2(\beta_i-1)(x^2+p_ix+q_i)^{\beta_i-\beta_k+1}}\right)=$$

$$=-\left(\frac{M_1^{(1)}}{2(\beta_1-1)(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}}+\ldots\right.$$

$$\ldots+\frac{M_1^{(k)}}{2(\beta_k-1)(x^2+p_kx+q_k)^{\beta_k-1}}+\ldots+\frac{M_{\beta_k-1}^{(1)}}{2(\beta_1-1)(x^2+p_1x+q_1)}+\ldots$$

$$\left.\ldots+\frac{M_{\beta_k-1}^{(k)}}{2(\beta_k-1)(x^2+p_kx+q_k)}\right). \qquad (5)$$

Сумма этих правильных дробей является правильной дробью, общий знаменатель которой $Q_2(x)$ имеет вид.

$$Q_2(x)=(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}(x^2+p_2x+q_2)^{\beta_2-1}\ldots$$

$$\ldots(x^2+p_kx+q_k)^{\beta_k-1}. \qquad (6)$$

К интегралу

$$\int\frac{dx}{(x^2+p_ix+q_i)^{\beta_i-j+1}}$$

после замены $t=\dfrac{x+\frac{p_i}{2}}{A_i}$, где $A_i^2=q_i-\dfrac{p_i^2}{4}$, применима рекуррентная формула (2), п. 2.7, в результате чего получим сумму правильных дробей с общим знаменателем $(x^2+p_ix+q_i)^{\beta_i-j}$ и $\operatorname{arctg}\dfrac{x+\frac{p_i}{2}}{\sqrt{q_i-\frac{p_i^2}{4}}}$

с некоторым множителем. Таким образом, анализ формулы (1), п. 3.2, позволяет сделать вывод о том, что в результате интегрирования правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ получаем сумму рациональной части интеграла — правильной дроби с общим знаменателем

$$Q_3(x) = Q_1(x)\,Q_2(x) = (x - x_1)^{\alpha_1 - 1} \ldots (x - x_m)^{\alpha_m - 1} \times$$
$$\times (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1 - 1} \ldots (x^2 + p_k x + q_k)^{\beta_k - 1} \qquad (7)$$

и сумму логарифмов и арктангенсов. Эту сумму логарифмов и арктангенсов получим, интегрируя правильную рациональную дробь, знаменатель которой — многочлен $Q_4(x)$, не имеющий кратных нулей: $Q_4(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_m)(x^2 + p_1 x + q_1) \ldots (x^2 + p_k x + q_k)$. Метод М. В. Остроградского состоит в том, чтобы выделить рациональную часть интеграла (1), п. 3.2, не производя интегрирования.

Считая, что разложение многочлена $Q(x)$ дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на множители известно, изложим суть метода М. В. Остроградского. Рациональная часть интеграла $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, как отмечалось выше, имеет вид $\frac{P_3(x)}{Q_3(x)}$, где $Q_3(x)$ — многочлен из формулы (7). Поскольку дробь $\frac{P_3(x)}{Q_3(x)}$ — правильная, то многочлен $P_3(x)$ зададим с помощью неопределенных коэффициентов, считая его степень в общем случае ниже степени многочлена $Q_3(x)$ на единицу.

Сумму логарифмов и арктангенсов получаем в результате интегрирования правильной дроби со знаменателем $Q_4(x)$. Обозначив эту дробь через $\frac{P_4(x)}{Q_4(x)}$, зададим многочлен $P_4(x)$ с помощью неопределенных коэффициентов, считая его степень ниже степени известного многочлена $Q_4(x)$ на единицу.

Таким образом, можем записать формулу М. В. Остроградского

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_3(x)}{Q_3(x)} + \int \frac{P_4(x)}{Q_4(x)}\,dx. \qquad (8)$$

Для получения системы уравнений относительно неизвестных коэффициентов многочленов $P_3(x)$ и $P_4(x)$ дифференцируем сначала левую и правую части равенства (8)

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_3(x)}{Q_3(x)}\right)' + \frac{P_4(x)}{Q_4(x)},$$

приводим правую часть к общему знаменателю $Q(x)$ и приравниваем затем коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях. В заключение отметим, что многочлен $Q_3(x)$ является, очевидно, наибольшим общим делителем многочлена $Q(x)$ и его производной $Q'(x)$.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$.

Так как $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2$, то решение поставленной задачи ищем в виде

$$\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \int \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}\,dx,$$

откуда $1 \equiv A(x^2+x+1) - (Ax+B)(2x+1) + (Cx+D)(x^2+x+1)$;

$$\begin{array}{c|l} x^3 & C = 0, \\ x^2 & -A + D + C = 0, \\ x & D - 2B + C = 0, \\ x^0 & A - B + D = 1. \end{array}$$

Решая эту систему, находим $A = D = \frac{2}{3}$; $B = \frac{1}{3}$.

Окончательно имеем

$$\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1} = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

§ 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ РАЦИОНАЛИЗАЦИИ

В предыдущем параграфе подробно рассмотрен класс рациональных функций, интегрирование которых всегда приводит к конечному результату.

Попытаемся свести интегрирование других элементарных функций (иррациональных, трансцендентных) к интегрированию некоторых рациональных функций, полученных в результате удачно выбранных подстановок. Такое преобразование подынтегральной функции в рациональную функцию называется *рационализацией интеграла*.

Хотя рационализация интегралов возможна не всегда, тем не менее существует широкий класс иррациональных функций, интегралы которых рационализируются.

Рассмотрим постановку задачи рационализации интеграла в общем случае.

4.1. Постановка задачи. Пусть $f: x \mapsto R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $x \in \mathcal{J}$,— рациональная функция своих аргументов, $y_j: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$, — некоторые функции. Предположим, что подстановка $x = \varphi(t)$, $t \in \mathcal{J}_1$, где φ — рациональная функция, обращает каждую из функций y_j в рациональную функцию $\varphi_j: t \mapsto \varphi_j(t)$. Тогда $f(t) = R(\varphi(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) = \tilde{R}(t)$ — рациональное выражение переменной t. Считая функцию φ дифференцируемой, имеем $dx = \varphi'(t)\,dt$ — рациональное выражение (так как производная рациональной функции является рациональной функцией). В итоге получим

$$\int f(x)\,dx = \int \tilde{R}(t)\,\varphi'(t)\,dt. \tag{1}$$

В правой части равенства (1) имеем интеграл от рациональной функции. Переменную t называют *рационализирующим параметром*.

4.2. Интегрирование выражений вида $R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right)$, $m, n, \ldots, r, s \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим интеграл вида

$$\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx, \quad m, n, \ldots, r, s \in \mathbb{Z}.$$

Пусть K — общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$. После приведения всех дробей к общему знаменателю они примут вид

$$\frac{m}{n} = \frac{m_1}{K}, \ \ldots, \ \frac{r}{s} = \frac{r_1}{K}.$$

Полагая в интеграле $x = t^K$, получим

$$\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx = \int R\left(t^K, t^{m_1}, \ldots, t^{r_1}\right) K t^{K-1} dt = \int \tilde{R}(t)\, dt.$$

Указанная подстановка $x = t^K$ рационализирует интеграл.

4.3. Интегрирование выражений вида $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)$, $m, n, \ldots, r, s \in \mathbb{Z}$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$. Этот случай легко сводится к рассмотренному выше, если положить $\frac{ax+b}{cx+d} = t^K$, где K — общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$. В этом случае x рационально выражается через t: $x = \frac{dt^K - b}{a - ct^K}$. После замены получим интеграл от рациональной функции.

Пример. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^{n-1}(x-a)^2}}$.

Произведем в интеграле замену $\frac{x-b}{x-a} = t^n$, тогда $\frac{dx}{(x-a)^2} = \frac{n}{b-a} t^{n-1} dt$ и

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^{n-1}(x-a)^2}} = \frac{n}{b-a} \int dt = \frac{n}{b-a} t + C = \frac{n}{b-a} \sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}} + C.$$

4.4. Интегрирование биномиальных дифференциалов. *Биномиальным дифференциалом* называют выражение вида

$$x^r (a + bx^q)^p\, dx, \quad a, b \in \mathbb{R}; \quad p, q, r \in \mathbb{Q}.$$

Интеграл от биномиального дифференциала

$$\int x^r (a + bx^q)^p\, dx \tag{1}$$

будем рассматривать здесь в случаях, когда p, $\frac{r+1}{q}$ и $\frac{r+1}{q} + p$ — целые числа. Эти три условия называются *условиями интегрируемости*

в конечном виде биномиального дифференциала. В середине прошлого столетия великий русский математик П. Л. Чебышев доказал, что эти условия не только достаточные, но и необходимы для того, чтобы интеграл (1) выражался в конечном виде через элементарные функции. Во всех других случаях такое представление этого интеграла невозможно.

Разберем каждый из указанных случаев в отдельности.

1) Пусть p — целое число Если λ — общий знаменатель дробей r и q, т. е. $r = \frac{r_1}{\lambda}$, $q = \frac{q_1}{\lambda}$, r_1, q_1 — целые числа, то подынтегральное выражение в (1) имеет вид

$$x^r (a + bx^q)^p \, dx = R(\sqrt[\lambda]{x}) \, dx,$$

где R — рациональная функция относительно $\sqrt[\lambda]{x}$. Тогда, как следует из пункта 4.2, подстановка $x = t^\lambda$ рационализирует интеграл (1).

2) Пусть $\frac{r+1}{q}$ — целое число. Произведя в подынтегральном выражении интеграла (1) подстановку $x^q = t$, получим

$$x^r (a + bx^q)^p \, dx = \frac{1}{q} (a + bt)^p \, t^{\frac{r+1}{q} - 1} \, dt. \tag{2}$$

Так как $\frac{r+1}{q}$ — целое, то и $\frac{r+1}{q} - 1$ является целым числом и преобразованное подынтегральное выражение принимает вид

$$\frac{1}{q} (a + bt)^p \, t^{\frac{r+1}{q}} \, dt = R(t, \sqrt[\nu]{a + bt}) \, dt,$$

где ν — знаменатель дроби p, R — рациональная функция аргументов t и $\sqrt[\nu]{a + bt}$. Тогда, согласно случаю, рассмотренному в пункте 4.3, подстановка $a + bt = z^\nu$ рационализирует полученный в результате замены $x^q = t$ интеграл. Объединив обе замены в одну, приходим к выводу, что подстановка

$$a + bx^n = z^\nu,$$

где ν — знаменатель дроби p, рационализирует исходный интеграл (1).

3) Пусть $\frac{r+1}{q} + p$ — целое число. Произведя в подынтегральном выражении исходного интеграла (1) подстановку $x^q = t$, запишем равенство (2) в виде

$$x^r (a + bx^q)^p \, dx = \frac{1}{q} \left(\frac{a + bt}{t} \right)^p t^{\frac{r+1}{q} + p - 1} \, dt. \tag{3}$$

Поскольку $\frac{r+1}{q} + p - 1$ является целым числом, то правая часть равенства (3) — рациональное выражение вида $R\left(t, \sqrt[\nu]{\frac{a + bt}{t}}\right) dt$ относительно t и $\sqrt[\nu]{\frac{a + bt}{t}}$, где, как и прежде, ν — знаменатель дро-

би p. Тогда, согласно пункту 4.3 этого параграфа, подстановка $\frac{a+bt}{t} = z^{\nu}$ рационализирует полученный в результате замены $x^q = t$ интеграл. Объединив обе подстановки в одну, приходим к выводу, что подстановка $ax^{-q} + b = z^{\nu}$, где ν — знаменатель дроби p, рационализирует исходный интеграл (1).

Пример. Вычислить $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx$, $x \geqslant 0$.

Здесь $p = -2$ — целое число. Применяя первую подстановку $x = t^6$, получаем

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx = 6\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2}\,dt = 6\int\left(t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{4t^2+3}{(1+t^2)^2}\right)dt =$$

$$= \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t - 18\int \frac{dt}{1+t^2} - 6\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Поскольку

$$\int \frac{t^2dt}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2}\int td\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = -\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t,$$

то окончательно имеем

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx = \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 18x^{\frac{1}{6}} + \frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}} - 21\operatorname{arctg} x^{\frac{1}{6}} + C.$$

4.5. Интегрирование выражений вида $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$. Подстановки Эйлера. Рассмотрим интеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \tag{1}$$

где R — рациональная функция относительно независимой переменной x и радикала $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Исключим из рассмотрения тривиальный случай, когда квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ имеет кратный нуль.

Интеграл (1) всегда рационализируется с помощью одной из трех подстановок Эйлера. Рассмотрим их.

1) Пусть $a > 0$, тогда, полагая

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x + t \tag{2}$$

и возведя обе части (2) в квадрат, после упрощения получим равенство $bx + c = \pm 2\sqrt{a}\,xt + t^2$, из которого видно, что x, а следовательно, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и $\frac{dx}{dt}$ рационально выражаются через t.

2) Вторую подстановку Эйлера применяют в случае, когда $c > 0$. При этом полагают

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{c} + tx. \tag{3}$$

Возведя в квадрат обе части (3) и упростив полученное, приходим к равенству $ax + b = \pm 2\sqrt{c}\,t + t^2 x$, из которого следует, что x, $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ и $\frac{dx}{dt}$ рационально выражаются через t. Отметим, что оба рассмотренные случаи приводятся один к другому с помощью подстановки $x = \frac{1}{t}$ и поэтому можно, например, использовать только первую подстановку.

3) Третью подстановку Эйлера применяют в случае, когда трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет действительные нули x_1 и x_2 ($x_1 \neq x_2$). Полагая

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1) \text{ или } \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_2) \qquad (4)$$

и принимая во внимание, что $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, получим, возводя обе части (4) в квадрат,

$$a(x - x_2) = t^2(x - x_1) \quad \text{или} \quad a(x - x_1) = t^2(x - x_2).$$

В каждом из этих случаев x, $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ и $\frac{dx}{dt}$ рационально выражаются через t.

Первая и третья подстановки Эйлера исчерпывают собой все возможные случаи рационализации интеграла (1).

В самом деле, если трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет действительные нули, то применим подстановку (4). Если нули трехчлена комплексные, то $b^2 - 4ac < 0$, и значения квадратного трехчлена на всей числовой прямой имеют тот же знак, что и число a. Случай $a < 0$ исключаем из рассмотрения, так как при этом радикал не имеет действительных значений. Но если $a > 0$, то подстановка (2) рационализирует интеграл.

Пример. Вычислить $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Здесь $a = 1 > 0$, поэтому применим первую подстановку Эйлера

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = -x + t.$$

Отсюда $x = \frac{t^2 - 1}{1 + 2t}$, $dx = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(1 + 2t)^2}\,dt$ и

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \frac{2t^2 + 2t + 2}{t(1 + 2t)^2}\,dt = \int \left(\frac{A}{(1 + 2t)^2} + \frac{B}{1 + 2t} + \frac{C}{t} \right) dt.$$

Для определения неизвестных A, B, C получаем систему: $2B + 4C = 2$; $A + B + 4C = 2$; $C = 2$, откуда $A = -3$; $B = -3$; $C = 2$. Таким образом,

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = -3 \int \frac{dt}{(1 + 2t)^2} - 3 \int \frac{dt}{1 + 2t} + 2 \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{3}{2(1 + 2t)} + \frac{1}{2} \ln \frac{t^4}{|1 + 2t|^3} + C,$$

где $t = x + \sqrt{x^2 + x + 1}$, $x \neq -1$.

4.6. Другие приемы вычисления интегралов $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$.

Подстановки Эйлера в каждом случае рационализируют выражение $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, однако, при этом, как правило, вычисление полученного интеграла требует значительного объема работы. Рассмотрим кратко другие приемы вычисления таких интегралов.

Обозначим $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$. Функция $x \mapsto R(x, y(x))$ в общем случае представляет собой частное двух многочленов по целым степеням переменных x и y:

$$R(x, y) = \frac{P_1(x, y)}{P_2(x, y)}.$$

Четные степени переменной y являются многочленами по целым степеням переменной x, а сумма всех нечетных степеней y может быть представлена в виде многочлена по целым степеням x, умноженного на y, в силу чего справедливо представление

$$R(x, y) = \frac{P_1(x, y)}{P_2(x, y)} = \frac{P_3(x) + P_4(x)\,y}{P_5(x) + P_6(x)\,y}, \tag{1}$$

где $P_j(x)$ — целые многочлены, $j = 3, 4, 5, 6$.

Умножив числитель и знаменатель дроби (1) на выражение $P_5(x) - P_6(x)\,y$, в знаменателе получим многочлен по целым степеням x, а числитель сохранит старую форму записи, но вместо многочленов $P_3(x)$ и $P_4(x)$ появятся другие многочлены:

$$R(x, y) = \frac{P_7(x) + P_8(x)\,y}{P_9(x)}. \tag{2}$$

Обозначая $R_1(x) = \frac{P_7(x)}{P_9(x)}$, $R_2(x) = \frac{P_8(x)}{P_9(x)}$, получаем представление $R(x, y)$ в виде

$$R(x, y) = R_1(x) + R_2(x)\,y. \tag{3}$$

Интегрирование рациональной функции R_1 подробно изучено выше, поэтому рассмотрим второе слагаемое в правой части представления (3). Записав его в виде

$$R_2(x)\,y = \frac{R_2(x)\,y^2}{y} = \frac{R_3(x)}{y} \tag{4}$$

и выделив целую и дробную части рациональной функции $R_3(x)$ — некоторый целый многочлен $P(x)$ и правильную рациональную дробь $\frac{T(x)}{Q(x)}$ — получим

$$R_2(x)\,y = \frac{P(x)}{y} + \frac{T(y)}{Q(x)\,y}. \tag{5}$$

Используя разложение правильной дроби $\frac{T(x)}{Q(x)}$ на простые, видим, что интегрирование выражения (5) сводится к вычислению интегралов

трех типов:

1) $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, 2) $\int \frac{A\,dx}{(x-x_0)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $k\in\mathbb{N}$;

3) $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, $m\in\mathbb{N}$.

Рассмотрим каждый из этих интегралов в отдельности.

1) Поскольку целый многочлен является линейной комбинацией функций $f_m: x\mapsto x^m$, $m\geqslant 0$, то достаточно изучить интеграл $I_m = \int \frac{x^m dx}{y}$, где $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$. При $m\geqslant 1$ имеем

$$(x^{m-1}y)' = (m-1)\,x^{m-2}y + \frac{x^{m-1}}{y}\left(ax+\frac{b}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{y}\left((m-1)\,x^{m-2}(ax^2+bx+c) + x^{m-1}\left(ax+\frac{b}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{y}\left(max^m + \left(m-\frac{1}{2}\right)bx^{m-1} + (m-1)\,cx^{m-2}\right). \qquad (6)$$

Интегрируя обе части равенства (6), получим

$$x^{m-1}y = maI_m + \left(m-\frac{1}{2}\right)bI_{m-1} + (m-1)\,cI_{m-2}. \qquad (7)$$

Полагая в формуле (7) $m=1$, находим

$$I_1 = \frac{y}{a} - \frac{b}{2a}I_0. \qquad (8)$$

Взяв теперь $m=2$ и используя (8), получим

$$I_2 = \frac{2ax-3b}{4a^2}y + \frac{1}{8a^2}(3b^2-4ac)\,I_0. \qquad (9)$$

Продолжая увеличивать m каждый раз на единицу, получим формулу

$$I_m = Q_{m-1}(x)\,y + \lambda_m I_0 = Q_{m-1}(x)\,y + \lambda_m \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (10)$$

где $Q_{m-1}(x)$ — целый многочлен $(m-1)$-й степени, $\lambda_m = \text{const}$.

Используя теперь то обстоятельство, что многочлен n-й степени есть линейная комбинация функций f_m, получаем формулу для вычисления интеграла 1):

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (11)$$

где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен $(n-1)$-й степени, $\lambda = \text{const}$.

Задавая многочлен $Q_{n-1}(x)$ с помощью неопределенных коэффициентов и дифференцируя обе части формулы (11), получаем

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{Q_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + \left(ax+\frac{b}{2}\right)Q_{n-1}(x) + \lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad (12)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в многочленах n-й степени, стоящих в числителях равенства (12), и решив затем си-

стему уравнений относительно неизвестных коэффициентов многочлена $Q_{n-1}(x)$ и постоянной λ, сведем задачу к вычислению интеграла I_0.

Отметим, что решение системы уравнений относительно коэффициентов многочлена $Q_{n-1}(x)$ и постоянной λ не представляет трудностей, так как сводится к последовательному решению уравнений с одним неизвестным.

2) Интеграл $\int \frac{dx}{(x-x_0)^k \sqrt{ax^2+bx+c}}$ с помощью подстановки $x - x_0 = \frac{1}{t}$ приводится к только что рассмотренному интегралу первого типа. В этом случае $dx = -\frac{dt}{t^2}$, $\frac{1}{(x-x_0)^k} = t^k$, $ax^2+bx+c = \frac{At^2+Bt+a}{t^2}$, где $A = ax_0^2 + bx_0 + c$, $B = 2ax_0 + b$, $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{|t|}{\sqrt{At^2+Bt+a}}$ и

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^k \sqrt{ax^2+bx+c}} = -\operatorname{sgn} t \int \frac{t^{k-1}\,dt}{\sqrt{At^2+Bt+a}} =$$

$$= -\operatorname{sgn} t\,(Q_{k-2}(t)\sqrt{At^2+Bt+a} + \lambda_k \int \frac{dt}{\sqrt{At^2+Bt+a}}).$$

3) Рассматривая $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, выделим частный случай, когда трехчлен ax^2+bx+c отличается от трехчлена x^2+px+q лишь постоянным множителем. Тогда рассматриваемый интеграл принимает вид

$$\int \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\frac{2m+1}{2}}}\,dx = \frac{M_1}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^{\frac{2m+1}{2}}} +$$

$$+\left(N_1 - \frac{M_1p}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\frac{2m+1}{2}}} = -\frac{M_1}{(2m-1)} \frac{1}{(x^2+px+q)^{\frac{2m-1}{2}}} +$$

$$+\left(N_1 - \frac{M_1p}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\frac{2m+1}{2}}}.$$

Интеграл $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\frac{2m+1}{2}}}$ вычисляется с помощью подстановки Абеля

$t = \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{x^2+px+q}}$. При такой замене получим

$$t^2(x^2+px+q) = (x^2+px+q) - A^2, \text{ где } A^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0,$$

$$x^2+px+q = \frac{A^2}{1-t^2},\ (x^2+px+q)^{\frac{2m+1}{2}} = \frac{A^{2m+1}}{(1-t^2)^{\frac{2m+1}{2}}},$$

$$t\sqrt{x^2+px+q}=x+\frac{p}{2},\ dx=$$

$$=dt\sqrt{x^2+px+q}+t\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{x^2+px+q}}dx=$$

$$=\sqrt{x^2+px+q}\,dt+t^2dx,\ dx=\frac{Adt}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

и

$$\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{\frac{2m+1}{2}}}=\frac{1}{A^{2m}}\int(1-t^2)^{m-1}\,dt.$$

С помощью подстановки Абеля получили после проведения замены интеграл от многочлена.

Рассмотрим еще один частный случай интеграла 3), когда $p=b=0$, т. е. рассмотрим интеграл

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+q)^m\sqrt{ax^2+c}}dx=I_1+I_2, \tag{13}$$

где $I_1=\int\frac{Mxdx}{(x^2+q)^m\sqrt{ax^2+c}}$, $I_2=N\int\frac{dx}{(x^2+q)^m\sqrt{ax^2+c}}$.

Записав интеграл I_1 в виде $I_1=\frac{M}{2}\int\frac{d(x^2)}{(x^2+q)^m\sqrt{ax^2+c}}$, видим, что замена $\sqrt{ax^2+c}=t$ рационализирует его. Запишем интеграл I_2 в виде

$$I_2=-\frac{N}{2}\operatorname{sgn}x\int\frac{x^{-(2m-2)}d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{q}{x^2}\right)^m\sqrt{a+\frac{c}{x^2}}}$$

и произведем в нем замену $\sqrt{1+\frac{c}{x^2}}=t$. Тогда получим интеграл от рациональной функции.

Таким образом, в общем случае желательно в интеграле 3) произвести такую замену переменной, чтобы получить интеграл вида (13). В одном частном случае, а именно, когда $b=ap$, это достигается с помощью подстановки $x=t-\frac{p}{2}$; тогда $x^2+px+q=t^2+A^2$, где $A^2=q-\frac{p^2}{4}$, $ax^2+bx+c=at^2+B$, где $B=c-\frac{ap^2}{4}=\frac{4ac-b^2}{4a}$. В общем случае, когда $b\neq ap$, произведем в интеграле 3) замену $x=\frac{\mu t+\nu}{t+1}$, выбрав μ и ν так, чтобы после замены получить интеграл вида (13). Имеем

$$x^2+px+q=\frac{(\mu^2+p\mu+q)t^2+(2\mu\nu+p(\mu+\nu)+2q)t+(\nu^2+p\nu+q)}{(1+t)^2},$$

$$ax^2+bx+c=\frac{(a\mu^2+b\mu+c)t^2+(2\mu\nu a+b(\mu+\nu)+2c)t+(a\nu^2+b\nu+c)}{(1+t)^2}.$$

Для достижения поставленной цели выберем μ и ν так, чтобы коэффициенты при t обратились в нуль:

$$\begin{cases} 2\mu\nu + p(\mu + \nu) + 2q = 0, \\ 2\mu\nu a + b(\mu + \nu) + 2c = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Система уравнений (14) эквивалентна системе

$$\begin{cases} \mu + \nu = -\dfrac{2(c - aq)}{b - ap}, \\ \mu\nu = \dfrac{cp - qb}{b - ap}. \end{cases} \tag{15}$$

Таким образом, μ и ν — корни квадратного уравнения

$$z^2 + 2\frac{(c - aq)}{b - ap} z + \frac{cp - qb}{b - ap} = 0. \tag{16}$$

Уравнение (16) имеет разные действительные корни, если его дискриминант положительный, т. е.

$$(c - aq)^2 - (cp - qb)(b - ap) > 0 \quad \text{или} \quad (c - aq)^2 > (cp - qb)(b - ap). \tag{17}$$

Неравенство (17) эквивалентно неравенству

$$\left(c + aq - \frac{pb}{2}\right)^2 > 4\left(q - \frac{p^2}{4}\right)\left(ac - \frac{b^2}{4}\right). \tag{18}$$

Так как квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ имеет комплексные нули, то $q - \frac{p^2}{4} > 0$, т. е. $q > 0$.

Если $ac - \frac{b^2}{4} < 0$, то неравенство (18) очевидно.

Докажем его справедливость и при $ac - \frac{b^2}{4} > 0$. В этом случае $ac > 0$, и в силу неравенства $c + aq \geqslant 2\sqrt{caq}$ имеем

$$\left(c + aq - \frac{pb}{2}\right)^2 \geqslant \left(2\sqrt{caq} - \frac{pb}{2}\right)^2 =$$

$$= 4\left(q - \frac{p^2}{4}\right)\left(ac - \frac{b^2}{4}\right) + (\sqrt{q}\, b - p\sqrt{ac})^2.$$

Если $c \neq aq$, то $c + aq > 2\sqrt{caq}$, и справедливо неравенство (18).

Если $c = aq$, то $p\sqrt{ac} - b\sqrt{q} = \sqrt{q}(ap - b) \neq 0$, так как $b \neq ap$, в силу чего снова выполняется неравенство (18). Следовательно, уравнение (16) всегда имеет разные действительные корни.

4.7. Интегрирование тригонометрических выражений методом рационализации. Рассмотрим интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx, \tag{1}$$

принимая во внимание то обстоятельство, что любая рациональная функция относительно тригонометрических функций $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ выражается рационально через $\sin x$ и $\cos x$ и, следовательно,

может быть представлена в виде $R(\sin x, \cos x)$. Подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ всегда рационализирует интеграл (1) (поэтому ее называют *универсальной*). Действительно,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{2x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx\cos x =$$

$$= \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\,dt,\quad dx = 2\frac{dt}{1+t^2},\ R(\sin x,\ \cos x)\,dx =$$

$$= R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \tilde{R}(t)\,dt,$$

где $\tilde{R}$ — рациональная функция.

Однако следует помнить, что применив универсальную подстановку, иногда получают первообразную не для подынтегральной функции, а для ее сужения на интервал $](2n-1)\pi;\ (2n+1)\pi[$. Это обстоятельство связано с тем, что функция $f: x \to \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ разрывна в точках $x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим примеры на вычисления интегралов с помощью универсальной подстановки.

Пример 1. Вычислить интеграл $I_1 = \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5},\ x \in \mathbb{R}$.

Подынтегральная функция определена на всей числовой прямой в силу неравенства $|2\sin x - \cos x| \leqslant \sqrt{5}$. Поэтому первообразную этой функции будем строить при всех $x \in \mathbb{R}$. Полагая $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $(2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, получаем

$$I_1 = \int \frac{dt}{3t^2+2t+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C_n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C_n$$

(здесь каждому интервалу $](2n-1)\pi, (2n+1)\pi[$ соответствует своя постоянная C_n).

Из непрерывности первообразной следует соотношение

$$I_1(2n\pi + \pi - 0) = I_1(2n\pi + \pi + 0),\ \text{т. е.}\ \frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_n = -\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_{n+1},$$

откуда находим $C_n = \frac{\pi n}{\sqrt{5}} + C$, где $C = C_0$ — произвольная постоянная. Из неравенств $2n\pi < x + \pi < (2n+2)\pi$, $n < \frac{x+\pi}{2\pi} < n+1$ следует, что $n = \left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]$. Таким образом, окончательно получим

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + \frac{\pi}{\sqrt{5}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] + C,\quad x \neq \pi(2n+1),$$

$$I_1(\pi(2n+1)) = \lim_{x \to (2n+1)\pi} I_1(x) = \frac{(2n+1)\pi}{2\sqrt{5}}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I_2 = \int \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x}$, $0 < \varepsilon < 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Полагая в интеграле $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, $(2n - 1)\pi < x < (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, получим после замены

$$I_2 = \frac{2}{1 - \varepsilon} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} = \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + C_n.$$

По аналогии с решением примера 1) находим

$$I_2 = \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left[\frac{x + \pi}{2\pi}\right] + C,$$

$$x \neq (2n + 1)\pi,$$

$$I_2((2n + 1)\pi) = \lim_{x \to (2n+1)\pi} I_2(x).$$

Еще раз подчеркнем, что функция $\varphi : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$ является первообразной не подынтегральной функции, а сужений этой функции на интервалы $](2n - 1)\pi, (2n + 1)\pi[$.

Несмотря на то что универсальная подстановка всегда рационализирует интеграл (1), в некоторых частных случаях применяют и другие подстановки, приводящие к интегралам от рациональных функций, более простым по сравнению с интегралами, получаемыми после подстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Рассмотрим три таких случая.

1) Подынтегральная функция в интеграле (1) при замене $\cos x$ на $-\cos x$ меняет знак на противоположный, т. е. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. В этом случае подстановка $\sin x = t$ приводит к интегралу от рациональной функции, поскольку функция

$$R_1(\sin x, \cos x) = \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$$

не меняет знака при замене $\cos x$ на $-\cos x$, следовательно, содержит только четные степени $\cos x$ и поэтому рационально выражается через $\sin x$, а подынтегральное выражение

$$R(\sin x, \cos x)\, dx = R_1(\sin x, \cos x) \cos x\, dx = R_1(\sin x, \cos x)\, d(\sin x)$$

после указанной замены принимает вид

$$R(\sin x, \cos x)\, dx = \tilde{R}(t)\, dt,$$

где $\tilde{R}$ — рациональная функция относительно $t = \sin x$.

Пример 3. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

После замены $\sin x = t$ получим

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = \int \frac{dt}{t^2(1 - t^2)} = \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{1 - t^2} =$$

$$= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1 + t}{1 - t}\right| + C = -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right| + C.$$

2) Подынтегральная функция в интеграле (1) при замене $\sin x$ на $-\sin x$ меняет знак на противоположный, т. е. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. В этом случае подстановка $\cos x = t$ рационализирует интеграл (1). Доказательство аналогично рассмотренному выше случаю.

Пример 4. Вычислить $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$.

Применив подстановку $\cos x = t$, получим

$$\sin x dx = dt, \quad \sin^4 x \cos^2 x = (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x = (1 - t^2)^2 t^2 = t^2 - 2t^4 + t^6$$

и

$$\int \sin^5 x \cos^2 x dx = \int (t^2 - 2t^4 + t^6)\, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{2}{5} t^5 + \frac{t^7}{7} + C =$$

$$= \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{2}{5} \cos^5 x + \frac{\cos^7 x}{7} + C.$$

3) Подынтегральная функция в интеграле (1) не меняет знак при замене $\sin x$ на $-\sin x$ и $\cos x$ на $-\cos x$, т. е.

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x).$$

В этом случае замена $\operatorname{tg} x = t$ рационализирует интеграл (1). Действительно, из равенства

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) = R(\operatorname{tg} x \cos x, \cos x)$$

следует, что косинус входит в подынтегральное выражение в четных степенях и поэтому рационально выражается через тангенс в силу известной формулы

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

Поскольку $\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$, то $dx = \frac{dt}{1 + t^2}$, и после указанной замены подынтегральное выражение примет вид

$$R(\sin x, \cos x)\, dx = R_1(t) \frac{dt}{1 + t^2} = R_2(t)\, dt,$$

где R_2 — рациональная функция относительно $t = \operatorname{tg} x$.

Пример 5. Вычислить $I_1 = \int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx$.

Подынтегральная функция рационально выражается через $\sin 2x$ и $\cos 2x$, причем, не меняет знак, если вместо $\sin 2x$ и $\cos 2x$ подставить $-\sin 2x$ и $-\cos 2x$, поэтому замена $t = \operatorname{tg} 2x$, $\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} < x < \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$, рационализирует интеграл I_1. После замены получим

$$I_1 = \int \frac{t^2 dt}{t^4 + 8t^2 + 8} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 4 + 2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 4 - 2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} + C_n =$$

$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} + C_n.$$

Из условия непрерывности первообразной следует равенство

$$I_1\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} - 0\right) = I_1\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} + 0\right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

которое принимает вид

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4} \cdot \frac{\pi}{2} + C_n =$$

$$= -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4} \cdot \frac{\pi}{2} + C_{n+1}.$$

Таким образом, $C_n = \frac{\pi}{4}(\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}})\, n + C$, $C = C_0 = \text{const}$, т. е. $C_n = \frac{\pi}{4}(\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}) \left[\frac{4x+\pi}{2\pi}\right]$.

Окончательно имеем

$$I_1(x) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} +$$

$$+ \frac{\pi}{4}(\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}) \left[\frac{4x+\pi}{2\pi}\right] + C, \quad x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2},$$

$$I_1\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}} I_1(x).$$

4.8. Некоторые специальные функции. Рассмотрим $\int \frac{\varphi(x)}{(x-m)^k}\, dx$, где $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, $x \neq m$, а φ — одна из функций: $x \mapsto e^{ax}$, $x \mapsto \sin ax$, $x \mapsto \cos ax$, $(a \in \mathbb{R})$. Полагая в формуле (3), п. 2.3, $f(x) = \varphi(x)$, $\frac{dx}{(x-m)^k} = dg(x)$, получаем

$$g(x) = -\frac{1}{(k-1)(x-m)^{k-1}}, \quad df(x) = \varphi'(x)\, dx \text{ и}$$

$$\int \frac{\varphi(x)}{(x-m)^k}\, dx = -\frac{\varphi(x)}{(k-1)(x-m)^{k-1}} + \frac{1}{k-1} \int \frac{\varphi'(x)}{(x-m)^{k-1}}\, dx.$$

Поскольку $(e^{ax})' = ae^{ax}$, $(\sin ax)' = a \cos ax$, $(\cos ax)' = -a \sin ax$, то интеграл $\int \frac{\varphi'(x)}{(x-m)^{k-1}}\, dx$ принадлежит к тому же типу, что и исходный, но в нем показатель степени знаменателя ниже на единицу. Применив формулу интегрирования по частям k раз, получим

интегралы

$$\int \frac{e^{ax}}{x-m}\,dx,\ \int \frac{\sin ax}{x-m}\,dx,\ \int \frac{\cos ax}{x-m}\,dx.$$

Первый из этих интегралов подстановкой $e^t = z$ приводится к интегралу $\int \frac{dz}{\ln z}$. Каждый из полученных интегралов не может быть выражен с помощью элементарных функций и поэтому первообразные подынтегральных функций являются новыми трансцендентными функциями. В математической литературе для них приняты следующие обозначения:

$$\operatorname{li} x = \int \frac{dx}{\ln x},\ \operatorname{si} x = \int \frac{\sin x}{x}\,dx,\ \operatorname{ci} x = \int \frac{\cos x}{x}\,dx$$

и их называют соответственно *интегральным логарифмом, интегральным синусом* и *интегральным косинусом.*

К числу неэлементарных относятся также интегралы

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int \sin x^2 dx,\ \int \cos x^2 dx.$$

Если интеграл некоторой функции $f: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ существует, но не выражается через элементарные функции, то он определяет новую неэлементарную функцию. Поэтому процесс интегрирования является и процессом образования новых классов функций, полезность которых определяется возможностью их применений при решении конкретных практических задач.

Одним из важнейших классов неэлементарных функций являются эллиптические интегралы, краткие сведения о которых приводятся ниже.

4.9. Эллиптические интегралы. Выше были рассмотрены классы функций, интегрирование которых с помощью подстановок приводит к интегрированию рациональных функций, в результате чего получаем элементарные функции.

Попытки выразить с помощью элементарных функций интегралы вида

$$\int \sqrt{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}\,dx,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}},\quad a_j \in \mathbb{R},\ j = \overline{0,\ n}.$$

в общем случае не приводили к успеху, а в XIX ст. была доказана принципиальная невозможность этого.

Рассмотрим интеграл

$$\int R\left(x,\ \sqrt{P(x)}\right)dx, \tag{1}$$

где P — многочлен не выше четвертой степени с действительными коэффициентами, R — рациональная функция двух переменных, также с действительными коэффициентами и x изменяется в области, где $P(x) > 0$. Этот интеграл может быть приведен к интегралу от рацио-

нальной функции, если многочлен P имеет первую или вторую степень или же имеет кратные нули.

Если многочлен P третьей степени, то он имеет хотя бы один действительный нуль x_1 и может быть представлен в виде

$$P(x) = (x - x_1)(ax^2 + bx + c), \quad a \neq 0. \tag{2}$$

Для значений $x > x_1$ произведем замену $x = x_1 + t^2$. Тогда

$$dx = 2tdt, \quad \sqrt{P(x)} = t\sqrt{at^4 + (2ax_1 + b)t^2 + ax_1^2 + bx_1 + c} = t\sqrt{Q(t)}, \tag{3}$$

причем многочлен $Q(t)$ не содержит нечетных степеней переменной t. Для значений $x < x_1$ полагаем $x = x_1 - t^2$. И в этом и в другом случаях имеем

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{2dt}{\sqrt{Q(t)}}. \tag{4}$$

В дальнейшем предполагаем, что $P(x)$ — многочлен четвертой степени, не имеющий кратных нулей. В этом случае интеграл (1) называют *эллиптическим*.

Доказано, что все эллиптические интегралы с помощью элементарных подстановок приводятся с точностью до слагаемых, выражающихся в конечном виде, к трем стандартным интегралам:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}}, \quad \int \frac{z^2dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}}, \quad \int \frac{dz}{(1 + hz^2)\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}}, \tag{5}$$

где $0 < k < 1$. Эти интегралы не выражаются через элементарные функции и их называют соответственно эллиптическими интегралами 1, 2 и 3-го рода. Первые два из них зависят от одного параметра k, а третий зависит еще и от параметра h, который может быть комплексным числом.

Лежандр с помощью подстановки $z = \sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, преобразовал эти интегралы. Первый из них принимает вид

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}. \tag{6}$$

Второй интеграл после замены переменной преобразуется к виду

$$\int \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 x}} = \frac{1}{k^2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{k^2}\int \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

т. е. он равен сумме, в которую входит интеграл (6) и

$$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi. \tag{7}$$

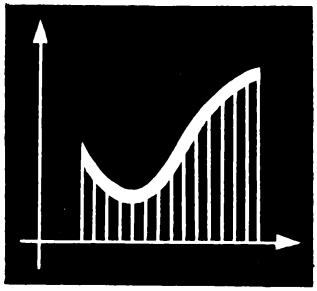
Третий интеграл после замены переменной принимает вид

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + h \sin^2 \varphi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \tag{8}$$

Интегралы (6) — (8) называются соответственно эллиптическими интегралами 1, 2 и 3-го рода в форме Лежандра.

Наибольшее применение имеют интегралы 1 и 2-го рода. Если считать, что они обращаются в нуль при $\varphi = 0$, то получим две вполне определенные функции переменной φ, которые Лежандр обозначил соответственно символами $F(k, \varphi)$ и $E(k, \varphi)$.

Лежандр составил таблицы значений этих функций при разных значениях k и φ.



6

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

В этой главе рассмотрим свойства интеграла Римана ограниченной числовой функции, определенной на сегменте $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Отдельный параграф посвящен обобщению определенного интеграла на случай некомпактного интервала $[a, +\infty[$ и на случай, когда функция имеет на конечном интервале особые точки типа полюса — несобственным (обобщенным) интегралам первого и второго рода. Большое внимание уделено приложениям интеграла к решению задач геометрии и механики.

В определении интеграла Римана вектор-функции и функциональной матрицы используется возможность производить операции сложения, умножения на действительные числа и предельного перехода в соответствующих векторных пространствах над полем действительных чисел.

§ 1. ИНТЕГРАЛ РИМАНА

1.1. Верхний и нижний интегралы Римана. Критерий интегрируемости функции.

Определение 1. *Пусть* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *и* f *— ограниченная на сегменте* $[a, b]$ *функция. Разбиением* Π *сегмента* $[a, b]$ *называют конечное множество точек* $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, *где* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Точки, входящие в разбиение Π, являются концами сегментов $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, в связи с чем будем говорить также о *разбиении* $\overline{\Pi}$ сегмента $[a, b]$ на сегменты $[x_i, x_{i+1}]$.

Обозначим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, n-1}$. Каждому разбиению Π сегмента $[a, b]$ соответствуют числа

$$M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{f(x)\}, \quad m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{f(x)\},$$

$$\overline{S}_{\Pi}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i, \quad \underline{S}_{\Pi}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i,$$

из которых последние два называются соответственно *верхней* и *нижней интегральными суммами.*

Рассматривая множество $\{\Pi\}$ всех возможных разбиений сегмента $[a, b]$, введем в рассмотрения числа

$$\overline{\int} f dx = \inf_{\{\Pi\}} \{\overline{S}_\Pi(f)\}, \quad \underline{\int} f dx = \sup_{\{\Pi\}} \{\underline{S}_\Pi(f)\},$$

называемые соответственно *верхним* и *нижним интегралами* функции f на сегменте $[a, b]$.

Определение 2. *Функция f называется интегрируемой по Риману на сегменте $[a, b]$, если* $\overline{\int} f dx = \underline{\int} f dx$.

Множество всех интегрируемых по Риману на сегменте $[a, b]$ функций f обозначают $f \in R[a, b]$, а общее значение верхнего и нижнего интегралов Римана интегрируемой функции f обозначают $\int_a^b f(x)\,dx$.

Верхний и нижний интегралы Римана ограниченной на сегменте $[a, b]$ функции f всегда существуют, так как множества $\{\overline{S}_\Pi(f)\}$ и $\{\underline{S}_\Pi(f)\}$ ограничены. Вопрос о равенстве этих интегралов требует дополнительных исследований, поскольку не всякая ограниченная функция интегрируема по Риману.

Отметим также, что $\int_a^b f(x)\,dx$ зависит только от f, a и b и не зависит от x, поэтому $\int_a^b f(t)\,dt$, $\int_a^b f(u)\,du$ и т. д. всегда обозначают одно и то же.

Определение 3. *Разбиение Π^* сегмента $[a, b]$ есть продолжение разбиения Π этого сегмента, если $\Pi^* \supset \Pi$, т. е. если каждая точка разбиения Π является также точкой разбиения Π^*. Разбиение Π есть общее разбиений Π_1 и Π_2, если $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$.*

Лемма 1. *Если Π^*— продолжение разбиения Π, то*

$$\underline{S}_\Pi(f) \leqslant \underline{S}_{\Pi^*}(f), \quad \overline{S}_{\Pi^*}(f) \leqslant \overline{S}_\Pi(f).$$

◀ Предположим, что разбиение Π^* имеет ровно на одну точку $x_i^* \in]x_i, x_{i+1}[$ больше, чем разбиение Π. Пусть $m_1 = \inf_{x \in [x_i, x_i^*]} \{f(x)\}$, $m_2 = \inf_{x \in [x_i^*, x_{i+1}]} \{f(x)\}$. Так как $m_j \geqslant m_i$, $j = 1, 2$, где $m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{f(x)\}$ то

$$\underline{S}_{\Pi^*}(f) - \underline{S}_\Pi(f) = m_1(x_i^* - x_i) + m_2(x_{i+1} - x_i^*) - m_i(x_{i+1} - x_i) \geqslant$$

$$\geqslant m_i((x_i^* - x_i) + (x_{i+1} - x_i^*)) + m_i(x_{i+1} - x_i) = 0,$$

$$\underline{S}_{\Pi^*}(f) \geqslant \underline{S}_\Pi(f).$$

Если Π^* содержит на k точек больше, чем Π, то рассуждения анало-

гичны. Неравенство $\overline{S}_{\Pi^*}(f) \leqslant \overline{S}_{\Pi}(f)$ предлагаем доказать самостоятельно. ▶

Лемма 2. *Справедливо неравенство* $\underline{\int} f\,dx \leqslant \overline{\int} f dx$.

◀ Пусть $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$, т. е. разбиение Π является общим для произвольных разбиений Π_1 и Π_2 сегмента $[a, b]$. Применив лемму 1, получим неравенства $\underline{S}_{\Pi_1}(f) \leqslant \underline{S}_{\Pi}(f) \leqslant \overline{S}_{\Pi}(f) \leqslant \overline{S}_{\Pi_2}(f)$, откуда следует, что $\underline{S}_{\Pi_1}(f) \leqslant \overline{S}_{\Pi_2}(f)$.

Фиксируя разбиение Π_2 и вычисляя точную верхнюю грань множества $\{\underline{S}_{\Pi_1}(f)\}$ по всем возможным разбиениям Π_1, получим неравенство

$$\underline{\int} f dx = \sup_{\{\Pi_1\}} \{\underline{S}_{\Pi_1}(f)\} \leqslant \overline{S}_{\Pi_2}(f).$$

Вычисляя в последнем неравенстве точную нижнюю грань множества $\{\overline{S}_{\Pi_2}(f)\}$ по всем возможным разбиениям Π_2, получим неравенство

$$\overline{\int} f dx = \inf_{\{\Pi_2\}} \{\overline{S}_{\Pi_2}(f)\} \geqslant \underline{\int} f dx. \ ▶$$

Теорема (критерий интегрируемости функции). *Для того чтобы функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *ограниченная на сегменте* $[a, b]$, *была интегрируемой на этом сегменте, необходимо и достаточно, чтобы* $\forall \varepsilon > 0$ *существовало такое разбиение* Π *сегмента* $[a, b]$, *что*

$$0 \leqslant \overline{S}_{\Pi}(f) - \underline{S}_{\Pi}(f) < \varepsilon.$$

◀ *Необходимость.* Пусть $f \in R[a, b]$ и задано произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда $\overline{\int} f dx = \underline{\int} f dx = \int_a^b f(x)\,dx$ и, в силу свойств точных граней числовых множеств, существуют такие разбиения Π_1 и Π_2 сегмента $[a, b]$, что $\overline{S}_{\Pi_2}(f) - \int_a^b f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$, $\int_a^b f(x)\,dx - \underline{S}_{\Pi_1}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$. Тогда, согласно лемме 1, выполнены неравенства

$$\overline{S}_{\Pi}(f) \leqslant \overline{S}_{\Pi_2}(f) < \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}_{\Pi_1}(f) + \varepsilon \leqslant \underline{S}_{\Pi}(f) + \varepsilon,$$

т. е. $0 \leqslant \overline{S}_{\Pi}(f) - \underline{S}_{\Pi}(f) < \varepsilon$.

Достаточность. Пусть $\forall \varepsilon > 0$ существует такое разбиение Π сегмента $[a, b]$, что $0 \leqslant \overline{S}_{\Pi}(f) - \underline{S}_{\Pi}(f) < \varepsilon$. Тогда из неравенств

$$\underline{S}_{\Pi}(f) \leqslant \underline{\int} f dx \leqslant \overline{\int} f dx \leqslant \overline{S}_{\Pi}(f)$$

следует неравенство $0 \leqslant \overline{\int} f dx - \underline{\int} f dx < \varepsilon$, означающее, что $f \in R[a, b]$. ▶

1.2. Интеграл Римана как предел интегральной суммы. Пусть $\Pi = \{x_0 = a,\ x_1,\ \ldots,\ x_n = b\}$ — произвольное разбиение сегмента $[a,\ b]$ и $d(\Pi) = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \Delta x_i$. На каждом сегменте $[x_i,\ x_{i+1}]$ возьмем произвольную точку ξ_i и образуем так называемую интегральную сумму $S_\Pi(f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i$. Полагаем $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f) \overset{\text{def}}{=} I$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall \Pi \wedge d(\Pi) < \delta \Rightarrow |S_\Pi(f) - I| < \varepsilon$.

Теорема 1. *Если при* $d(\Pi) \to 0$ $\exists \lim S_\Pi(f) = I$, *то* $f \in R[a,\ b]$ *и* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = I$.

◀ При выполнении условий теоремы $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 : \forall \Pi \wedge d(\Pi) < \delta \Rightarrow |S_\Pi(f) - I| < \frac{\varepsilon}{3}$, или $I - \frac{\varepsilon}{3} < S_\Pi(f) < I + \frac{\varepsilon}{3}$. Фиксируем такое разбиение Π и пусть точка ξ_i пробегает весь сегмент $[x_i,\ x_{i+1}]$. Вычислим sup и inf множества $\{S_\Pi(f)\}$:

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \underline{S}_\Pi(f) \leqslant \overline{S}_\Pi(f) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \Pi : \overline{S}_\Pi(f) - \underline{S}_\Pi(f) < \varepsilon$, т. е. $f \in R[a,\ b]$. Из равенств $\underline{\int} f dx = \overline{\int} f dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ и неравенств $I - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \underline{S}_\Pi(f) \leqslant$ $\leqslant \underline{\int} f dx \leqslant \overline{\int} f dx \leqslant \overline{S}_\Pi(f) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3}$ следует, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = I$. ▶

Покажем теперь, что из условия $f \in R[a,\ b]$ следует

$$\exists \lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема 2. *Если* $f \in R[a,\ b]$, *то*

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{d(\Pi)\to 0} \overline{S}_\Pi(f) = \lim_{d(\Pi)\to 0} \underline{S}_\Pi(f).$$

◀ Так как $I = \inf\limits_{\{\Pi\}} \{\overline{S}_\Pi(f)\}$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \Pi_1 : \overline{S}_{\Pi_1}(f) < I + \frac{\varepsilon}{2}$. Предполагая, что интервал $]a,\ b[$ содержит m точек разбиения Π_1, положим $\delta = \frac{\varepsilon}{2m\omega_f}$, где ω_f — колебание функции f на сегменте $[a,\ b]$, и рассмотрим произвольное разбиение Π сегмента $[a,\ b]$, для которого $d(\Pi) < \delta$. Оценим разность $\overline{S}_\Pi(f) - I$. Для этого рассмотрим разбиение $\Pi_2 = \Pi_1 \cup \Pi$. Согласно лемме 1 имеем $\overline{S}_{\Pi_2}(f) \leqslant \overline{S}_{\Pi_1}(f)$, а так как $\overline{S}_{\Pi_1}(f) < I + \frac{\varepsilon}{2}$, то $\overline{S}_{\Pi_2}(f) < I + \frac{\varepsilon}{2}$.

Поскольку разбиение Π_2 является продолжением разбиений Π_1 и Π, а интервал $]a,\ b[$ содержит ровно m точек разбиения Π_1, то

справедлива оценка $\overline{S}_{\Pi}(f) - \overline{S}_{\Pi_\varepsilon}(f) < m\omega_f\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, $\overline{S}_{\Pi}(f) < I + \varepsilon$. Принимая во внимание, что $\overline{S}_{\Pi}(f) \geqslant I$, получаем неравенства $0 \leqslant \overline{S}_{\Pi}(f) - I < \varepsilon$. Так как Π — произвольное разбиение сегмента $[a, b]$, для которого $d(\Pi) < \delta$, то, согласно определению, $\exists \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} \overline{S}_{\Pi}(f) = I$.

Для доказательства предельного соотношения $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} \underline{S}_{\Pi}(f) = I$ рассмотрим функцию $\varphi = -f$ и повторим для нее приведенные выше рассуждения.

Пусть $S_{\Pi}(f)$ — интегральная сумма при произвольном разбиении Π сегмента $[a, b]$, для которого $d(\Pi) < \delta$. Тогда из неравенств $\underline{S}_{\Pi}(f) \leqslant S_{\Pi}(f) \leqslant \overline{S}_{\Pi}(f)$ следует, что $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_{\Pi}(f) = I$. ▶

Теоремы 1 и 2 устанавливают эквивалентность двух определений интеграла Римана.

Приведем наиболее употребляемую форму записи критерия интегрируемости функции. Так как $M_i - m_i = \omega_i$, где ω_i — колебание функции f на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$, то критерий интегрируемости формулируется так:

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Pi : 0 \leqslant \overline{S}_{\Pi}(f) - \underline{S}_{\Pi}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon).$$

В заключение этого пункта дадим определение $\int\limits_b^a f(x)\,dx$. При этом используем определение интеграла Римана как предела интегральной суммы.

Разбиением Π' сегмента $[a, b]$ в направлении от точки b к точке a назовем множество точек $\Pi' = \{x_0 = b, x_1, \ldots, x_n = a\}$, *где* $x_i > x_{i+1}$, $i = \overline{0, n-1}$.

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — ограниченная на сегменте $[a, b]$ функция. На каждом сегменте $[x_{i+1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и образуем сумму

$$S_{\Pi'}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_i - x_{i+1}).$$

Определение. *Если существует* $\lim\limits_{d(\Pi')\to 0} S_{\Pi'}(f) = I'$, *то функция f называется интегрируемой на сегменте $[a, b]$ в направлении от точки b к точке a и этот предел обозначается*

$$I' = \int_b^a f(x)\,dx.$$

Покажем, что *если* $f \in R[a, b]$, *то существует интеграл* $\int\limits_b^a f(x)\,dx$ *и при этом* $\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

◀ Если точки разбиения $\Pi = \{\bar{x}_0 = a, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n = b\}$ совпадают с точками разбиения Π', а точки $\bar{\xi}_j \in [\bar{x}_j, \bar{x}_{j+1}]$ совпадают с точками $\xi_i \in [x_{i+1}, x_i]$, то $S_{\Pi'}(f) = -S_{\Pi}(f)$, где $S_{\Pi}(f) = \sum_{j=0}^{n-1} f(\bar{\xi}_j)\,\Delta\bar{x}_j$.

Так как $\exists \lim_{d(\Pi)\to 0} S_{\Pi}(f) = \int_a^b f(x)\,dx$, то

$$\exists \lim_{d(\Pi')\to 0} S_{\Pi'}(f) = -\int_a^b f(x)\,dx. \blacktriangleright$$

1.3. Некоторые классы функций, интегрируемых по Риману. Из определения интеграла Римана следует, что неограниченная на сегменте $[a, b]$ функция f не интегрируема на нем. Но не всякая ограниченная функция интегрируема. Покажем, например, что функция Дирихле

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррациональное,} \\ 1, & \text{если } x \text{ рациональное,} \end{cases} \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

не интегрируема на $[a, b]$. Для этого воспользуемся вторым определением интеграла Римана. Пусть Π — произвольное разбиение сегмента $[a, b]$. Выбирая на каждом сегменте $[x_i, x_{i+1}]$ иррациональное ξ_i, получим

$$S_{\Pi}(\chi) = \sum_{i=0}^{n-1} \chi(\xi_i)\,\Delta x_i = 0, \quad \lim_{d(\Pi)\to 0} S_{\Pi}(\chi) = 0.$$

Если же ξ_i — рациональное число, то

$$S_{\Pi}(\chi) = \sum_{i=0}^{n-1} \chi(\xi_i)\,\Delta x_i = b - a, \quad \lim_{d(\Pi)\to 0} S_{\Pi}(\chi) = b - a.$$

Результат зависит от выбора точек ξ_i, следовательно, функция χ не интегрируема на $[a, b]$.

Следующие теоремы устанавливают два класса интегрируемых функций.

Теорема 1. *Если* $f \in C[a, b]$, *то* $f \in R[a, b]$.

◀ Из условия $f \in C[a, b]$, согласно теореме Кантора, следует, что функция f равномерно-непрерывна на сегменте $[a, b]$, т. е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: для произвольного разбиения Π такого, что $d(\Pi) < \delta$, выполняются неравенства $\omega_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$, где ω_i — колебание функции f на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$.

Фиксируя такое разбиение Π сегмента $[a, b]$, чтобы выполнялось неравенство $d(\Pi) < \delta$, получим для него

$$\bar{S}_{\Pi}(f) - \underline{S}_{\Pi}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a} = \varepsilon,$$

откуда следует, что для функции f выполнен критерий интегрируемости. ▶

Теорема 2. *Если функция f монотонна на сегменте $[a, b]$, то $f \in R[a, b]$.*

◀ Так как функция f определена на $[a, b]$, то числа $f(a)$ и $f(b)$ существуют и функция f ограничена на сегменте $[a, b]$. Пусть f возрастает на $[a, b]$. Тогда $\forall \Pi$ имеем $\omega_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$. По заданному $\varepsilon > 0$ возьмем такое разбиение Π, чтобы выполнялись неравенства $\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$, $i = \overline{0, n-1}$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) = \frac{\varepsilon (f(b) - f(a))}{f(b) - f(a)} = \varepsilon,$$

т. е. для функции f выполнен критерий интегрируемости. ▶

Для расширения класса интегрируемых по Риману функций необходимы некоторые определения и теоремы.

1.4. Мера 0 Лебега и мера 0 Жордана.

Определение 1. Мерой $\mu\bar{\mathcal{J}}$ *сегмента* $\bar{\mathcal{J}} = [a, b]$ (*мерой* $\mu\mathcal{J}$ *интервала* $\mathcal{J} =]a, b[$) *называют его длину, т. е. число* $b - a$.

Определение 2. *Множество* $X \subset \mathbb{R}$ *имеет лебегову меру* 0, *если* $\forall \varepsilon > 0$ *существует такое счетное покрытие* $\overline{W} = \{\bar{\mathcal{J}}_j;\ j \in \mathbb{N}\}$ *этого множества сегментами* $\bar{\mathcal{J}}_j$ (*счетное покрытие* $W = \{\mathcal{J}_j;\ j \in \mathbb{N}\}$ *интервалами* $\mathcal{J}_j$), *меры которых* μ_j, *что* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_j < \varepsilon$, *где* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_j = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j$.

Из определения 2 следует, что если множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет лебегову меру 0 и $E \subset X$, то множество E также имеет меру 0.

Рассмотрим примеры множеств лебеговой меры 0.

1) Если множество $X \subset \mathbb{R}$ содержит конечное число точек, то оно имеет меру 0.

2) Если множество $X \subset \mathbb{R}$ счетно, то оно имеет меру 0, поскольку $\forall \varepsilon > 0$ и для каждой точки $x_j \in X$ можно выбрать такой сегмент $\bar{\mathcal{J}}_j$ (интервал $\mathcal{J}_j$), меры которых μ_j, что $x_j \in \mathcal{J}_j$, и при этом $\mu_j < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_j \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Следующие теоремы используются при доказательстве теоремы Лебега.

Теорема 1. *Если* $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} X_j$, $X \subset \mathbb{R}$ *и каждое множество* X_j *имеет лебегову меру* 0, *то множество* X *также является множеством лебеговой меры* 0.

◀ Пусть задано $\varepsilon > 0$. Так как каждое множество X_j имеет меру 0, то оно обладает таким счетным покрытием $W_j = \{I_{ij};\ i \in \mathbb{N}\}$ интервалами $\mathcal{J}_{ij}$, меры которых μ_{ij}, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_{ij} < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$. Семейство $W = \{W_j;\ j \in \mathbb{N}\}$ всех таких покрытий покрывает все множество X. Согласно теореме 2, п. 12.2, гл. I, семейство $\{\mathcal{J}_{ij}\}$ счетно, поэтому

его можно занумеровать в последовательность $\mathcal{J}_k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда и меры μ_k интервалов $\mathcal{J}_k$ образуют числовую последовательность, в силу чего получим (учитывая абсолютную сходимость ряда с членами μ_k)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} < \varepsilon.$$

Множество X оказалось покрытым счетным множеством интервалов, общая сумма длин которых меньше произвольного $\varepsilon > 0$, поэтому X является множеством лебеговой меры 0.

Определение 3. *Множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет жорданову меру 0, если $\forall \varepsilon > 0$ существует такое конечное покрытие $\overline{W} = \{\overline{\mathcal{J}}_j;\ j = \overline{1, n}\}$ ($W = \{\mathcal{J}_j;\ j = \overline{1, n}\}$ этого множества сегментами $\overline{\mathcal{J}}_j$ (интервалами $\mathcal{J}_j$), меры которых μ_j, что $\sum_{j=1}^{n} \mu_j < \varepsilon$.*

Из определения 3 следует, что всякое множество жордановой меры 0 имеет лебегову меру 0, поскольку из конечного множества интервалов покрытия всегда можно образовать счетное покрытие.

Теорема 2. *Компактное множество $K \subset \mathbb{R}$ лебеговой меры 0 является также множеством жордановой меры 0.*

◀ Так как множество K имеет лебегову меру 0, то $\forall \varepsilon > 0$ существует такое его покрытие $W = \{\mathcal{J}_j;\ j \in \mathbb{N}\}$ интервалами $\mathcal{J}_j$, меры которых μ_j, что $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j < \varepsilon$. Из компактности множества K следует, что из бесконечного покрытия W можно выделить конечное множество интервалов $\mathcal{J}_j^*$, $j = \overline{1, n}$, меры которых μ_j^*, покрывающих множество K. При этом $\sum_{j=1}^{n} \mu_j^* < \varepsilon$. ▶

Вспомним определение колебания функции в точке: *колебанием функции $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, в точке $x_0 \in X$ называется предел*

$$\lim_{\delta \to +0} (M(f(S(x_0, \delta))) - m(f(S(x_0, \delta)))),$$

где $M(f(S(x_0, \delta))) = \sup\limits_{x \in S(x_0, \delta)} \{f(x)\}$, $m(f(S(x_0, \delta))) = \inf\limits_{x \in S(x_0, \delta)} \{f(x)\}$, $S(x_0, \delta)$ — δ-окрестность точки x_0. Для колебания функции f в точке x_0 принято обозначение $\omega(f(x_0))$.

Теорема 3. *Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — замкнутое множество. Тогда для любой ограниченной функции $f: X \to \mathbb{R}$ и $\forall \varepsilon > 0$ множество $E = \{x \in X:\ \omega(f(x)) \geqslant \varepsilon\}$ замкнуто.*

◀ Покажем, что множество $\mathbb{R} \setminus E$ открытое. Если $x \in \mathbb{R} \setminus E$, то возможны два случая: 1) $x \notin X$; 2) $x \in X$ (в этом случае, очевидно, $\omega(f(x)) < \varepsilon$).

В случае 1) множество $\mathbb{R} \setminus X$ открыто (так как множество X замкнуто) и поэтому существует такой интервал $\mathcal{J}$, что $x \in \mathcal{J}$, причем $\mathcal{J} \subset \mathbb{R} \setminus X \subset \mathbb{R} \setminus E$, т. е. x — внутренняя точка множества $\mathbb{R} \setminus E$.

В случае 2) из условия $\omega(f(x)) < \varepsilon$ следует существование такого $\delta > 0$, что $\omega(f(S(x, \delta))) = M(f(S(x, \delta))) - m(f(S(x, \delta))) < \varepsilon$.

Пусть $\mathcal{J}$ — такой интервал, содержащий точку x, что $\mathcal{J} \subset S(x, \delta)$. Тогда $\forall y \in \mathcal{J}\ \exists \delta_1 > 0 : S(y, \delta_1) \subset \mathcal{J}$ (так как $\mathcal{J}$ — открытое множество и точка y входит в него вместе с некоторой окрестностью). Поскольку $S(y, \delta_1) \subset S(x, \delta)$, то $\omega(f(y)) < \varepsilon$, т. е. $\mathcal{J} \subset \mathbb{R} \setminus E$, так как $y \in \mathcal{J}$ — произвольная точка. Следовательно, и в случае 2) x является внутренней точкой множества $\mathbb{R} \setminus E$. Таким образом, множество $\mathbb{R} \setminus E$ открытое. Согласно следствию из теоремы 3, п. 5.1, гл. 2, множество E является замкнутым. ▶

Теорема 4. *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция, у которой $\omega(f(x)) < \varepsilon$ для каждого $x \in [a, b]$ и некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое разбиение Π сегмента $[a, b]$, что*

$$\overline{S}_{\Pi}(f) - \underline{S}_{\Pi}(f) < \varepsilon (b - a).$$

◀ Пусть задано $\varepsilon > 0$. Для каждого $x \in [a, b]$ существует такой интервал $\mathcal{J}_x$, что $\omega(f(\mathcal{J}_x)) < \varepsilon$. Так как сегмент — компактное множество, то существует конечное множество интервалов $\mathcal{J}_x$, покрывающих $[a, b]$. Обозначим эти интервалы через $\mathcal{J}_i$, $i = \overline{1, n}$.

Пусть Π — такое разбиение сегмента $[a, b]$, что каждый сегмент $[x_j, x_{j+1}]$ содержится в некотором интервале $\mathcal{J}_i$. Тогда $\omega_j < \varepsilon$ для каждого сегмента, концы которого входят в разбиение Π, где ω_j — колебание функции f на сегменте $[x_j, x_{j+1}]$. В силу этого имеем

$$\overline{S}_{\Pi}(f) - \underline{S}_{\Pi}(f) = \sum_j \omega_j \Delta x_j < \varepsilon (b - a). \ ▶$$

Теорема Лебега. *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция и $E \subset [a, b]$ — множество ее точек разрыва. Функция f интегрируема по Риману на сегменте $[a, b]$ тогда и только тогда, когда E — множество лебеговой меры 0.*

◀ *Необходимость.* Пусть $f \in R[a, b]$. Представим множество E как объединение всех таких множеств $E_{\frac{1}{n}}$, в каждой точке которых колебание функции $\omega(f(x)) \geqslant \frac{1}{n} : E = \bigcup_{n=1}^{n} E_{\frac{1}{n}}$.

Покажем, что каждое множество $E_{\frac{1}{n}}$ имеет лебегову меру 0. Так как, согласно теореме 3, множество $E_{\frac{1}{n}}$ замкнуто, то оно компактно. Поскольку $f \in R[a, b]$, то $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ существует такое разбиение $\overline{\Pi}_n$ сегмента $[a, b]$ на сегменты $\overline{\mathcal{J}}_j^{(n)}$, что

$$0 \leqslant \overline{S}_{\Pi_n}(f) - \underline{S}_{\Pi_n}(f) < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Пусть $\overline{\Pi}_n^{(1)}$ — множество всех тех сегментов $\overline{\mathcal{J}}_j^{(n)}$, которые пересекаются с множеством $E_{\frac{1}{n}}$. Тогда множество $\overline{\Pi}_n^{(1)}$ покрывает множество $E_{\frac{1}{n}}$, причем для каждого сегмента $\overline{\mathcal{J}}_j^{(n)} \in \overline{\Pi}_n^{(1)}$ имеем $\omega_j^{(n)} \geqslant \frac{1}{n}$.

Таким образом, справедлива цепочка неравенств

$$\frac{1}{n}\sum_{\overline{\mathcal{J}}_i^{(n)}\in\overline{\Pi}_n^{(1)}}\mu_i^{(n)}\leqslant\sum_{\overline{\mathcal{J}}_i^{(n)}\in\overline{\Pi}_n^{(1)}}\omega_i^{(n)}\mu_i^{(n)}\leqslant\sum_{\overline{\mathcal{J}}_i^{(n)}\in\overline{\Pi}_n}\omega_i^{(n)}\mu_i^{(n)}<\frac{\varepsilon}{n},$$

где $\mu_i^{(n)}$ — меры сегментов $\overline{\mathcal{J}}_i^{(n)}$. Следовательно, $\sum_{\overline{\mathcal{J}}_i^{(n)}\in\overline{\Pi}_n^{(1)}}\mu_i^{(n)}<\varepsilon$, т. е. $E_{\frac{1}{n}}$ является множеством жордановой меры 0, а значит, и лебеговой меры 0. Тогда множество E как объединение счетного семейства множеств меры 0 является, согласно теореме 1, множеством лебеговой меры 0.

Достаточность. Пусть множество E точек разрыва функции имеет лебегову меру 0. Для произвольного $\varepsilon>0$ обозначим через E_ε множество всех точек сегмента $[a, b]$, в каждой из которых $\omega(f(x))\geqslant\varepsilon$. Тогда $E_\varepsilon\subset E$, в силу чего множество E_ε имеет меру 0. Так как, согласно теореме 3, множество E_ε компактно, то оно имеет жорданову меру 0. Поэтому имеется конечное множество $\{\mathcal{J}_i^*;\ i\in I_1\}$ интервалов, покрывающих множество E_ε, причем $\sum_{i\in I}\mu_i^*<\varepsilon$, где μ_i^* — меры интервалов $\mathcal{J}_i^*$. Пусть Π — произвольное разбиение сегмента $[a, b]$, в состав которого входят концы интервалов $\mathcal{J}_i^*$. Из ограниченности функции f следует существование такого постоянного числа $M>0$, что $|f(x)|\leqslant M\quad\forall x\in[a, b]$. Тогда колебание ω_i функции f на каждом сегменте $[x_i, x_{i+1}]$, концы которого входят в разбиение Π, удовлетворяет неравенству $\omega_i\leqslant 2M$, в силу чего выполняются неравенства

$$\sum_{i\in I}\omega_i\mu_i^*\leqslant 2M\sum_{i\in I_1}\mu_i^*<2M\varepsilon.$$

Если $\overline{\mathcal{J}}_i$ такой сегмент разбиения $\overline{\Pi}$, что $\overline{\mathcal{J}}_i\cap E_\varepsilon=\varnothing$, то $\omega(f(x))<\varepsilon\ \forall x\in\overline{\mathcal{J}}_i$, следовательно, согласно теореме 4, существует такое разбиение этого сегмента на сегменты $\overline{\mathcal{J}}_{ik}$, что

$$\overline{\mathcal{J}}_i=\bigcup_k\overline{\mathcal{J}}_{ik},\quad\sum_k\omega_{ik}\mu_{ik}<\varepsilon\sum_k\mu_{ik}=\varepsilon\mu_i,$$

где ω_{ik} — колебание функции f на сегменте $\overline{\mathcal{J}}_{ik}$, μ_{ik} — мера сегмента $\overline{\mathcal{J}}_{ik}$, μ_i — мера сегмента $\overline{\mathcal{J}}_i$.

Рассмотрим разбиение Π_1, в которое входят концы интервалов $\mathcal{J}_i^*$ и концы сегментов $\overline{\mathcal{J}}_{ik}$. Обозначив через m индекс суммирования, получаем неравенство

$$\sum_m\omega_m\mu_m=\sum_{i\in I_1}\omega_i\mu_i^*+\sum_i\sum_k\omega_{ik}\mu_{ik}<2M\varepsilon+\sum_i\varepsilon\mu_i<2M\varepsilon+(b-a)\varepsilon=$$
$$=(2M+b-a)\varepsilon.$$

Поскольку M и $b-a$ — фиксированные числа, а $\varepsilon>0$ — произвольное, наперед заданное, то из последнего неравенства следует интегрируемость функции f на сегменте $[a, b]$. ▶

Теорема Лебега является центральной в теории интеграла Римана.

Из теоремы Лебега, в частности, следует, что классу интегрируемых по Риману функций принадлежат ограниченные функции, множество точек разрыва которых не более чем счетно или имеет жорданову меру 0.

В качестве примера рассмотрим функцию Римана

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное,} \end{cases} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где m и n ($n \geqslant 1$) — взаимно-простые целые числа. Она ограничена на $[a, b]$, непрерывна в каждой иррациональной точке и разрывна в рациональных точках этого сегмента, поэтому множество ее точек разрыва имеет лебегову меру 0, в силу чего $f \in R\,[a, b]$. Поскольку при любом разбиении сегмента $[a, b]$ каждый сегмент $[x_i, x_{i+1}]$ содержит иррациональные точки, то $\underline{\int} f dx = 0$, а значит, и $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 0$.

1.5. Интегралы функций, заданных на произвольных ограниченных множествах. Множества, измеримые по Жордану. Введем в рассмотрение характеристическую функцию множества, с помощью которой понятие интеграла распространяется на функции, определенные на произвольных ограниченных множествах.

Определение 1. *Пусть* $E \subset X \subset \mathbb{R}$. *Функция* $\chi_E : X \to \mathbb{R}$, *где*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in X \setminus E, \\ 1, & \text{если } x \in E, \end{cases}$$

называется характеристической функцией множества E.

Определение 2. *Пусть* $E \subset [a, b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — *ограниченная функция. Если* $f\chi_E \in R\,[a, b]$, *то полагаем*

$$\int\limits_E f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_a^b f(x)\,\chi_E(x)\,dx.$$

Используя определение 2, введем понятие интеграла Римана функции $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset [a, b]$.

Определение 3. *Пусть* $E \subset [a, b] \subset \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ — *ограниченная функция. Продолжим функцию* f *на сегмент* $[a, b]$, *образовав функцию*

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in E, \\ 0, & \text{если } x \in [a, b] \setminus E, \end{cases} \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

Если функция F *интегрируема на сегменте* $[a, b]$, *то*

$$\int\limits_E f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_a^b F(x)\,dx.$$

Рассмотрим сужение ограниченной на сегменте $[a, b]$ функции f на множество $E = \{a\}$ и образуем функцию

$$F(x) = \begin{cases} f(a), & \text{если } x = a, \\ 0, & \text{если } a < x \leqslant b. \end{cases}$$

Функция F интегрируема на сегменте $[a, b]$ и $\int\limits_a^b F(x)\,dx = 0$, так как при $f(a) \neq 0$ она разрывна лишь в одной точке, а при любом разбиении Π сегмента $[a, b]$ $\underline{S}_\Pi(F) = 0$, $\underline{\int} F dx = \int\limits_a^b F(x)\,dx = 0$. Обозначим $\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_a^a f(x)\,dx$. Согласно определению 3, имеем

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Введем понятие множества, измеримого по Жордану. Это понятие связано непосредственно с вопросом об интегрируемости характеристической функции данного множества.

Теорема. *Функция* $\chi_E : [a, b] \to \mathbb{R}$, *где* $[a, b] \supset E$, *интегрируема на* $[a, b]$ *тогда и только тогда, когда граница множества* E *имеет лебегову меру* 0.

◀ Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $[a, b] \supset E$ — произвольный сегмент. Согласно определению 2, имеем

$$\int\limits_E dx = \int\limits_a^b \chi_E(x)\,dx,$$

если интеграл в правой части этого равенства существует.

Пусть $x \in E$ — внутренняя точка. Тогда существует такая окрестность $S(x, \delta)$, что $\chi_E(y) = 1$ $\forall\, y \in S(x, \delta)$, т. е. функция χ_E непрерывна в каждой внутренней точке множества E. Если $x \in [a, b]$ — внешняя по отношению к E точка, то существует такая окрестность $S(x, \delta_1) \subset \mathbb{R} \setminus E$, что $\chi_E(y) = 0$ $\forall\, y \in S(x, \delta_1) \cap [a, b]$, т. е. функция χ_E непрерывна в точке x. Если точка x принадлежит границе множества E, то для произвольной окрестности $S(x, \delta)$ существуют такие точки x_1 и x_2, что $x_1 \in S(x, \delta) \cap E$, $x_2 \in S(x, \delta) \cap \mathbb{R} \setminus E$, и при этом $\chi_E(x_1) = 1$, $\chi_E(x_2) = 0$. Поэтому функция χ_E разрывна в точке x. Следовательно, множество точек разрыва функции χ_E совпадает с границей множества E. Согласно теореме Лебега, $\int\limits_a^b \chi_E(x)\,dx$ существует тогда и только тогда, когда граница множества E имеет лебегову меру 0 (следовательно, и жорданову меру 0, поскольку множество всех точек границы множества E замкнуто). ▶

Определение 4. *Ограниченное множество* $E \subset \mathbb{R}$, *граница которого имеет лебегову меру* 0, *называется измеримым по Жордану, а* $\int\limits_E dx$ *называют жордановой мерой множества* E

или его д л и н о й.

Здесь $$\int\limits_E dx = \int\limits_a^b \chi_E(x)\,dx,$$

где $[a, b]$ — произвольный сегмент, содержащий множество E.

Заметим, что не всякое открытое множество измеримо по Жордану, поэтому $\int\limits_E f(x)\,dx$ из определения 2 может не существовать, когда E — открытое множество, а функция $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывна. Пусть, например, $f(x) = 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, а E — множество рациональных точек сегмента $[0, 1]$. Тогда

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Согласно определению, имеем

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_0^1 \chi_E(x)\,dx,$$

если интеграл в правой части существует.

В рассматриваемом случае этот интеграл не существует, поэтому не существует и $\int\limits_E f(x)\,dx$.

В следующем пункте докажем теорему об интегрируемости сложной функции. Она будет использована при доказательстве некоторых теорем об интегрируемых функциях.

1.6. Интегрируемость сложной функции.

Теорема. *Пусть* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in R[a, b]$, $A \leqslant f(x) \leqslant B$ *и* $\psi: [A, B] \to \mathbb{R}$, $\psi \in C[A, B]$, $g = \psi \circ f: [a, b] \to \mathbb{R}$.

Тогда $g \in R[a, b]$.

◀ Из условия $f \in R[a, b]$ следует, что функция f удовлетворяет критерию интегрируемости по Риману.

Композиция $g = \psi \circ f$ непрерывна в каждой точке непрерывности функции f, поэтому также удовлетворяет критерию Лебега. Следовательно, $g \in R[a, b]$. ▶

Если в теореме заменить условие непрерывности функции ψ условием ее интегрируемости, то утверждение теоремы в общем случае теряет силу. Пусть, например,

$$\psi(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = 0, \\ 1, & \text{если } y \neq 0, \end{cases} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1;$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррациональное,} \\ \dfrac{1}{n}, & \text{если } x = \dfrac{m}{n}, \end{cases} \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

где m и n $(n \geqslant 1)$ — взаимно-простые целые числа. Функция f интегрируема на сегменте $[a, b]$, а функция ψ интегрируема на сегменте

[0, 1]. Вместе с тем функция

$$\psi \circ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррациональное,} \\ 1, & \text{если } x \text{ рациональное,} \end{cases} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

не интегрируема на сегменте $[a, b]$ (см. пункт 1.3).

§ 2. СВОЙСТВА ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

2.1. Свойства, выраженные равенствами.

Теорема 1. *Если* $f \in R[a, b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *то* $\alpha f \in R[a, b]$, *причем*

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

◀ Воспользуемся теоремой пункта 1.2. При произвольном разбиении Π сегмента $[a, b]$ и произвольном выборе точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, интегральная сумма $S_\Pi(\alpha f)$ имеет вид

$$S_\Pi(\alpha f) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha f(\xi_i)\,\Delta x_i = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Предел правой части этого равенства при $d(\Pi) \to 0$ существует и равен $\alpha \int_a^b f(x)\,dx$, так как $f \in R[a, b]$. Следовательно, существует предел левой части, равный по определению $\int_a^b \alpha f(x)\,dx$. ▶

Теорема 2. *Если* $f_1 \in R[a, b]$, $f_2 \in R[a, b]$, *то* $(f_1 \pm f_2) \in R[a, b]$, *и при этом*

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

◀ При любом разбиении Π сегмента $[a, b]$ и произвольном выборе точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ имеем $S_\Pi(f_1 \pm f_2) = S_\Pi(f_1) \pm S_\Pi(f_2)$. Совершая предельный переход при $d(\Pi) \to 0$ и принимая во внимание, что $f_1 \in R[a, b]$, $f_2 \in R[a, b]$, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы. ▶

Теорема 3. *Если* $f \in R[a, b]$, *то* $|f| \in R[a, b]$.

◀ Поскольку f удовлетворяет всем условиям теоремы Лебега, то этим же свойством обладает и функция $|f|$. ▶

Обратное утверждение неверно: из интегрируемости $|f|$ не следует, вообще говоря, интегрируемость f, например, функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рациональное,} \\ -1, & \text{если } x \text{ иррациональное,} \end{cases} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

не интегрируема на $[a, b]$, хотя функция $|f| = 1$ интегрируема на этом сегменте.

Теорема 4. *Если* $f \in R[a, b]$, $\varphi \in R[a, b]$, *то* $f\varphi \in R[a, b]$.

◀ Если функции f и φ имеют точки разрыва, то множества этих точек

являются множествами лебеговой меры 0 каждое, а объединение этих множеств будет в общем случае множеством точек разрыва функции $f\varphi$. Поскольку это объединение является множеством лебеговой меры 0, то функция $f\varphi$ удовлетворяет критерию Лебега интегрируемости по Риману. ▶

Теорема 5. *Если* $f \in R\,[a, b]$, *то сужение функции* f *на любой сегмент* $[a', b'] \subset [a, b]$ *интегрируемо на* $[a', b']$.

◀ Утверждение следует из теоремы Лебега. ▶

Следующая теорема устанавливает так называемое *свойство аддитивности интеграла Римана* относительно области интегрирования.

Теорема 6. *Пусть* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *и сужения функции* f *на сегменты* $[a, c]$ *и* $[c, b]$, $c \in]a, b[$, *интегрируемы на них. Тогда* $f \in R\,[a, b]$, *причем*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

◀ Согласно определению 3, п. 1.5, имеем

$$\int_a^{\cdot} f(x)\,dx = \int_a^{\cdot} F_1(x)\,dx, \quad \int_c^{\cdot} f(x)\,dx = \int_a^{\cdot} F_2(x)\,dx,$$

где

$$F_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in [a, c], \\ 0, & \text{если } x \in [a, b] \setminus [a, c], \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [a, c], \\ f(x), & \text{если } x \in [a, b] \setminus [a, c]. \end{cases}$$

Используя свойство линейности интеграла, получим

$$\int_a^{\cdot} (F_1(x) + F_2(x))\,dx = \int_a^{\cdot} F_1(x)\,dx + \int_a^{\cdot} F_2(x)\,dx.$$

Поскольку $\int_a^{\cdot} (F_1(x) + F_2(x))\,dx = \int_a^{\cdot} f(x)\,dx$, то утверждение доказано. ▶

Теорема доказана для случая, когда $c \in]a, b[$. Если c лежит вне $]a, b[$, то сегмент $[a, b]$ является частью сегмента $[a, c]$ или сегмента $[c, b]$ и тогда $f \in R\,[a, b]$ на основании теоремы 5. Докажем установленную формулу для случая, например, когда $c > b$. Тогда по доказанному

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Далее,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\left(\text{на основании равенства } \int_c^{\cdot} f(x)\,dx = -\int_b^c f(x)\,dx\right).$$

2.2. Свойства интегрируемых функций, выраженные неравенствами.

Теорема 1. *Если* $f,\ g \in R[a, b]$ *и* $f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in [a, b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

◀ Из условий теоремы следует, что при любом разбиении Π сегмента $[a, b]$ и любом выборе точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ выполняется неравенство $S_\Pi(f) \leqslant S_\Pi(g)$, переходя к пределу в котором при $d(\Pi) \to 0$ получим неравенство, содержащееся в утверждении теоремы. ▶

Следствие 1. *Если* $f \in R[a, b]$ *и* $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a, b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Следствие 2. *Если* $f \in R[a, b]$, $f(x) \geqslant 0$, $f(x) \not\equiv 0$ *и хотя бы в одной точке* $x_0 \in]a, b[$ *непрерывности функции* f *выполнено условие* $f(x_0) \neq 0$, *то существует такое постоянное число* $c > 0$, *что*

$$\int_a^b f(x) \geqslant c.$$

◀ Так как $f(x_0) > 0$, то найдется такая окрестность $S(x_0, \delta)$, в пределах которой выполняется неравенство $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ (в силу известного свойства непрерывной в данной точке функции, в которой она отлична от нуля, сохранять определенный знак в некоторой окрестности этой точки). Используя свойство аддитивности интеграла Римана и следствие 1, получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x)\,dx \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{f(x_0)}{2} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} dx = \delta f(x_0) = c, \quad c > 0. \ ▶$$

Теорема 2. *Если* $f \in R[a, b]$ *и* $m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \forall x \in [a, b]$, *то справедливы неравенства*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

◀ Доказательство теоремы следует из очевидных равенств $\int_a^b m\,dx = m(b-a)$, $\int_a^b M\,dx = M(b-a)$, и теоремы 1. ▶

Теорема 3. *Если* $f \in R[a, b]$, *то*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

◀ Так как $f \in R[a, b]$, то $|f| \in R[a, b]$ (теорема 3, п. 2.1). Применяя теорему 1 к неравенствам $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, получим неравенства $-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$, которые можно записать как одно неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \ \blacktriangleright$$

§ 3. ВАЖНЕЙШИЕ ТЕОРЕМЫ И ФОРМУЛЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

К важнейшим теоремам и формулам интегрального исчисления относят так называемые теоремы о среднем, основную теорему интегрального исчисления, формулу Ньютона — Лейбница и формулы замены переменной и интегрирования по частям. Изучению упомянутых теорем и формул следует уделить большое внимание.

3.1. Первая теорема о среднем. С помощью этой теоремы получают всевозможные оценки при рассмотрении вопросов теории и практики.

Теорема. *Если* $f \in R[a, b]$, $g \in R[a, b]$ *и* $g(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a, b]$ $(g(x) \leqslant 0)$, *то справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx, \quad m \leqslant \mu \leqslant M,$$

где $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$, $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$.

◀ В силу условий теоремы $fg \in R[a, b]$ (согласно теореме 4, п. 2.1). Пусть, например, $g(x) \geqslant 0$ на сегменте $[a, b]$. Умножим обе части двойного неравенства $m \leqslant f(x) \leqslant M$ на $g(x) \geqslant 0$, а затем применим теорему 1, п. 2.2. При этом получим неравенства

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M \int_a^b g(x)\,dx. \tag{1}$$

Из условия $g(x) \geqslant 0$ следует, что $A = \int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0$ (следствие 1 из теоремы 1, п. 2.2). Если $A = 0$, то утверждение теоремы очевидно. Если $A \neq 0$, то $A > 0$, и разделив все части неравенств (1) на A, получим неравенства

$$m \leqslant \frac{1}{A} \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M.$$

Обозначив $\frac{1}{A} \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu$, получим доказываемую формулу.

Если условие $f \in R[a, b]$ заменить условием $f \in C[a, b]$, то получим формулу

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx, \quad \xi \in [a, b],$$

так как в этом случае число μ есть промежуточное значение между значениями m и M непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции f, которое она обязана принять по меньшей мере один раз в некоторой точке $\xi \in [a, b]$. ▶

Отметим важный частный случай доказанной теоремы, когда $g(x) = 1$, $f \in C[a, b]$. Тогда получаем формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a), \quad \xi \in [a, b]. \tag{2}$$

3.2. Определенный интеграл как функция верхнего предела интегрирования. Пусть $f \in R[a, b]$ и $x \in [a, b]$ — произвольная точка. Тогда, согласно теореме 5, п. 2.1, можем утверждать, что $f \in R[a, x]$. Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Теорема 1. *Если* $f \in R[a, b]$, *то* $\Phi \in C[a, b]$.

◀ Так как $f \in R[a, b]$, то $\exists M > 0 : |f(x)| \leqslant M \ \forall x \in [a, b]$. Оценим разность $\Phi(x) - \Phi(x_0)$, где $x_0 \in]a, b[$ — произвольная точка. Применяя теорему 6, п. 2.1, и теорему 3, п. 2.2, имеем

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt, \quad |\Phi(x) - \Phi(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{sgn}(x - x_0) \int_{x_0}^x |f(t)|\,dt \leqslant M(x - x_0)\operatorname{sgn}(x - x_0) = M|x - x_0|.$$

По заданному $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ из условия $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$. Тогда при $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|\Phi(x) - \Phi(x_0)| < \varepsilon$, из которого следует, что функция Φ непрерывна в точке x_0. Аналогично доказывается непрерывность функции Φ в точке a справа и в точке b слева. ▶

Теорема 2 (основная теорема интегрального исчисления). *Функция*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

где $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in R[a, b]$, *дифференцируема в каждой точке* $x \in [a, b]$, *в которой функция* f *непрерывна, и при этом* $\Phi'(x) = f(x)$.

◀ Пусть f непрерывна в точке $x_0 \in]a, b[$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in S(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, где, как обычно, через $S(x_0, \delta)$ обозначена δ-окрестность точки x_0.

Оценим $\left|\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right|$ при $|x - x_0| < \delta$.

Так как $\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, то

$$\left|\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^{x}(f(t)-f(x_0))\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\operatorname{sgn}(x-x_0)}{|x-x_0|}\int\limits_{x_0}^{x}|f(t)-f(x_0)|\,dt<\frac{\varepsilon(x-x_0)\operatorname{sgn}(x-x_0)}{|x-x_0|}=\varepsilon,$$

поскольку $|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$ при всех $x_0<t<x$. Из полученного неравенства следует, что $\Phi'(x_0)$ существует, причем $\Phi'(x_0)=f(x_0)$. ▶

Из теорем 1 и 2 получаем два важных следствия.

Следствие 1. *Если $f\in C[a, b]$, то функция f имеет на сегменте $[a, b]$ точную первообразную*

$$\Phi(x)=\int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt,\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

а совокупность всех первообразных функции f принадлежит множеству $\{\Phi+C\}$, где C — произвольная постоянная.

Следствие 2. *Если $f\in R[a, b]$ и множество точек разрыва функции f не более чем счетное, то функция*

$$\Phi(x)=\int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt,\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

является первообразной функции f на $[a, b]$, а совокупность всех первообразных функции f принадлежит множеству $\{\Phi+C\}$, где C — произвольная постоянная.

◀ Согласно теореме 1, функция Φ непрерывна на сегменте $[a, b]$, а согласно теореме 2, она дифференцируема в каждой точке этого сегмента, в которой f непрерывна, поэтому Φ — первообразная функции f на сегменте $[a, b]$. Согласно теореме 1, п. 1.1, гл. 5, множество $\{\Phi+C\}$, где C — произвольная постоянная, является совокупностью всех первообразных функции f на сегменте $[a, b]$. ▶

Теорема 3 (основная формула интегрального исчисления). *Если $f\in R[a, b]$ и множество точек разрыва функции f не более чем счетное, а F — произвольная первообразная функции f на сегменте $[a, b]$, то справедлива формула*

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx=F(b)-F(a),\tag{1}$$

называемая формулой Ньютона — Лейбница.

◀ Пусть F — произвольная первообразная функции f на сегменте $[a, b]$. Тогда, согласно следствию 2, имеем

$$F(x)=\int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt+C,$$

где $C = \text{const}$. Принимая во внимание равенство $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$, находим $C = F(a)$. Таким образом $\forall x \in [a, b]$ получаем формулу

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + F(a),$$

полагая в которой $x = b$ приходим к формуле (1). ▶

С помощью символа подстановки $|_a^b$ формулу (1) записывают в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b. \tag{2}$$

Формула (2) устанавливает зависимость между определенным и неопределенным интегралами функции $f \in R[a, b]$, множество точек разрыва которой не более чем счетно, выражаемую формулой

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)\Big|_a^b. \tag{3}$$

Например, функция Римана $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \\ \dfrac{1}{n}, & \text{если } x = \dfrac{m}{n}, \end{cases}$$

где m и n $(n \geqslant 1)$ — взаимно-простые целые числа, интегрируема на $[0, 1]$. Она непрерывна на множестве всех иррациональных точек сегмента $[0, 1]$ и разрывна в каждой его рациональной точке. Множество ее точек разрыва счетное, а в каждой иррациональной точке она принимает значения, равные нулю. Поэтому функция $x \mapsto C$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, где C — произвольная постоянная, является первообразной функции f на сегменте $[0, 1]$. Применив формулу Ньютона — Лейбница, находим

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = C\Big|_0^1 = C - C = 0.$$

Докажем с помощью формулы Ньютона — Лейбница важную теорему об интегральной форме записи остаточного члена формулы Тейлора.

Теорема 4. *Если функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *принадлежит классу* C^n, *то справедлива формула*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt, \quad x \in [a, b]. \tag{4}$$

◀ Рассмотрим при фиксированном $x \in]a, b]$ функцию $t \mapsto f(t)$, $a \leqslant t \leqslant x$, класса C^n и проинтегрируем на сегменте $[a, x]$ обе части

тождества

$$\frac{d}{dt}\left(f(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right)\equiv\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t),$$

а затем применим к интегралу в левой части формулу Ньютона — Лейбница. Получим формулу (4). ▶

Рассмотрим примеры на применение формулы Ньютона — Лейбница.

Пример 1. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{-5\pi}^{31\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$, $0<\varepsilon<1$.

В примере 2, п. 4.7, гл. 5, показано, что при $0<\varepsilon<1$ функция

$$F(x)=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right],\quad x\in\mathbb{R},$$

$$F((2n+1)\pi)=\lim_{x\to(2n+1)\pi}F(x),$$

где $\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]$ — целая часть выражения $\frac{x+\pi}{2\pi}$, является первообразной для подынтегральной функции на всей числовой прямой. Применив формулу Ньютона — Лейбница, находим

$$I=F(31\pi-0)-F(-5\pi+0)=\frac{36\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{0,5}^{41,7}[x]\,dx$.

На основании решения примера пункта 1,4, гл. 5, и формулы Ньютона — Лейбница получаем

$$I=\left(x[x]-\frac{[x]([x]+1)}{2}\right)\Bigg|_{0,5}^{41,7}=848,7.$$

В конце этой главы будут рассмотрены некоторые применения определенного интеграла к решению конкретных задач, имеющих прикладное значение. В связи с многочисленными применениями интеграла вопрос умения строить первообразные непрерывных и разрывных функций приобретает первостепенное значение, так как наличие первообразной позволяет с помощью формулы Ньютона — Лейбница решить данную задачу.

3.3. Вторая теорема о среднем. Формулы Бонне.

Теорема. *Если:* 1) *функция* $f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ *не возрастает на сегменте* $[a,\ b]$, $f(x)\geqslant 0$ $\forall x\in[a,\ b]$ и $g\in R[a,\ b]$, *то* $\exists\xi\in[a,\ b]$ *такое, что*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx;\qquad(1)$$

2) *f не убывает на* $[a, b]$, $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a, b]$ *и* $g \in R[a, b]$, *то* $\exists \eta \in [a, b]$ *такое, что*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(b) \int_\eta^b g(x)\, dx. \tag{2}$$

◀ Доказательство проведем для случая 1), поскольку в случае 2) рассуждения аналогичны.

Считая выполненными условия 1), исключим тривиальный случай $f(a) = 0$, так как при этом $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$ и формула (1) верна $\forall \xi \in [a, b]$. Тогда $f(a) > 0$. Поскольку функция f монотонна на сегменте $[a, b]$, то $f \in R[a, b]$ (теорема 2, п. 1.3), а из условия $g \in R[a, b]$ следует, что $fg \in R[a, b]$ (теорема 4, п. 2.1). Согласно теореме 6, п. 2.1, при любом разбиении Π сегмента $[a, b]$ имеем

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, g(x)\, dx = S_n^{(1)} + S_n^{(2)},$$

где $S_n^{(1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(x_i))\, g(x)\, dx$, $S_n^{(2)} = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\, dx$.

Принимая во внимание ограниченность функции g, а также неравенство $|f(x) - f(x_i)| \leqslant \omega_i$, где ω_i — колебание функции f на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$, получим оценку

$$|S_n^{(1)}| \leqslant c \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i,$$

где $c = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \{|g(x)|\}$. Из условия $f \in R[a, b]$ следует, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \Pi : \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \dfrac{\varepsilon}{c}$, в силу чего для такого разбиения Π справедлива оценка

$$|S_n^{(1)}| < \varepsilon. \tag{3}$$

Введем в рассмотрение функцию $G : x \mapsto \int\limits_a^x g(t)\, dt$, $a \leqslant x \leqslant b$.

Согласно теореме 1, п. 3.2, она непрерывна на сегменте $[a, b]$. Кроме того $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\, dx = G(x_{i+1}) - G(x_i)$. Обозначим $G(x_i) = G_i$, $f(x_i) = f_i$. После элементарных преобразований получим

$$S_n^{(2)} = \sum_{i=0}^{n-1} f_i (G_{i+1} - G_i) = \sum_{i=1}^{n-1} G_i (f_{i-1} - f_i) + f_{n-1} G_n, \tag{4}$$

где $G_0 = G(a) = 0$, $f_0 = f(a)$, $G_n = G(b)$.

Пусть $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} G(x)$, $m = \min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} G(x)$. Используя неравенства $f_{i-1} - f_i \geqslant 0$, $i = \overline{1, n-1}$, $f_{n-1} \geqslant 0$, получим оценку

$$mf(a) \leqslant S_n^{(2)} \leqslant M(f(a) - f_1 + f_1 - \cdots - f_{n-1} + f_{n-1}) = Mf(a). \tag{5}$$

Принимая во внимание оценки для $S_n^{(1)}$ и $S_n^{(2)}$, получаем при $d(\Pi) < \delta$ неравенства

$$m - \frac{\varepsilon}{f(a)} \leqslant \frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leqslant M + \frac{\varepsilon}{f(a)}.$$

Из этих неравенств в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что

$$m \leqslant \frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leqslant M.$$

Так как $G \in C[a, b]$, то $\exists\, \xi \in [a, b] : G(\xi) = \frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$, т. е.

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(a)\, G(\xi) = f(a) \int_a^\xi g(x)\, dx. \blacktriangleright$$

Следствие. *Если f монотонна на $[a, b]$ и $g \in R[a, b]$, то $\exists\, \xi \in [a, b]$ такое, что*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(a) \int_a^\xi g(x)\, dx + f(b) \int_\xi^b g(x)\, dx. \tag{6}$$

◀ Пусть, например, f возрастает на $[a, b]$. Тогда функции $\varphi = f(b) - f$ (или $\varphi = f - f(a)$) и g удовлетворяют условиям 1) (или 2)) теоремы, в силу чего $\exists\, \xi \in [a, b]$ такое, что $\int_a^b \varphi(x)\, g(x)\, dx = \varphi(a) \times$

$\times \int_a^\xi g(x)\, dx.$

Так как $\varphi(a) = f(b) - f(a)$, то полученное равенство приобретает вид

$$f(b) \int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(b) \int_a^\xi g(x)\, dx - f(a) \int_a^\xi g(x)\, dx,$$

или

$$f(b) \left(\int_a^b g(x)\, dx - \int_a^\xi g(x)\, dx \right) + f(a) \int_a^\xi g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

По теореме 6, п. 2.1, $\int_a^b g(x)\, dx = \int_a^\xi g(x)\, dx + \int_\xi^b g(x)\, dx$, следовательно,

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(a) \int_a^\xi g(x)\, dx + f(b) \int_\xi^b g(x)\, dx.$$

Если функция f убывает на сегменте $[a, b]$, то образовав функцию $\psi = f(a) - f$ (или функцию $\psi = f - f(b)$) и применив к функции ψg формулу (2) (или формулу (1)), получим (6). ▶

3.4. Интеграл как сложная функция верхнего предела. Пусть $f : \overline{\mathcal{I}} \to \mathbb{R}$, $\overline{\mathcal{I}} = [a, b]$, $f \in C[a, b]$; $\varphi : \overline{\mathcal{I}}_1 \to \mathbb{R}$, $\overline{\mathcal{I}}_1 = [\alpha, \beta]$, причем $\varphi \in C[\alpha, \beta]$, $\varphi(\overline{\mathcal{I}}_1) \subset \overline{\mathcal{I}}$ и функция φ дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ в каждой точке сегмента $[\alpha, \beta]$, за исключением, быть может, не более чем счетного множества точек. Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(x) = \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(t)\, dt, \quad x \in \overline{\mathcal{I}}_1, \quad \varphi(x_0) = t_0, \quad t_0 \in \overline{\mathcal{I}},$$

которую можна рассматривать как композицию $\Phi = F \circ \varphi$, где $F(t) = \int_{t_0}^{t} f(y)\, dy$ — дифференцируемая на сегменте $\overline{\mathcal{I}}$ функция. Согласно теореме о производной сложной функции, производная Φ' существует на $\overline{\mathcal{I}}_1$ всюду, за исключением не более чем счетного множества точек, причем $\Phi'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x)$ в точках существования. Так как $F'(\varphi(x)) = f(\varphi(x))$, то $\Phi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$ в точках существования φ'. Если $\psi : \overline{\mathcal{I}}_1 \to \mathbb{R}$, $\psi(\overline{\mathcal{I}}_1) \subset \overline{\mathcal{I}}$ и функция ψ дифференцируема на сегменте $\overline{\mathcal{I}}_1$ всюду, за исключением, быть может, не более чем счетного множества точек, то можно образовать сложную функцию $\Psi(x) = \int_{\psi(x)}^{\psi(x_0)} f(t)\, dt$, $x \in \overline{\mathcal{I}}_1$, $\psi(x_0) = t_0$, причем производная Ψ' существует в каждой точке сегмента $\overline{\mathcal{I}}_1$, за исключением не более чем счетной его части, и при этом в точках существования имеем

$$\Psi'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\int_{\psi(x_0)}^{\psi(x)} f(t)\, dt\right) = -f(\psi(x))\psi'(x).$$

Таким образом, в общем случае, когда f, φ и ψ удовлетворяют всем перечисленным выше условиям, справедлива формула

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\, dt = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x) \qquad (1)$$

в тех точках сегмента $\overline{\mathcal{I}}_1$, в которых производные φ' и ψ' существуют.

3.5. Замена переменной в интеграле Римана.

Теорема. *Пусть*: 1) $f : \overline{\mathcal{I}} \to \mathbb{R}$, $\overline{\mathcal{I}} = [a, b]$, $f \in C[a, b]$;

2) $\varphi : \overline{\mathcal{I}}_1 \to \mathbb{R}$, $\overline{\mathcal{I}}_1 = [\alpha, \beta]$, $\varphi \in C[\alpha, \beta]$, $\varphi(\overline{\mathcal{I}}_1) \subset \overline{\mathcal{I}}$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;

3) φ' *существует на* $\overline{\mathcal{I}}_1$ *всюду, за исключением, быть может, не более чем счетного множества точек и* $\varphi' \in R[\alpha, \beta]$.

Тогда справедлива формула замены переменной

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt, \qquad (1)$$

где символом φ' *обозначена производная функции* φ *в тех точках сегмента* $\overline{\mathcal{I}}_1$, *где она существует.*

◀ Если F — точная первообразная функции f на $\overline{\mathcal{J}}$, то функция $\Phi : \overline{\mathcal{J}}_1 \to \mathbb{R}$, где $\Phi = F \circ \varphi$ — первообразная функции $t \to f(\varphi(t))\varphi'(t)$, поскольку $(F(\varphi(t)))'_t = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $\overline{\mathcal{J}}_1$ (см. формула (1), п. 3.4), в силу чего имеем

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \blacktriangleright$$

3.6. Формула интегрирования по частям.

Теорема 1. *Пусть* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f, g \in C[a, b]$, *причем функции* f *и* g *дифференцируемы в каждой точке сегмента* $[a, b]$, *за исключением, быть может, не более чем счетного множества точек и* $f', g' \in R[a, b]$, *где символами* f' *и* g' *обозначены производные функций* f *и* g *в точках их существования. Тогда справедлива формула интегрирования по частям*

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,f'(x)\,dx. \qquad (1)$$

◀ Так как функция fg дифференцируема во всех точках дополнения к $[a, b]$ некоторого не более чем счетного множества точек, то на этом дополнении имеем

$$(fg)'(x) = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x),$$

в силу чего функция $(fg)'$ интегрируема, причем

$$\int_a^b (f(x)g(x))'\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b,$$

так как непрерывная функция fg удовлетворяет определению первообразной функции для $(fg)'$. Таким образом,

$$\int_a^b (f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x))\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b,$$

откуда следует формула (1). ▶

§ 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ, КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ

При определении интеграла Римана вектор-функции и функциональной матрицы основополагающим является их принадлежность к векторным пространствам над полем $\mathbb{R}$, являющихся банаховыми пространствами. В этих пространствах определены операции сложения, умножения на действительные числа и предельного перехода, а их полнота позволяет с помощью критерия Коши судить о существовании предела, не зная его заранее.

4.1. Интеграл Римана вектор-функции. Пусть $\boldsymbol{f}: [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — вектор-функция с компонентами f_j, $j = \overline{1, m}$, являющимися ограниченными на сегменте $[a, b]$ функциями. Рассмотрим произвольное разбиение Π сегмента $[a, b]$ и образуем при любом выборе точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ сумму $S_\Pi(\boldsymbol{f}) = \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{f}(\xi_i)\,\Delta x_i$, которую будем называть *интегральной суммой* для вектор-функции $\boldsymbol{f}$ на сегменте $[a, b]$. Определение интегральной суммы корректно, так как в пространстве $\mathbb{R}^m$ определено сложение его элементов, причем $S_\Pi(\boldsymbol{f})$ имеет вид

$$S_\Pi(\boldsymbol{f}) = (S_\Pi(f_1),\ S_\Pi(f_2),\ \ldots,\ S_\Pi(f_m)), \tag{1}$$

где $S_\Pi(f_j) = \sum_{i=0}^{n-1} f_j(\xi_i)\,\Delta x_i$ — интегральные суммы для функций f_j, $j = \overline{1, m}$. Полагаем $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(\boldsymbol{f}) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{I}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 : \forall \Pi \wedge d(\Pi) < \delta \Rightarrow |S_\Pi(\boldsymbol{f}) - \boldsymbol{I}| < \varepsilon$.

Определение. *Определенным интегралом вектор-функции $\boldsymbol{f}$ называется предел* $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{I}$, *если он существует.*

Если вектор-функция $\boldsymbol{f}$ имеет определенный интеграл на сегменте $[a, b]$, то будем ее называть *интегрируемой по Риману* на этом сегменте, а ее интеграл обозначать $\int_a^b \boldsymbol{f}(x)\,dx$. Множество всех интегрируемых на сегменте $[a, b]$ вектор-функций $\boldsymbol{f}$ будем обозначать $\boldsymbol{f} \in R[a, b]$.

Из неравенств $|S_\Pi(f_j) - I_j| \leqslant |S_\Pi(\boldsymbol{f}) - \boldsymbol{I}|$ и $|S_\Pi(\boldsymbol{f}) - \boldsymbol{I}| \leqslant \sum_{j=1}^{m} |S_\Pi(f_j) - I_j|$ следует, что

$$\exists \lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(\boldsymbol{f}) \Leftrightarrow \left(\exists \lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f_1),\ \exists \lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f_2),\ \ldots,\ \exists \lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f_m)\right).$$

Следовательно, вектор-функция $\boldsymbol{f}$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ тогда и только тогда, когда каждая ее компонента f_j, $j = \overline{1, m}$, интегрируема на этом сегменте. Таким образом, если $\boldsymbol{f} \in R[a, b]$, то

$$\int_a^b \boldsymbol{f}(x)\,dx = \left(\int_a^b f_1(x)\,dx,\ \int_a^b f_2(x)\,dx,\ \ldots,\ \int_a^b f_m(x)\,dx\right).$$

Для интегралов вектор-функций выполняются теоремы 1, 2, 5, 6, п. 2.1, теорема 3, п. 2.2, и теоремы 1, 2, 3, п. 3.2, поскольку они справедливы для ее компонент. В частности, при выполнении условий теоремы 3, п. 3.2, для функций f_j, $j = \overline{1, m}$, формула Ньютона — Лейбница для вектор-функции $\boldsymbol{f}: [a, b] \to \mathbb{R}^m$ имеет вид

$$\int_a^b \boldsymbol{f}(x)\,dx = \boldsymbol{F}(x)\Big|_a^b,$$

где $\boldsymbol{F}$ — произвольная первообразная $\boldsymbol{f}$.

Теорема, аналогичная теореме 3, п. 2.1, требует доказательства.

Теорема. *Пусть* $f: [a, b] \to \mathbb{R}^m$ *и* $f \in R[a, b]$. *Тогда* $|f| \in R[a, b]$, *и при этом*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx. \tag{3}$$

◀ Так как каждая компонента f_j, $j = \overline{1, m}$, вектор-функции f интегрируема на сегменте $[a, b]$, то интегрируемыми будут и функции $|f_i|$ (теорема 3, п. 2.1). Из неравенств

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant m} |f_j| \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^m f_j^2} \leqslant \sum_{j=1}^m |f_j|$$

следует интегрируемость каждой из трех норм вектор-функции f, введенных в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Переходя к пределу при $d(\Pi) \to 0$ в неравенстве $|S_\Pi(f)| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)|\, \Delta x_i$, получим неравенство $\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx$. ▶

Поскольку интегрирование вектор-функции $f \in \mathbb{R}^m$ сводится к интегрированию m числовых функций, то замена переменной в $\int_a^b f(x)\, dx$ сводится к замене переменной в каждом из $\int_a^b f_j(x)\, dx$, $j = \overline{1, m}$.

Считая выполненными все условия пункта 2.5, гл. 5, для вектор-функций $f: [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $g: [a, b] \to \mathbb{R}^m$ приведем здесь формулы интегрирования по частям для скалярного и векторного произведения этих функций:

$$\int_a^b (f(x), g'(x))\, dx = (f(x), g(x))\Big|_a^b - \int_a^b (f'(x), g(x))\, dx,$$

$$\int_a^b [f(x), g'(x)]\, dx = [f(x), g(x)]\Big|_a^b - \int_a^b [f'(x), g(x)]\, dx.$$

4.2. Интеграл Римана комплекснозначной функции.

Определение. *Для функции* $f: [a, b] \to \mathbb{C}$, *где* $f(x) = u(x) + iv(x)$, *образуем при произвольном разбиении* Π *сегмента* $[a, b]$ *и произвольном выборе точек* $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$ *интегральную сумму* $S_\Pi(f) = \sum_{j=0}^{n-1} u(\xi_j)\, \Delta x_j + i \sum_{j=0}^{n-1} v(\xi_j)\, \Delta x_j$. *Тогда*

$$\int_a^b f(x)\, dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{d(\Pi) \to 0} S_\Pi(f),$$

если предел в правой части этого соотношения существует.

Класс интегрируемых по Риману комплекснозначных функций f будем обозначать $f \in R[a, b]$.

Если $\exists \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(u) = I_1 \wedge \exists \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(v) = I_2$, то из неравенства $|S_\Pi(f) - (I_1 + iI_2)| \leqslant |S_\Pi(u) - I_1| + |S_\Pi(v) - I_2|$ следует, что $\exists \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f) = I_1 + iI_2$. Если же $\exists \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f) = I_1 + iI_2$, то из неравенств $|S_\Pi(u) - I_1| \leqslant |S_\Pi(f) - (I_1 + iI_2)|$, $|S_\Pi(v) - I_2| \leqslant |S_\Pi(f) - (I_1 + iI_2)|$ следует, что $\exists \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(u) = I_1 \wedge \exists \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(v) = I_2$. Поэтому функция f интегрируема по Риману на сегменте $[a, b]$ тогда и только тогда, когда $u \in R[a, b]$, $v \in R[a, b]$, и при этом

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx.$$

Таким образом, вычисление интеграла комплекснозначной функции сводится к вычислению интегралов числовых функций u и v.

Интеграл комплекснозначной функции f можно вычислить с помощью формулы Ньютона — Лейбница, если известны любые первообразные U и V функций u и v:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (U(x) + iV(x))\Big|_a^b.$$

Если комплекснозначная функция f интегрируема на сегменте $[a, b]$, то и комплексно-сопряженная ей функция $\bar{f}$ интегрируема на этом сегменте. Тогда и произведение $f\bar{f} = |f|^2$ является интегрируемой числовой функцией, причем

$$\int_a^b f(x)\,\bar{f}(x)\,dx = \int_a^b (u^2(x) + v^2(x))\,dx.$$

В заключение отметим, что интегрирование вектор-функций с комплекснозначными компонентами сводится к интегрированию двух вектор-функций с компонентами, принимающими значения в $\mathbb{R}$.

4.3. Интеграл Римана функциональной матрицы. Если $x \mapsto A(x)$, $A(x) = (a_{ij}(x))$, $a \leqslant x \leqslant b$,— функциональная матрица размера $m \times n$, элементами которой являются ограниченные на сегменте $[a, b]$ функции, то она является элементом векторного пространства над полем $\mathbb{R}$, причем в этом пространстве определена интегральная сумма $S_\Pi(A) = (S_\Pi(a_{ij}))$, при произвольном разбиении Π сегмента $[a, b]$ и любом выборе точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Полагаем

$$\int_a^b A(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(A),$$

если этот предел существует. Рассматривая матрицу как mn-компонентный вектор, можем, согласно пункту 4.1, утверждать, что

$$\exists \lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(A) \Leftrightarrow \exists \lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(a_{ij}), \quad i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n},$$

причем $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(A) = (\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(a_{ij}))$. Следовательно, функциональная матрица A интегрируема на сегменте $[a, b]$ тогда и только тогда, когда на этом сегменте интегрируемы все ее элементы a_{ij}.

Таким образом, если матрица A интегрируема на сегменте $[a, b]$, то

$$\int_a^b A(x)\,dx = \left(\int_a^b a_{ij}(x)\,dx\right).$$

Класс всех интегрируемых на сегменте $[a, b]$ функциональных матриц A будем обозначать $A \in R[a, b]$.

§ 5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НА НЕКОМПАКТНОМ ПРОМЕЖУТКЕ

5.1. Несобственные (обобщенные) интегралы.

Определение 1. *Компактным промежутком будем называть всякий сегмент* $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Определение 2. *Пусть* $\mathcal{J} = [a, b[$ *— полуинтервал числовой прямой* $\mathbb{R}$, *причем* b *может быть символом* $+\infty$, *а функция* $f: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ *интегрируема на любом сегменте* $[a, b'] \subset \mathcal{J}$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b'\to b-0} \int_a^{b'} f(x)\,dx$, *то его обозначают символом* $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$, *если* $b \in \mathbb{R}$, *и символом* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, *если* $b = +\infty$. *В этом случае говорят, что функция* f *интегрируема в несобственном смысле на* $\mathcal{J}$, *а* $\lim\limits_{b'\to b-0} \int_a^{b'} f(x)\,dx$ *называют несобственным (или обобщенным) интегралом функции* f *на* $\mathcal{J}$ *(первого рода, если* $b = +\infty$, *второго рода, если* $b \in \mathbb{R}$).

Определение 3. *Если* $\mathcal{J} =]a, b]$, $f: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ *и если* $\lim\limits_{a'\to a+0} \int_{a'}^{b} f(x)\,dx$ *существует и конечен, то будем его обозначать символом* $\int_{a+0}^{b} f(x)\,dx$, *если* $a \in \mathbb{R}$, *или символом* $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, *если* $a = -\infty$.

Определение 4. *Если* $\lim\limits_{b'\to b-0} \int_a^{b'} f(x)\,dx = \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ *существует, то обобщенный интеграл* $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$, *или* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится (существует); если же этот предел не существует (или бесконечный), то*

говорят, что интеграл $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$, *или* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится (соответственно расходится к* ∞*).*

Если $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и b — устранимая особая точка функции $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, или ее существенно особая точка, в любой окрестности которой f ограничена, то интеграл функции f на полуинтервале $[a, b[$ совпадает с интегралом Римана функции, определенной не во всех точках сегмента $[a, b]$ (см. определение 3, п. 1.5). То же самое можно сказать и в случае, когда a — особая точка того же типа. Поэтому в дальнейшем считаем, что точка b в определении 2 (точка a в определении 3) является полюсом функции f или ее существенно особой точкой, в любой окрестности которой f не ограничена. Символы $+\infty$ и $-\infty$ всегда считаются особыми точками.

Перейдем теперь к вопросу о необходимом и достаточном условии существования несобственных интегралов.

Пусть $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, $x \in \mathcal{J}$. Тогда вопрос сходимости несобственного интеграла сводится к вопросу существования конечного предела функции F при $x \to b - 0$, когда $b \in \mathbb{R}$, и $x \to +\infty$, когда $b = +\infty$.

Этот конечный предел существует тогда и только тогда, когда функция F удовлетворяет условиям Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x_1,\ x_2 \in \mathcal{J} \wedge 0 < b - x_1 < \delta \wedge 0 < b - x_2 < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |F(x_1) - F(x_2)| < \varepsilon, \quad b \in \mathbb{R};$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 : \forall x_1,\ x_2 \in \mathcal{J} \wedge x_1 > \Delta \wedge x_2 > \Delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |F(x_1) - F(x_2)| < \varepsilon,$$

если $b = +\infty$.

И в этом и в другом случаях имеем $|F(x_1) - F(x_2)| = \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right|$. Принимая это во внимание, сформулируем критерий сходимости несобственного интеграла.

Теорема (критерий Коши). *Интеграл* $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \to 0 \quad \textit{при} \quad x_1 \to b - 0,\ x_2 \to b - 0.$$

5.2. Абсолютная сходимость. Предположим, что функция f непрерывна в каждой точке полуинтервала $\mathcal{J}$, за исключением множества точек лебеговой меры 0. Применив теорему 3, п. 2.2, получим

$$\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx,\ x_1 < x_2,\ [x_1, x_2] \subset \mathcal{J}. \tag{1}$$

Теорема. *Если* $\int\limits_a^{b-0} |f(x)|\,dx$ *сходится, то и* $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ *также сходится.*

◀ Утверждение теоремы следует из неравенства (1). ▶

Определение. *Если интеграл* $\int\limits_a^{b-0} |f(x)|\,dx$ *сходится, то говорят, что интеграл* $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ *абсолютно сходится.*

Таким образом, если говорят, что $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ абсолютно сходится, то здесь также содержится утверждение о том, что он сходится.

Если $f:[a, b[\to\mathbb{R}$ — неотрицательная функция, то сходимость $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$, очевидно, означает его абсолютную сходимость.

Пусть $f(x)\geqslant 0\ \forall x\in[a, b[$. Тогда функция $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$, $a\leqslant x<b$, возрастает вместе с x. Очевидно, $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ существует тогда и только тогда, когда множество $\left\{\int\limits_a^x f(t)\,dt\right\}$ ограничено сверху на полуинтервале $[a, b[$. Если же $f(x)\geqslant 0\ \forall x\in[a, b[$ и интеграл $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ не является сходящимся, то $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx=+\infty$.

Если интеграл $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ сходится, то будем писать $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx<\infty$.

Пусть $f:]a, b]\to\mathbb{R}$, $f(x)\geqslant 0\ \forall x\in]a, b]$, $F(x)=\int\limits_x^b f(t)\,dt$, $a<x\leqslant b$. Функция F убывает с возрастанием x, т. е. $F(x)-F(x_1)=\int\limits_x^{x_1} f(t)\,dt\geqslant 0$, если $x<x_1$, и F возрастает при $x\to a+0$. Поэтому $\int\limits_{a+0}^b f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда множество $\left\{\int\limits_x^b f(t)\,dt\right\}$ ограничено сверху на полуинтервале $]a, b]$.

Отметим существенное различие между интегралом Римана и несобственным интегралом: если $f\in R[a, b]$, то $|f|\in R[a, b]$, в то время как из существования $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ не следует, вообще говоря,

существование $\int_a^{b-0} |f(x)|dx$. Например, $\int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]}dx < \infty$, так как $\forall x \in]a, +\infty[$ всегда найдется пара чисел $\sqrt{n}$ и $\sqrt{n+1}$, таких, что, $\sqrt{n} \leqslant x < \sqrt{n+1}$, а интеграл $F(x) = \int_0^x (-1)^{[t^2]}\,dt$ допускает представление $F(x) = S_n + r_n(x)$, где $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}} (-1)^{[x^2]}dx =$

$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$, $r_n(x) = \int_{\sqrt{n}}^{x} (-1)^n\,dt$, причем $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = I$, $I \in \mathbb{R}$,

а $|r_n(x)| < \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} dx = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$. Однако $\int_0^{+\infty} |(-1)^{[x^2]}|\,dx = +\infty$.

Всякий сходящийся несобственный интеграл, но абсолютно расходящийся, называется *условно сходящимся*.

Полезно отметить связь между несобственными интегралами и рядами.

Если $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx < \infty$, то для любой последовательности $x_n \to +\infty$ последовательность $y_n = \int_a^{x_n} f(x)\,dx$ имеет конечный предел. Из тождества

$$y_n = y_1 + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1}) =$$

$$= \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

и предельного соотношения $\lim_{n\to\infty} y_n = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ получаем представление сходящегося несобственного интеграла числовым рядом

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,dx, \quad x_0 = a. \tag{2}$$

Если известно, что при любом выборе последовательности $x_n \to +\infty$ числовой ряд в правой части равенства (2) сходится, то это означает сходимость несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Следовательно, несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда при любом выборе последовательности $x_n \to +\infty$

числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,dx, \quad x_0 = a, \tag{3}$$

сходится.

В частном случае, когда $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a, +\infty[$, для существования интеграла достаточно сходимости ряда (3) при одном частном выборе последовательности x_n, поскольку возрастающая функция $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$, $a \leqslant x < +\infty$, будет ограничена сверху суммой этого ряда.

Предлагаем самостоятельно рассмотреть несобственные интегралы вектор-функций и функциональных матриц.

5.3. Алгебраические свойства несобственных интегралов. Пусть $f: [a, b[\to \mathbb{R}$ и сужение функции f на любой сегмент $[a, b'] \subset [a, b[$ интегрируемо по Риману на нем. Тогда функции αf, $\alpha = \text{const}$, интегрируема на $[a, b']$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Следовательно, если $\exists \int_a^{b-0} f(x)\,dx = \lim\limits_{x \to b-0} \int_a^x f(t)\,dt$, то $\exists \int_a^{b-0} \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^{b-0} f(x)\,dx$.

Пусть $f: [a, b[\to \mathbb{R}$, $g: [a, b[\to \mathbb{R}$ — функции, сужения которых на любой сегмент $[a, b'] \subset [a, b[$ интегрируемы по Риману. Тогда этим же свойством обладает и сумма $f + g$, следовательно, если существуют интегралы $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ и $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$, то

$$\lim_{x \to b-0} \int_a^x (f(t) + g(t))\,dt = \lim_{x \to b-0} \int_a^x f(t)\,dt + \lim_{x \to b-0} \int_a^x g(t)\,dt,$$

в силу чего $\int_a^{b-0} (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^{b-0} f(x)\,dx + \int_a^{b-0} g(x)\,dx$.

Таким образом, множество E функций $f: [a, b[\to \mathbb{R}$, интегрируемых по Риману на всяком содержащемся в $[a, b[$ сегменте и имеющих сходящиеся интегралы $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$, образует векторное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Отображение $f \mapsto \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ пространства E в $\mathbb{R}$ есть линейная форма.

5.4. Замена переменной в несобственном интеграле.

Теорема. *Пусть* $f:[a, b[\to\mathbb{R}$, $f\in C[a, b[$, *и интеграл* $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ *существует. Пусть* $[\alpha, \beta[$ *— другой полуинтервал из* $\mathbb{R}$, *причем* $\alpha\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$ (β *и* b *могут быть как конечными, так и бесконечными) и функция* $g:[\alpha, \beta[\to\mathbb{R}$ *возрастает на полуинтервале* $[\alpha, \beta[$, *имеет на* $[\alpha, \beta[$ *непрерывную производную* g' *за исключением счетного множества точек, причем* $g([\alpha, \beta[)\subset[a, b[$, $g(\alpha)=a$, $g(\beta-0)=b-0$.

Тогда справедлива формула замены переменной в несобственном интеграле

$$\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx=\int\limits_\alpha^{\beta-0} f(g(u))\,g'(u)\,du. \tag{1}$$

◀ Так как функция g возрастает на $[\alpha, \beta[$, то $g'(x)\geqslant 0$ в точках существования. Согласно формуле (1), п. 3.5, можем записать равенство

$$\int\limits_{g(\alpha)}^{g(t)} f(x)\,dx=\int\limits_\alpha^t f(g(u))\,g'(u)\,du$$

и перейти в нем к пределу при $t\to\beta-0$. При этом получим формулу (1). ▶

Заметим, что замена переменной в абсолютно сходящемся интеграле приводит к абсолютно сходящемуся интегралу.

◀ Пусть $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ сходится абсолютно и $g:[\alpha, \beta[\to\mathbb{R}$ — непрерывная возрастающая функция, имеющая непрерывную производную $g'(x)\geqslant 0$, причем $g([\alpha, \beta[)\subset[a, b[$. Тогда получаем

$$\int\limits_a^{b-0}|f(x)|\,dx=\int\limits_\alpha^{\beta-0}|f(g(u))|\,g'(u)\,du=\int\limits_\alpha^{\beta-0}|f(g(u))\,g'(u)|\,du<\infty. \blacktriangleright$$

5.5. Интегрирование по частям. Пусть $f:[a, b[\to\mathbb{R}$, $g:[a, b[\to\mathbb{R}$, $f, g\in C^{(1)}[a, b]$ и a — конечное число. Тогда, применив формулу интегрирования по частям на сегменте $[a, x]\subset[a, b[$, получим

$$\int\limits_a^x f(t)\,g'(t)\,dt=f(x)\,g(x)-f(a)\,g(a)-\int\limits_a^x f'(t)\,g(t)\,dt. \tag{1}$$

Если при $x\to b-0$ любые два из трех членов равенства (1) имеют конечный предел, то и третий член имеет конечный предел, поскольку произведение $f(a)\,g(a)$ определено. Если, например, существуют интегралы $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,g'(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{b-0} f'(x)\,g(x)\,dx$, то существует произведение $f(b-0)\,g(b-0)$. Если же существует $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,g'(x)\,dx$ и произ-

ведение $f(b-0)\,g(b-0)$, то существует и $\int\limits_a^{b-0} f'(x)\,g(x)\,dx$. В каждом из рассмотренных случаев имеем

$$\int\limits_a^{b-0} f(x)\,g'(x)\,dx = f(b-0)\,g(b-0) - f(a)\,g(a) - \int\limits_a^{b-0} f'(x)\,g(x)\,dx. \quad (2)$$

Формула (2) называется *формулой интегрирования по частям* несобственных интегралов.

Отметим, что интегрирование по частям не сохраняет, вообще говоря, абсолютной сходимости. Рассмотрим для примера интеграл $I = \int\limits_{+0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ и исследуем его сначала на сходимость, представив в виде суммы:

$$I = \int\limits_{+0}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = I_1 + I_2.$$

Исследуем интегралы I_1 и I_2 в отдельности. Функция $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, $0 < x \leqslant \pi$, может быть непрерывно продолжена в точку $x = 0$, поэтому интеграл I_1 существует в собственном смысле.

Если $n\pi \leqslant x < (n+1)\,\pi$, то $n \to \infty$ при $x \to +\infty$. Из оценки $\left| \int\limits_x^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt \right| \leqslant \left| \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt \right| < \frac{2}{n\pi}$ следует, что

$$\int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{x \to +\infty} \int\limits_{\pi}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Для исследования интеграла I_2 представим его в виде числового ряда

$$I_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + k\pi}\,dt \quad (3)$$

(после замены $x - k\pi = t$ в каждом из интегралов, входящих в сумму ряда). Так как $\frac{\sin t}{t + k\pi} > 0$ при $0 < t < \pi$, то справедливы неравенства

$$\frac{\sin t}{(k+1)\,\pi} \leqslant \frac{\sin t}{t + k\pi} \leqslant \frac{\sin t}{k\pi}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi,$$

в силу которых получаем оценки $\frac{2}{(k+1)\,\pi} \leqslant \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + k\pi}\,dt \leqslant \frac{2}{k\pi}$, из которых следует, что модули членов знакочередующегося числового ряда в правой части равенства (3) монотонно стремятся к нулю при

$k \to \infty$. Согласно признаку Лейбница, этот ряд сходится, следовательно, I_2 — сходящийся интеграл.

Покажем теперь, что интеграл I сходится неабсолютно. Для этого достаточно показать, что интеграл I_2 сходится неабсолютно. Поскольку для частичной суммы s_n числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{t + k\pi}\, dt$$

выполняется оценка

$$s_n \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1},$$

то этот ряд расходится по признаку сравнения с гармоническим рядом, следовательно, и $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$ расходится.

Произведя в интеграле I замену $x = 2t$ и интегрируя затем по частям, получаем

$$I = \int_{+0}^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t}\, dt = \int_{+0}^{+\infty} \frac{d(\sin^2 t)}{t} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to +0 \\ y \to +\infty}} \left(\frac{\sin^2 t}{t} \Big|_x^y + \int_x^y \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt \right) = \int_{+0}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt = \tilde{I}.$$

Следовательно, интеграл $\tilde{I}$ сходится абсолютно, так как $\frac{\sin^2 t}{t^2} \geqslant 0$.

Получили равенство $I = \tilde{I}$. Но интеграл I сходится лишь условно.

5.6. Случай внутренней особой точки. Несобственные интегралы рассмотрены для случаев, когда особая точка функции являлась концом интервала.

Определение. *Пусть функция* $f : [a, b[\setminus \{c\} \to \mathbb{R}$, *где* $c \in]a, b[$, *имеет интегрируемые по Риману сужения на любые сегменты* $[a, a'] \subset [a, c[\cup]c', b] \subset]c, b]$. *Тогда полагаем*

$$\int_a^b f(x)\, dx \overset{\text{def}}{=} \int_a^{c-0} f(x)\, dx + \int_{c+0}^{b} f(x)\, dx, \qquad (1)$$

если каждый из интегралов, входящих в правую часть (1), *существует, и назовем несобственный интеграл* с х о д я щ и м с я. *Если же хотя бы один из этих интегралов не существует, то говорят, что несобственный интеграл* р а с х о д и т с я.

Например, $\int_{0,5}^{2} \frac{dx}{\ln x}$ расходится, так как из неравенства $\ln x < x$ —

-1, выполняющегося для $1<x<2$, следует, что

$$\int_x^2 \frac{dt}{\ln t} > \int_x^2 \frac{dt}{t-1} = \ln(t-1)\Big|_x^2 = \ln\frac{1}{x-1} \to +\infty, \text{ когда } x \to 1+0.$$

При рассмотрении несобственных интегралов часто интересуются лишь фактом их сходимости или расходимости, поэтому важно установить признаки, по которым можно судить о том, является ли данный интеграл сходящимся или расходящимся.

5.7. Признаки сравнения и признаки Абеля и Дирихле. Рассмотрим вначале два общих признака сравнения.

1) Пусть $f:[a, +\infty[\to \mathbb{R}$ — неотрицательная функция и $f \in R[a, x]$ $\forall x > a$. Согласно пункту 5.2 имеем

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty \Leftrightarrow \left(\text{множество } \left\{\int_a^x f(t)\,dt\right\} \text{ ограничено сверху}\right).$$

2) Если f и g — неотрицательные функции, определенные на полуинтервале $[a, +\infty[$, интегрируемые на любом сегменте $[a, x] \subset [a, +\infty[$ и $f(x) = O(g(x))$ при $x \to +\infty$, то из $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx < \infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx < \infty$. Если $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$, то $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty$.

◀ Утверждение следует из неравенств

$$0 \leqslant \int_a^x f(t)\,dt \leqslant C\int_a^x g\,x)\,dx, \quad x \to +\infty. \ ▶$$

Рассмотрим это на примерах:

$$\text{а)} \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{a^{\alpha-1}}\right), & \text{если } \alpha \neq 1, \\ \ln x - \ln a, & \text{если } \alpha = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Если $\alpha > 1$, то $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}$; если $\alpha \leqslant 1$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = +\infty$. Таким образом, $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} < \infty$ тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$.

$$\text{б)} \int_a^x \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(b-x)^{\alpha-1}}\right), & \text{если } \alpha \neq 1, \\ \ln\dfrac{b-a}{b-x}, & \text{если } \alpha = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Если $\alpha < 1$, то $\exists \lim\limits_{x \to b-0} \int\limits_a^x \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)(b-a)^{\alpha-1}}$, т. е. $\int\limits_a^{b-0} \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ сходится. Если $\alpha \geqslant 1$, то $\lim\limits_{x \to b-0} \int\limits_a^x \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = +\infty$, т. е. $\int\limits_a^{b-0} \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ расходится к $+\infty$. Таким образом, $\int\limits_a^{b-0} \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ сходится тогда и только тогда, когда $\alpha < 1$.

Рассмотренные примеры а) и б) служат основой для получения практических признаков абсолютной сходимости несобственных интегралов.

Рассмотрим практические признаки абсолютной сходимости интегралов.

Признак 1. *Пусть* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ — *интегрируемая на любом сегменте* $[a, x] \subset [a, +\infty[$ *функция, причем* $f(x) = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$, $x \to +\infty$. *Тогда* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx < \infty$, *если* $\alpha > 1$, и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится, если* $\alpha \leqslant 1$.

Признак 2. *Пусть* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ — *интегрируемая по Риману на любом сегменте* $[a, b'] \subset [a, b[$ *функция, причем* $f(x) = O\left(\frac{1}{(b-x)^\alpha}\right)$, $x \to b-0$. *Тогда* $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx < \infty$, *если* $\alpha < 1$, *и* $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ *расходится, если* $\alpha \geqslant 1$.

◀ Доказательство следует из общих признаков сравнения и решения примеров а), б). ▶

Пример 1. Исследовать на сходимость $\int\limits_{+0}^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$.

Здесь две особые точки: $x = 0$ и $x = +\infty$, поэтому представим интеграл в виде суммы интегралов второго и первого рода на полуинтервалах $]0, c[$ и $[c, +\infty[$, где $c > 0$ — любое число. Заметим, что при $p = q$ интеграл расходится, поскольку для сходимости интеграла одновременно должны выполняться неравенства $p < 1$ и $p > 1$. Пусть $p < q$. Тогда при $x \to +0$ имеем соотношение $\frac{1}{x^p + x^q} = O\left(\frac{1}{x^p}\right)$, а при $x \to +\infty$ соотношение $\frac{1}{x^p + x^q} = O\left(\frac{1}{x^q}\right)$, вследствие чего интеграл существует при одновременном выполнении неравенств $p < 1$, $q > 1$. Если $q < p$, то интеграл существует при одновременном выполнении неравенств $q < 1$, $p > 1$. Объединив эти два случая, видим, что интеграл существует, если $\min\{p, q\} < 1$, $\max\{p, q\} > 1$.

Пример 2. Исследовать на сходимость $\int\limits_{+0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx$.

Сравним подынтегральную функцию в правосторонней окрестности точки $x = 0$ с функцией $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$, где $0{,}5 < \alpha < 1$. Имеем

$$\lim_{x \to +0} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} : \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{x \to +0} \frac{\ln(\sin x)}{x^{\frac{1}{2} - \alpha}} = \lim_{x \to +0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) x^{-\alpha - \frac{1}{2}}} =$$

$$= \lim_{x \to +0} \frac{x^{\alpha + \frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \operatorname{tg} x} = \lim_{x \to +0} \frac{x^{\alpha + \frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) x} = 0,$$

так как $\alpha + \frac{1}{2} > 1$. Установлено, что при $x \to +0$ подынтегральная функция имеет порядок роста ниже, чем порядок роста функции $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$, интеграл которой $\int\limits_{+0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^\alpha}$ существует. Согласно признаку 2, исследуемый интеграл существует.

Теорема 1 (признак абсолютной сходимости). *Пусть* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ — *интегрируемая на любом сегменте* $[a, b'] \subset [a, b[$ *функция и* $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ — *неотрицательная функция, причем* $|f(x)| \leqslant g(x)$ $\forall x \geqslant x_0 > a$ *и* $\int\limits_a^{b-0} g(x)\,dx \left(\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx\right)$ *существует. Тогда* $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx\right)$ *сходится абсолютно.*

◀ Из сходимости $\int\limits_a^{b-0} g(x)\,dx$ следует, что для него выполнен критерий Коши сходимости. Для любой пары x_1, x_2 такой, что $x_0 < x_1 < b$, $x_0 < x_2 < b$, $x_1 < x_2$, $\int\limits_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx \leqslant \int\limits_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx$, и так как $\int\limits_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx \to$ $\to 0$ при $x_1 \to b - 0$, $x_2 \to b - 0$, то для $\int\limits_a^{b-0} |f(x)|\,dx \left(\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx\right)$ выполнен критерий Коши сходимости. ▶

Теорема 2 (признак Абеля). *Пусть* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx < \infty$, *а функция* g *монотонна и ограничена. Тогда* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx < \infty$.

◀ Рассмотрим $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,g(x)\,dx$, $x_1 > a$, $x_2 > a$, и применим к интегралу вторую теорему о среднем, все условия которой здесь выполнены.

Имеем

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,g(x)\,dx = g(x_1)\int_{x_1}^{\xi} f(x)\,dx + g(x_2)\int_{\xi}^{x_2} f(x)\,dx, \quad x_1 < \xi < x_2. \quad (4)$$

Из ограниченности функции g и выполнения критерия Коши сходимости для интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует, что выражение в правой части равенства (4) стремится к нулю при неограниченном возрастании x_1 и x_2. Следовательно, для рассматриваемого интеграла выполнен критерий Коши сходимости. ▶

Теорема 3 (признак Дирихле). *Пусть* $f:[a, +\infty[\to\mathbb{R}$, $g:[a, +\infty[\to\mathbb{R}$ *и функция* f *имеет ограниченную первообразную* $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$, $a \leqslant x < +\infty$, *а функция* g *монотонно стремится к нулю при* $x \to +\infty$. *Тогда* $\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx < \infty$.

◀ Для доказательства применим формулу (4). Выражение в правой ее части, в силу условий теоремы, стремится к нулю при неограниченном возрастании x_1 и x_2.

Для $\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$ выполнен критерий Коши существования. ▶

В качестве примера рассмотрим $\int_a^{+\infty} g(x)\sin kx dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)\cos kx dx$, где $g:[a, +\infty[\to\mathbb{R}$ — монотонно стремящаяся к нулю при $x \to +\infty$ функция, k — отличное от нуля целое число. Тогда, согласно признаку Дирихле, оба интеграла сходятся, так как функции

$$F(x) = \int_a^x \sin ktdt = \frac{\cos ak - \cos kx}{k}, \quad \Phi(x) = \int_a^x \cos ktdt = \frac{\sin kx - \sin ka}{k}$$

ограничены при $x > a$.

Отметим, что из существования $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ не следует, вообще говоря, что $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Например, функция $x \mapsto x\sin x^4$, $0 \leqslant x < +\infty$, не ограничена, однако $\int_0^{+\infty} x\sin x^4 dx$ существует, так как с помощью замены $x^4 = t$ приводится к интегралу $\frac{1}{4}\int_{+0}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$, сходящемуся по признаку Дирихле.

Если сходящийся интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ представить в виде ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$, то общий член этого ряда $a_k = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$ стремится к нулю с возрастанием x_k и x_{k+1}, согласно критерию Коши. Однако при этом не обязательно должно быть $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

5.8. Главное значение расходящегося несобственного интеграла. Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится. Если функция f интегрируема по Риману на всяком сегменте действительной прямой и если существует предел $\lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx$, то его называют *главным значением в смысле Коши* расходящегося интеграла и обозначают

$$\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx.$$

Пусть $f: [a, b[\setminus \{c\} \to \mathbb{R}$, $c \in]a, b[$, и $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ расходится. Если при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ существуют $\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{c+\varepsilon} f(x)\,dx$ и существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right) = \text{v. p.} \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

то его называют главным значением в смысле Коши расходящегося интеграла.

Пример 1. Вычислить v. p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$.

Согласно определению,

$$\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \lim_{A \to +\infty} \left(\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln (1+x^2) \right) \Big|_{-A}^{A} =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left(\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} (-A) + \frac{1}{2} \ln \frac{1+A^2}{1+A^2} \right) = 2 \lim_{A \to +\infty} \operatorname{arctg} A = \pi.$$

Пример 2. Вычислить v. p. $\int\limits_{0,5}^{2} \frac{dx}{x \ln x}$.

По определению

$$\text{v. p.} \int\limits_{0,5}^{2} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\varepsilon \to +0} (\ln |\ln x| \Big|_{0,5}^{1-\varepsilon} + \ln (\ln x) \Big|_{1+\varepsilon}^{2}) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \ln \left| \frac{\ln (1-\varepsilon)}{\ln (1+\varepsilon)} \right| = \lim_{\varepsilon \to +0} \ln \left| \frac{-\varepsilon}{\varepsilon} \right| = 0.$$

В заключение отметим, что если несобственный интеграл сходится, то его значение совпадает с v. p. $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \left(\text{v. p.} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx \right)$.

§ 6. ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

Класс функций, рассматриваемый ниже, играет важную роль в теории интеграла Стилтьеса, а также в некоторых приложениях.

Определение 1. *Пусть* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\Pi = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ — *произвольное разбиение сегмента* $[a, b]$, *в котором* $x_i < x_{i+1}$ *и*

$$\Delta f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i), \quad V_\Pi(f; a, b) = \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta f_i|.$$

Число $V_\Pi(f; a, b)$ *называется вариацией функции* f *при разбиении* Π *сегмента* $[a, b]$, *а число* $V(f; a, b) = \sup\limits_{\{\Pi\}} \{V_\Pi(f; a, b)\}$, *где точная верхняя грань берется по всем возможным разбиениям* Π *сегмента* $[a, b]$, *называется полной вариацией функции* f *на сегменте* $[a, b]$.

Если $V(f; a, b) < +\infty$, то говорят, что f — функция *ограниченной вариации.*

Определение 2. *Пусть* $\boldsymbol{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, Π — *произвольное разбиение сегмента* $[a, b]$ *на* n *частей,* $\Delta \boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{f}(x_{i+1}) - \boldsymbol{f}(x_i)$, $V_\Pi(\boldsymbol{f}; a, b) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} |\Delta \boldsymbol{f}_i|$. *Число* $V(\boldsymbol{f}; a, b) = \sup\limits_{\{\Pi\}} \{V_\Pi(\boldsymbol{f}; a, b)\}$, *где точная верхняя грань берется по всем возможным разбиениям сегмента* $[a, b]$, *называется полной вариацией вектор-функции* $\boldsymbol{f}$ *на сегменте* $[a, b]$.

Если $V(\boldsymbol{f}; a, b) < +\infty$, то говорят, что вектор-функция $\boldsymbol{f}$ — функция ограниченной вариации. В этом определении $|\Delta \boldsymbol{f}_i|$ — евклидова норма вектора $\Delta \boldsymbol{f}_i$.

Теорема 1. *Пусть* $\boldsymbol{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$. *Для того чтобы вектор-функция* $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ *была функцией ограниченной вариации на* $[a, b]$, *необходимо и достаточно, чтобы функции* f_j, $j = \overline{1, m}$, *имели ограниченную вариацию на этом сегменте.*

◀ *Необходимость.* Пусть f имеет ограниченную вариацию. Тогда из очевидных неравенств

$$|f_i(x_{i+1}) - f_i(x_i)| \leqslant |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |f_i(x_{i+1}) - f_i(x_i)|,$$

просуммировав по i от 0 до $n-1$, получим неравенства

$$V_{\Pi}(f_j;\ a, b) \leqslant V_{\Pi}(f;\ a, b) \leqslant \sum_{i=1}^{m} V_{\Pi}(f_i;\ a, b). \tag{1}$$

Перейдя в неравенстве $V_{\Pi}(f_j;\ a, b) \leqslant V_{\Pi}(f;\ a, b)$ к точным верхним граням, получим неравенство

$$V(f_j;\ a, b) \leqslant V(f;\ a, b) < +\infty, \quad j = \overline{1, m},$$

из которого следует, что все функции f_j имеют ограниченную вариацию.

Достаточность. Пусть каждая функция f_j имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$. Тогда, переходя к точным верхним граням в правой части неравенств (1), получим неравенство

$$V(f;\ a, b) \leqslant \sum_{i=1}^{m} V(f_i;\ a, b) < +\infty,$$

из которого следует, что вектор-функция f имеет ограниченную вариацию на сегменте $[a, b]$. ▶

Примером функции ограниченной вариации может служить монотонная на сегменте $[a, b]$ функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда

$$V_{\Pi}(f;\ a, b) = |f(b) - f(a)| \ \forall \Pi, \ V(f;\ a, b) = |f(b) - f(a)|.$$

Непрерывная на сегменте функция не обязательно имеет на нем ограниченную вариацию. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{\pi}{x}, & \text{если } 0 < x \leqslant 2, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

непрерывна на сегменте $[0, 2]$. Пусть $\Pi = \left\{0, \dfrac{2}{2n-1}, \dfrac{2}{2n-3}, \ \ldots \right.$ $\left. \ldots, \dfrac{2}{5}, \dfrac{2}{3}, 2\right\}$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \frac{2}{2n-1} + \left(\frac{2}{2n-3} + \frac{2}{2n-1}\right) + \ \cdots \ + \left(2 + \frac{2}{3}\right) >$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \ \cdots \ + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, C — постоянная Эйлера. Таким образом, $V_{\Pi}(f;\ 0, 2) \to +\infty$ при $n \to \infty$ и множество $\{V_{\Pi}(f;\ 0, 2)\}$ не ограничено сверху.

Вполне очевидно, что всякая функция ограниченной вариации является ограниченной функцией: если $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ имеет ограни-

ченную вариацию на $[a, b]$, то

$$|f(x) - f(a)| \leqslant V(f;\ a, b) \quad \forall x \in [a, b].$$

Теорема 2. *Если* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ — *функции ограниченной вариации на* $[a, b]$, *то* $f + g$ *и* fg *также функции ограниченной вариации на* $[a, b]$.

◀ При любом разбиении Π на n частей сегмента $[a, b]$ имеем неравенство

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\Delta f_i + \Delta g_i| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta f_i| + \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta g_i| \leqslant V(f;\ a, b) + V(g;\ a, b),$$

из которого следует, что

$$V(f + g;\ a, b) \leqslant V(f;\ a, b) + V(g;\ a, b),$$

т. е. $f + g$ — функция ограниченной вариации на $[a, b]$.

Рассмотрим тождество $\Delta(fg)_i = f_i \Delta g_i + g_{i+1} \Delta f_i$, где $f_i = f(x_i)$, $g_{i+1} = g(x_{i+1})$, $\Delta f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$, $\Delta g_i = g(x_{i+1}) - g(x_i)$. Так как функции f и g ограничены на $[a, b]$, то существуют постоянные c_j, $j = 1, 2$, такие, что

$$|g(x)| \leqslant c_1, \quad |f(x)| \leqslant c_2 \quad \forall x \in [a, b].$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\Delta(fg)_i| = \sum_{i=0}^{n-1} |f_i \Delta g_i + g_{i+1} \Delta f_i| \leqslant c_2 \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta g_i| +$$

$$+ c_1 \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta f_i| \leqslant c_2 V(g;\ a, b) + c_1 V(f;\ a, b),$$

$$V(fg;\ a, b) \leqslant c_1 V(f;\ a, b) + c_2 V(g;\ a, b),$$

так как $\sup\limits_{\{\Pi\}} \left\{ \sum\limits_{i=0}^{n-1} |\Delta(fg)_i| \right\} \leqslant c_1 V(f;\ a, b) + c_2 V(g;\ a, b)$.

Как видим, функция $\varphi = fg$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$. ▶

Следствие. *Если* f *и* g *монотонно возрастают на* $[a, b]$, *то* $f - g$ *есть функция ограниченной вариации на* $[a, b]$.

◀ Полагая $\varphi = -g$, получаем монотонно убывающую на $[a, b]$ функцию. Далее,

$$\sum_{i=1}^{n-1} |\Delta f_i + \Delta \varphi_i| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta f_i| + \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta \varphi_i| = \sum_{i=0}^{n-1} (f_{i+1} - f_i) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} (\varphi_i - \varphi_{i+1}) = f(b) - f(a) + \varphi(a) - \varphi(b) = f(b) + g(b) - f(a) -$$

$$- g(a) = V(f;\ a, b) + V(g;\ a, b),\ V(f - g;\ a, b) \leqslant V(f;\ a, b) +$$

$$+ V(g;\ a, b). \ ▶$$

Теорема 3. *Пусть* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — *функция ограниченной вариации. Тогда*: 1) $V(f;\ a, y) = V(f;\ a, x) + V(f;\ x, y)$, *если* $a \leqslant$

$\leqslant x \leqslant y \leqslant b$; 2) *функция* $V: x \mapsto V(f;\ a,\ x)$ *непрерывна на* $[a, b]$, *если* $f \in C[a, b]$.

◀ Докажем сначала равенство

$$V(f;\ a,\ y) = V(f;\ a,\ x) + V(f;\ x,\ y), \quad a \leqslant x \leqslant y \leqslant b. \tag{2}$$

Если $x = a$ или $y = x$, то равенство (2) очевидно, так как $V(f;\ x,\ x) = 0$. Пусть $a < x < y$ и задано $\varepsilon > 0$. Поскольку полная вариация V вектор-функции f на сегменте $[a, y]$ есть точная верхняя грань множества ее вариаций при всевозможных разбиениях $[a, y]$, то по свойству точной верхней грани $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \Pi$ такое, что

$$V(f;\ a,\ y) - \varepsilon < V_{\Pi}(f;\ a,\ y) \leqslant V(f;\ a,\ y). \tag{3}$$

Если точка x не вошла в разбиение Π, то рассмотрим его продолжение Π', включив в него точку x. Для разбиения Π' неравенства (3) сохраняются, так как с добавлением новых точек разбиения вариации V_{Π} возрастают. Тогда $\Pi' = \Pi_1 \cup \Pi_2$, где Π_1 — разбиение сегмента $[a, x]$, Π_2 — разбиение сегмента $[x, y]$, следовательно, $V_{\Pi'}(f;\ a,\ y) = V_{\Pi_1}(f;\ a,\ x) + V_{\Pi_2}(f;\ x,\ y)$. Из неравенств

$$V_{\Pi_1}(f;\ a,\ x) \leqslant V(f;\ a,\ y) - V_{\Pi_2}(f;\ x,\ y),$$

$$V_{\Pi_2}(f;\ x,\ y) \leqslant V(f;\ a,\ y) - V_{\Pi_1}(f;\ a,\ x),$$

и левой части неравенства (3) следуют неравенства

$$V(f;\ a,\ x) + V(f;\ x,\ y) \leqslant V(f;\ a,\ y) + (V(f;\ a,\ y) - V_{\Pi'}(f;\ a,\ y)) < V(f;\ a,\ y) + \varepsilon,$$

откуда получаем

$$V(f;\ a,\ y) - \varepsilon < V(f;\ a,\ x) + V(f;\ x,\ y) < V(f;\ a,\ y) + \varepsilon. \tag{4}$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ — произвольное, то

$$V(f;\ a,\ y) = V(f;\ a,\ x) + V(f;\ x,\ y).$$

Остается показать, что функция $x \mapsto V(f;\ a,\ x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, непрерывна на $[a, b]$, если $f \in C[a, b]$.

Пусть $x_0 \in]a,\ b[$ — произвольная точка. Из непрерывности вектор-функции f в точке x_0 следует, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0$ такое, что

$$\forall\ x \in S(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку $V(f;\ a,\ x_0) = \sup\limits_{\{\Pi\}} \{V_{\Pi}(f;\ a,\ x_0)\}$, то существует такое разбиение Π сегмента $[a, x_0]$, что

$$V_{\Pi}(f;\ a,\ x_0) > V(f;\ a,\ x_0) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Фиксируем окрестность $S(x_0, \delta)$. Если она не содержит точек разбиения Π, лежащих слева от точки x_0, то добавим к точкам этого разбиения произвольную точку $x' \in S(x_0, \delta) \wedge x' < x_0$. В результате получим новое разбиение Π' сегмента $[a, x_0]$, для которого

$$V_{\Pi'}(f;\ a,\ x_0) > V(f;\ a,\ x_0) - \frac{\varepsilon}{2}, \tag{6}$$

так как $V_{\Pi'}(f;\ a,\ x_0) \geqslant V_{\Pi}(f;\ a,\ x_0)$.

Если же разбиение П содержит точки, лежащие слева от точки x_0, то через x' обозначим конец интервала $]x', x_0[$, не содержащего точек разбиения П.

Образуем в каждом из упомянутых случаев соответственно разности

$$V_1' = V_{\Pi'}(f;\ a,\ x_0) - |f(x_0) - f(x')|,\ V_2' = V_{\Pi}(f;\ a,\ x_0) - |f(x_0) - f(x')|,$$

являющиеся вариациями вектор-функции f для некоторых разбиений сегмента $[a, x']$. В каждом из этих случаев имеем

$$V(f;\ a,\ x') \geqslant V_i',\quad i = 1, 2, \tag{7}$$

где $V(f;\ a,\ x')$ — полная вариация вектор-функции f на сегменте $[a, x']$.

Приняв во внимание неравенство (5), во втором случае получим

$$V(f;\ a,\ x') \geqslant V_2 > V(f;\ a,\ x_0) - \varepsilon, \tag{8}$$

а из неравенства (6) в первом случае следует неравенство

$$V(f;\ a,\ x') \geqslant V_1' > V(f;\ a,\ x_0) - \varepsilon. \tag{9}$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$V(f;\ a,\ x') > V(f;\ a,\ x_0) - \varepsilon \quad \forall\, x' \in S(x_0, \delta) \wedge x' < x_0, \tag{10}$$

в силу которого следует соотношение

$$\lim_{x' \to x_0 - 0} V(f;\ a,\ x') = V(f;\ a,\ x_0),$$

поскольку $x \mapsto V(f;\ a,\ x)$, $a \leqslant x \leqslant b$,— неубывающая на сегменте $[a, b]$ функция. Итак доказана непрерывность этой функции в точке x_0 слева. Ее непрерывность в этой точке справа доказывается аналогично. ▶

Теорема 4. *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации на $[a, b]$. Тогда существуют такие монотонно возрастающие функции $p : [a, b] \to \mathbb{R}$, $q : [a, b] \to \mathbb{R}$, что $p(a) = q(a) = 0$ и $\forall\, x \in [a, b]$ выполняются равенства*

$$f(x) - f(a) = p(x) - q(x), \tag{11}$$

$$V(f;\ a,\ x) = p(x) + q(x). \tag{12}$$

◀ Определим функции p и q с помощью равенств

$$2p(x) = V(f;\ a,\ x) + f(x) - f(a),\ 2q(x) = V(f;\ a,\ x) - f(x) + f(a). \tag{13}$$

Тогда $p(a) = q(a) = 0$ и выполнены равенства (11), (12). Пусть $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$. Используя равенство (2), получаем равенства

$$2p(y) - 2p(x) = V(f;\ x,\ y) + (f(y) - f(x)), \tag{14}$$

$$2q(y) - 2q(x) = V(f;\ x,\ y) - (f(y) - f(x)). \tag{15}$$

Из неравенства $|f(y) - f(x)| \leqslant V(f;\ x,\ y)$ и равенств (14), (15) сле-

дует, что p и q — монотонно возрастающие функции. Их соответственно называют *функциями положительной* и *отрицательной вариации* функции f. ▶

§ 7. ПРИЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКИ

7.1. Дуга и длина спрямляемой кривой. Дифференциал длины кривой. Согласно определению пункта 7.6, гл. 2, непрерывное отображение $\boldsymbol{f}: [a, b] \to \mathbb{R}^m$ называется *путем* в $\mathbb{R}^m$.

Определение 1. *Если непрерывное отображение* $\boldsymbol{f}: [a, b] \to \mathbb{R}^m$ *биективно, то путь будем называть д у г о й.*

Определение 2. *С л е д о м дуги* $\boldsymbol{f}: [a, b] \to \mathbb{R}^m$, *или кривой* γ, *называется образ сегмента* $[a, b]$ *при отображении* $\boldsymbol{f}$

$$\gamma = \{y \in \mathbb{R}^m : y_j = f_j(x),\ j = \overline{1, m},\ a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Определение 3. *Пусть* $\boldsymbol{f}$ *— дуга в пространстве* $\mathbb{R}^m$. *Если* $\boldsymbol{f}(a) = \boldsymbol{f}(b)$ *и* $\boldsymbol{f}(x_1) \neq \boldsymbol{f}(x_2)$ *для любой пары различных точек* x_1 *и* x_2 *из интервала* $]a, b[$, *то кривая* γ *называется п р о с т о й з а м к н у т о й к р и в о й.*

Определение 4. *Кривая* γ *с п р я м л я е м а, если вектор-функция* $\boldsymbol{f}$ *имеет ограниченную вариацию на сегменте* $[a, b]$, *а длиной кривой* γ *будем называть полную вариацию* $V(\boldsymbol{f}; a, b)$.

Теорема. *Если вектор-функция* $\boldsymbol{f}: [a, b] \to \mathbb{R}^m$ *непрерывно дифференцируема на сегменте* $[a, b]$, *то кривая* γ *спрямляема, а ее длина* l *вычисляется по формуле*

$$l = \int_a^b |\boldsymbol{f}'(x)|\, dx, \tag{1}$$

где $|\boldsymbol{f}'(x)| = \sqrt{(f_1'(x))^2 + (f_2'(x))^2 + \cdots + (f_m'(x))^2}$.

◀ Пусть $\Pi = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ — произвольное разбиение сегмента $[a, b]$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\boldsymbol{f}(x_{i+1}) - \boldsymbol{f}(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \boldsymbol{f}'(x)\, dx \right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\boldsymbol{f}'(x)|\, dx =$$

$$= \int_a^b |\boldsymbol{f}'(x)|\, dx, \tag{2}$$

откуда

$$V(\boldsymbol{f}; a, b) = \sup_{\{\Pi\}} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |\boldsymbol{f}(x_{i+1}) - \boldsymbol{f}(x_i)| \right\} \leqslant \int_a^b |\boldsymbol{f}'(x)|\, dx, \tag{3}$$

где точная верхняя грань берется по всем возможным разбиениям сегмента $[a, b]$.

Так как вектор-функция f' равномерно-непрерывна на сегменте $[a, b]$, то $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ такое, что

$$\forall\, x', x'' \in [a, b] \wedge |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f'(x') - f'(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Пусть Π — такое произвольное разбиение сегмента $[a, b]$, что $d(\Pi) < \delta$, и пусть $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$. Тогда $|f'(x)| - |f'(x_{i+1})| \leqslant |f'(x) - f'(x_{i+1})| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, откуда

$$|f'(x)| < |f'(x_{i+1})| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(x)|\,dx - \frac{\varepsilon \Delta x_i}{2(b-a)} < |f'(x_{i+1})|\,\Delta x_i =$$

$$= \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f'(x) - f'(x_{i+1}) - f'(x))\,dx \right| \leqslant \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x)\,dx \right| +$$

$$+ \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x_{i+1}) - f'(x))\,dx \right| \leqslant |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + \frac{\varepsilon \Delta x_i}{2(b-a)}.$$

Просуммировав эти неравенства по i от 0 до $n - 1$, получим неравенство

$$\int_a^a |f'(x)|\,dx \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |f'(x_{i+1}) - f'(x_i)| + \varepsilon \leqslant V(f;\ a, b) + \varepsilon. \qquad (4)$$

Так как $\varepsilon > 0$ — произвольное, то $\int_a^{\cdot} |f'(x)|\,dx \leqslant V(f;\ a, b)$. Сопоставляя это неравенство с неравенством (3), приходим к выводу, что

$$V(f;\ a, b) = \int_a^b |f'(x)|\,dx = l. \ \blacktriangleright$$

Введем понятие дифференциала длины кривой. Считаем, что все условия предыдущей теоремы выполнены. Тогда для всякого сужения вектор-функции f на сегмент $[a, x] \subset [a, b]$ длина дуги l является функцией переменной x, причем, согласно формуле (1), имеем

$$l(x) = \int_a^x |f'(t)|\,dt.$$

Из условий теоремы следует, что l — дифференцируемая функция, причем

$$\frac{dl}{dx} = |f'(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} f_i'^{\,2}(x)},$$

откуда $dl^2(x) = \sum_{i=1}^{m} (df_i(x))^2$.

Таким образом, согласно определению, $dl(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (df_j(x))^2}$ — дифференциал длины кривой.

Если кривая γ задана в виде

$$\gamma = \{y \in \mathbb{R}^m : y_j = f_j(l),\ 0 \leqslant l \leqslant L_0,\ j = \overline{1, m}\},$$

где l — ее длина, отсчитываемая от точки $f(a)$, то

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{df_j}{dl}\right)^2 = 1.$$

Рассмотрим частные реализации теоремы.

Если $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$, где φ и ψ — непрерывно дифференцируемые на сегменте $[\alpha, \beta]$ функции, то

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'(t^2) + \psi'(t)^2}\, dt. \tag{5}$$

Если $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x,\ y = f(x)\}$, где $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^{(1)}[a, b]$, то

$$l = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx. \tag{6}$$

Пример. Вычислить длину кривой, параметрические уравнения которой $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$.

Так как при возрастании t от 0 до $\frac{\pi}{2}$ подвижная точка $(x(t), y(t))$ пробегает всю кривую, то $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Далее, $x'(t) = -4\cos^3 t \sin t$, $y'(t) = 4\sin^3 t \cos t$, поэтому

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 2\sin^2 2t\,(1 + \cos^2 2t),$$

$$l = \sqrt{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sqrt{1 + \cos^2 2t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1 + \cos^2 2t}\, d(\cos 2t) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\cos 2t \sqrt{1 + \cos^2 2t} + \ln\left(\cos 2t + \sqrt{1 + \cos^2 2t}\right)\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} =$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

7.2. Площадь плоской фигуры. В курсе геометрии дано понятие площади элементарной геометрической фигуры, ограниченной отрезками прямых (прямоугольника, треугольника, многоугольника). Если же плоская фигура Φ (т. е. некоторое ограниченное связное множество точек плоскости, например область $D \subset \mathbb{R}^2$) ограничена кривыми,

не являющимися отрезками прямых, то для введения понятия площади будем исходить из следующей аксиоматической предпосылки: площадь (мера) плоской фигуры Φ, если она существует, есть число, не превосходящее площади S любой объемлющей фигуру Φ элементарной фигуры и не меньшее площади s любой объемлемой фигурой Φ элементарной фигуры.

Под площадью элементарной фигуры понимают неотрицательное число P, обладающее следующими основными свойствами:

а) *монотонность:* если Φ_1 и Φ_2 — две элементарные фигуры, причем Φ_1 целиком лежит в Φ_2, а S_{Φ_1} и S_{Φ_2} соответственно их площади, то

$$S_{\Phi_1} \leqslant S_{\Phi_2};$$

б) *аддитивность:* если Φ_1 и Φ_2 — две элементарные фигуры без общих внутренних точек, а $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, то

$$S_{\Phi} = S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2};$$

в) *инвариантность:* если элементарные фигуры Φ_1 и Φ_2 конгруэнтны, то

$$S_{\Phi_1} = S_{\Phi_2}.$$

Определение 1. *Элементарная фигура $\overline{\Phi}$ называется описанной вокруг плоской фигуры Φ, если фигуре $\overline{\Phi}$ и ее границе принадлежат все точки Φ вместе с ее границей.*

Определение 2. *Элементарная фигура $\underline{\Phi}$ называется вписанной в плоскую фигуру Φ, если фигуре Φ и ее границе принадлежат все точки фигуры $\underline{\Phi}$ вместе с ее границей.*

Пусть Φ — некоторая плоская фигура, $\{S_{\overline{\Phi}}\}$ — множество площадей всех описанных вокруг Φ элементарных фигур, $\{S_{\underline{\Phi}}\}$ — множество площадей всех вписанных в Φ элементарных фигур. Множество $\{S_{\overline{\Phi}}\}$ ограничено снизу числом нуль, а множество $\{S_{\underline{\Phi}}\}$ ограничено сверху произвольным элементом множества $\{S_{\overline{\Phi}}\}$, следовательно, существуют числа

$$\overline{P} = \inf_{\overline{\Phi} \supset \Phi} \{S_{\overline{\Phi}}\}, \quad \underline{P} = \sup_{\underline{\Phi} \subset \Phi} \{S_{\underline{\Phi}}\}.$$

Определение 3. *Числа $\overline{P}$ и $\underline{P}$ называются соответственно верхней и нижней площадями (мерами) фигуры Φ.*

Определение 4. *Если $\underline{P} = \overline{P}$, то фигура Φ называется квадрируемой, а ее площадью (мерой) P называется общее значение нижней и верхней площади.*

Теорема 1. *Фигура Φ квадрируема тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \overline{\Phi}, \underline{\Phi}$ такие, что*

$$S_{\overline{\Phi}} - S_{\underline{\Phi}} < \varepsilon. \tag{1}$$

◀ *Необходимость.* Пусть Φ квадрируема, а P — ее площадь. Тогда $\underline{P} = \overline{P} = P$ и из свойств точных граней имеем $\forall \varepsilon > 0$ $\exists S'_{\overline{\Phi}} \in \{S_{\overline{\Phi}}\} \wedge$

$\wedge\ \exists\, S''_{\underline{\Phi}} \in \{S_{\underline{\Phi}}\}$ такие, что

$$P \leqslant S'_{\overline{\Phi}} < P + \frac{\varepsilon}{2}, \quad P - \frac{\varepsilon}{2} < S''_{\underline{\Phi}} \leqslant P,$$

$$S'_{\overline{\Phi}} - S''_{\underline{\Phi}} < \varepsilon.$$

Достаточность. Если указанные в условии теоремы элементарные фигуры $\overline{\Phi}$ и Φ существуют, то из неравенств $S_{\underline{\Phi}} \leqslant \underline{P} \leqslant \overline{P} \leqslant S_{\overline{\Phi}}$ следует, что $\overline{P} - \underline{P} < \varepsilon$, т. е. $\underline{P} = \overline{P}$. ▶

Следствие. *Если $\forall \varepsilon > 0$ существует вписанная в фигуру Φ неэлементарная квадрируемая фигура Φ_1 и описанная вокруг Φ неэлементарная квадрируемая фигура Φ_2 такие, что $P_{\Phi_2} - P_{\Phi_1} < \varepsilon$, то фигура Φ квадрируема.*

Критерий квадрируемости плоской фигуры (теорема 1) можно сформулировать в несколько иной форме. Множество точек, принадлежащих фигуре $\overline{\Phi}$, но не принадлежащих Φ, есть в общем случае многоугольная фигура, содержащая границу фигуры Φ, а ее площадь равна разности $S_{\overline{\Phi}} - S_{\underline{\Phi}}$. Поэтому критерий квадрируемости означает, что фигура Φ квадрируема тогда и только тогда, когда ее граница может быть погружена в многоугольную фигуру, площадь которой меньше произвольного положительного числа.

Определение 5. *Множество M точек плоскости имеет площадь (меру) нуль, если его можно заключить в многоугольную фигуру $\overline{\Phi}$ такую, что $S_{\overline{\Phi}} < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — любое, наперед заданное.*

Сформулируем теперь теорему 1 в эквивалентной форме.

Теорема 2 (критерий квадрируемости). *Фигура Φ квадрируема тогда и только тогда, когда ее граница имеет площадь нуль.*

Теорема 3. *Всякая спрямляемая плоская кривая имеет площадь нуль.*

◀ Пусть γ — спрямляемая кривая, а l — ее длина, точки A, B — ее концы. Разобьем кривую на n частей точками $M_0 = A$, M_1, M_2, ..., $M_n = B$ так, чтобы длина каждой из элементарных кривых M_iM_{i+1} была меньше $\frac{l}{n}$. Каждую из точек M_i возьмем в качестве центра квадрата со стороной, длина которой равна $\frac{2l}{n}$. Объединение этих квадратов представляет собой многоугольную фигуру, площадь которой $\frac{4l^2}{n^2}(n+1)$. Поскольку l фиксировано, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{4l^2}{n^2}(n+1) < \varepsilon$. ▶

Следствие. *Всякая плоская фигура, граница которой состоит из одной или нескольких спрямляемых кривых, квадрируема.*

Покажем, что введенное понятие площади плоской фигуры, как и понятие площади элементарной фигуры, обладает свойствами монотонности, аддитивности и инвариантности:

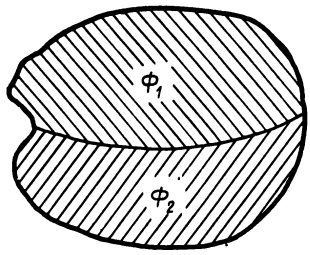


Рис. 17

Если плоская фигура разбита на две фигуры без общих внутренних точек, то ее площадь равна сумме площадей этих фигур.

а) *монотонность:* пусть Φ_1, Φ_2 — квадрируемые плоские фигуры, $\{S_{\underline{\Phi}_j}\}$, $\{S_{\overline{\Phi}_j}\}$, $j = 1, 2$ — множества площадей всех соответственно вписанных в них и описанных вокруг них элементарных фигур. Если $\Phi_1 \subset \Phi_2$, то $\{S_{\underline{\Phi}_1}\} \subset \{S_{\underline{\Phi}_2}\}$, $\{S_{\overline{\Phi}_1}\} \supset \{S_{\overline{\Phi}_2}\}$, следовательно,

$$\underline{P}_{\Phi_1} = \sup \{S_{\underline{\Phi}_1}\} \leqslant \underline{P}_{\Phi_2} = \sup \{S_{\underline{\Phi}_2}\},$$

$$\overline{P}_{\Phi_1} = \inf \{S_{\overline{\Phi}_1}\} \leqslant \overline{P}_{\Phi_2} = \inf \{S_{\overline{\Phi}_2}\}.$$

В силу квадрируемости фигур Φ_1 и Φ_2 полученные неравенства эквивалентны неравенству $P_{\Phi_1} \leqslant P_{\Phi_2}$;

б) *аддитивность:* пусть Φ_1, Φ_2 — квадрируемые плоские фигуры без общих внутренних точек, Φ — объединение этих фигур. Покажем, что Φ — квадрируемая фигура, причем $P_\Phi = P_{\Phi_1} + P_{\Phi_2}$. Действительно, граница фигуры Φ является частью объединения границ фигур Φ_1 и Φ_2, причем эти границы являются множеством площади нуль (рис. 17). Поэтому граница фигуры Φ также множество площади нуль и по теореме 2 Φ — квадрируема. Заметим, что любые, вписанные в Φ_1 и Φ_2, элементарные фигуры $\underline{\Phi}_1$ и $\underline{\Phi}_2$ не пересекаются, поэтому для объединения $\underline{\Phi}$ этих фигур справедливо равенство $S_{\underline{\Phi}_1} + S_{\underline{\Phi}_2} = S_{\underline{\Phi}}$, где буквой S, как обычно, обозначена площадь соответствующей фигуры. Если рассмотреть произвольные две описанные вокруг фигур Φ_1 и Φ_2 элементарные фигуры $\overline{\Phi}_1$ и $\overline{\Phi}_2$, то они, вообще говоря, пересекаются, а площадь объединения этих фигур не превосходит суммы их площадей, т. е.

$$S_{\overline{\Phi}} \leqslant S_{\overline{\Phi}_1} + S_{\overline{\Phi}_2}.$$

Обозначим через P, P_1, P_2 соответственно площади фигур Φ, Φ_1, Φ_2. Тогда получим неравенства

$$S_{\underline{\Phi}_1} + S_{\underline{\Phi}_2} = S_{\underline{\Phi}} \leqslant P \leqslant S_{\overline{\Phi}} \leqslant S_{\overline{\Phi}_1} + S_{\overline{\Phi}_2},$$

$$S_{\underline{\Phi}_1} + S_{\underline{\Phi}_2} \leqslant P_1 + P_2 \leqslant S_{\overline{\Phi}_1} + S_{\overline{\Phi}_2},$$

$$|P - (P_1 + P_2)| \leqslant (S_{\overline{\Phi}_1} - S_{\underline{\Phi}_1}) + (S_{\overline{\Phi}_2} - S_{\underline{\Phi}_2}).$$

Из существования чисел $S_{\underline{\Phi}_1}$, $S_{\overline{\Phi}_1}$ и $S_{\underline{\Phi}_2}$, $S_{\overline{\Phi}_2}$ таких, что $\forall \varepsilon > 0$ $S_{\overline{\Phi}_1} - S_{\underline{\Phi}_1} < \frac{\varepsilon}{2}$, $S_{\overline{\Phi}_2} - S_{\underline{\Phi}_2} < \frac{\varepsilon}{2}$, следует, что $P = P_1 + P_2$;

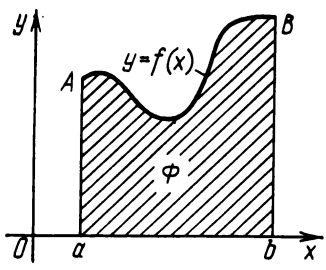


Рис. 18

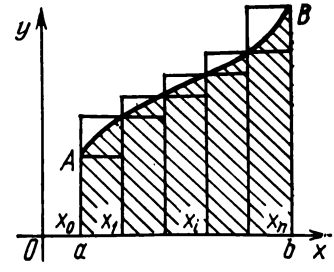


Рис. 19

в) *инвариантность:* это свойство следует из инвариантности площади для элементарных фигур и определения площади плоской фигуры через площади элементарных фигур.

Отметим, что общая часть двух квадрируемых плоских фигур Φ_1 и Φ_2 является квадрируемой фигурой. Утверждение следует из того, что каждая точка, граничная для $\Phi = \Phi_1 \cap \Phi_2$, является одновременно граничной либо для Φ_1, либо для Φ_2, т. е. граница Φ есть объединение частей границ Φ_1 и Φ_2 и имеет площадь нуль.

7.3. Площадь криволинейной трапеции.

Определение. *Криволинейной трапецией называется плоская фигура* Φ, *ограниченная снизу сегментом* $[a, b]$ *оси* Ox, *сверху — графиком* G *непрерывной неотрицательной функции* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *с боков — отрезками прямых* $x = a$ *и* $x = b$ (рис. 18).

Теорема. *Криволинейная трапеция — квадрируемая фигура, а ее площадь равна*

$$P = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

◀ Пусть $\Pi = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ — произвольное разбиение сегмента $[a, b]$ и $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $\eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, такие точки, что

$$f(\xi_i) = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad f(\eta_i) = \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

Тогда соответствующие интегральные суммы

$$\overline{S}_\Pi(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \quad \underline{S}_\Pi(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\eta_i)\,\Delta x_i,$$

являющиеся верхней и нижней интегральными суммами при разбиении Π сегмента $[a, b]$, можно истолковать как площади элементарных фигур, составленных из прямоугольников, одна из которых описана вокруг трапеции, а другая вписана в нее (рис. 19). Поскольку $f \in C[a, b]$, то $f \in R[a, b]$, и поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \exists \Pi$: $\overline{S}_\Pi(f) - \underline{S}_\Pi(f) < \varepsilon$, т. е. криволинейная трапеция — квадрируемая фигура.

Рассмотрим множество $\{\Pi\}$ всевозможных разбиений сегмента $[a, b]$. Тогда

$$\overline{P} = \inf_{\{\Pi\}} \{\overline{S}_\Pi(f)\} = \overline{\int} f dx,$$

$$\underline{P} = \sup_{\{\Pi\}} \{\underline{S}_\Pi(f)\} = \underline{\int} f dx,$$

и так как $f \in R[a, b]$, то $\overline{P} = \underline{P} = \int_a^b f(x)\,dx$, т. е. справедлива формула (1). ▶

Если криволинейная трапеция лежит под осью Ox, т. е. ограничена сверху сегментом $[a, b]$ оси Ox, снизу — графиком G непрерывной неположительной функции $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, с боков — отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, то справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = -P,$$

где P — площадь этой трапеции. Поэтому в случае, когда непрерывная функция $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ меняет знак на $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ равен алгебраической сумме площадей криволинейных трапеций, лежащих над осью Ox и под ней.

Отметим также два частных случая применения формулы (1).

1) Кривая, ограничивающая криволинейную трапецию, задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, причем $\varphi(t_0) = a$, $\psi(t_1) = b$. Тогда формула (1) приобретает вид

$$P = \int_{t_0}^{t_1} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt. \tag{2}$$

2) Плоская фигура Φ ограничена снизу графиком непрерывной функции $f_1: [a, b] \to \mathbb{R}$, сверху — графиком непрерывной функции $f_2: [a, b] \to \mathbb{R}$, с боков — отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ (рис. 20). Тогда, очевидно, площадь такой трапеции можно вычислить по формуле

$$P = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \tag{3}$$

Пример 1. Вычислить площадь круга $x^2 + y^2 \leqslant r^2$.

Площадь круга можно получить, вычислив площадь криволинейной трапеции $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ и увеличив последнюю в 4 раза. Применяя формулу (1), п. 7.3, получим

$$P = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

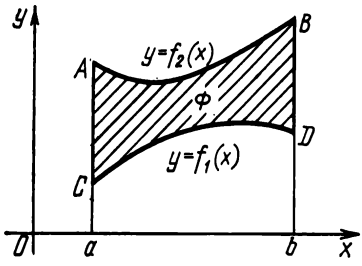


Рис. 20

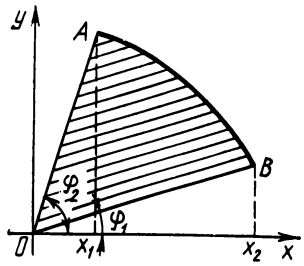


Рис. 21

С помощью замены $\arcsin\frac{x}{r}=t$ находим

$$P=4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=2r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt=2r^2\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi r^2.$$

Пример 2. Найти площадь кругового сектора.

Для вычисления площади P сектора круга $x^2+y^2\leqslant r^2$, ограниченного лучами $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$, $0\leqslant\varphi_1<\varphi_2<\frac{\pi}{2}$ (рис. 21), воспользуемся формулой (3). Очевидно,

$$P=\int_0^{x_1}(x\operatorname{tg}\varphi_2-x\operatorname{tg}\varphi_1)\,dx+\int_{x_1}^{x_2}(\sqrt{r^2-x^2}-x\operatorname{tg}\varphi_1)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}(x_1^2\operatorname{tg}\varphi_2-x_2^2\operatorname{tg}\varphi_1)+\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{r^2-x^2}\,dx,$$

где $x_1=r\cos\varphi_2$, $x_2=r\cos\varphi_1$.

Параметрические уравнения кривой AB имеют вид

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad \varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2,$$

причем x убывает при возрастании φ, поэтому

$$\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=r^2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin^2\varphi d\varphi=\frac{r^2}{2}((\varphi_2-\varphi_1)-\sin\varphi_2\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_1).$$

В итоге получим

$$P=\frac{r^2}{2}(\sin\varphi_2\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cos\varphi_1)+$$

$$+\frac{r^2}{2}((\varphi_2-\varphi_1)-\sin\varphi_2\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_1)=\frac{r^2}{2}(\varphi_2-\varphi_1).$$

7.4. Площадь криволинейного сектора.

Определение. *Криволинейным сектором называют плоскую фигуру, ограниченную двумя лучами, составляющими с полярной осью углы* $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, *и непрерывной кривой* γ, *заданной уравнением* $\rho=\rho(\varphi)$, $\rho\geqslant 0$, $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$,

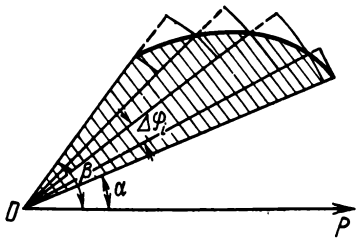


Рис. 22

Криволинейный сектор содержится между двумя неэлементарными фигурами, составленными из круговых секторов

Теорема. *Криволинейный сектор — квадрируемая плоская фигура, площадь P которой можно вычислить по формуле*

$$P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi. \tag{1}$$

◀ Пусть $\Pi = \{\varphi_0 = \alpha,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n = \beta\}$ — произвольное разбиение сегмента $[\alpha, \beta]$, $r_i = \min\limits_{\varphi_i \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{i+1}} \rho(\varphi)$, $R_i = \max\limits_{\varphi_i \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{i+1}} \rho(\varphi)$, $i = \overline{0,\ n-1}$. Рассмотрим верхнюю и нижнюю интегральные суммы функции $\varphi \mapsto \frac{\rho^2(\varphi)}{2}$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, при этом разбиении:

$$\overline{S}_{\Pi}\left(\frac{\rho^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} R_i^2 \Delta\varphi_i, \quad \underline{S}_{\Pi}\left(\frac{\rho^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} r_i^2 \Delta\varphi_i.$$

Их можно истолковать как площади плоских фигур, составленных из круговых секторов, одна из которых описана вокруг криволинейного сектора, а другая вписана в него (рис. 22).

Поскольку функция $\varphi \mapsto \frac{\rho^2(\varphi)}{2}$ непрерывна на сегменте $[\alpha, \beta]$, то $\frac{\rho^2}{2} \in R[\alpha, \beta]$ и $\forall \varepsilon > 0$ существует такое разбиение Π этого сегмента, что

$$\overline{S}_{\Pi}\left(\frac{\rho^2}{2}\right) - \underline{S}_{\Pi}\left(\frac{\rho^2}{2}\right) < \varepsilon.$$

Из квадрируемости двух неэлементарных плоских фигур, составленных из круговых секторов, одна из которых описана вокруг криволинейного сектора, а другая вписана в него, разность площадей которых меньше произвольного $\varepsilon > 0$, следует, что криволинейный сектор имеет площадь (см. следствие из теоремы 1, п. 7.2).

Из равенств

$$\inf_{\{\Pi\}}\left\{\overline{S}_{\Pi}\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\right\} = \overline{\int}\frac{\rho^2}{2}\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\, d\varphi,$$

$$\sup_{\{\Pi\}}\left\{\underline{S}_{\Pi}\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\right\} = \underline{\int}\frac{\rho^2}{2}\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\, d\varphi,$$

и неравенств $\underline{S}_{\Pi}\left(\frac{\rho^2}{2}\right) \leqslant P \leqslant \overline{S}_{\Pi}\left(\frac{\rho^2}{2}\right)$, выполняющихся для всякого разбиения Π сегмента $[\alpha, \beta]$, где P — площадь криволинейного сектора, следует, что

$$P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi. \blacktriangleright$$

Пример. Вычислить площадь плоской фигуры $\Phi: \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1,\ |x| \leqslant a\right\}$.

Фигура Φ ограничена эллипсом $\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ |x| \leqslant a\right\}$. Из соображений симметрии, согласно формуле (1), п. 7.3, имеем

$$P = 4b\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx.$$

После замены переменной $\arcsin \frac{x}{a} = t$ находим

$$P = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \pi ab.$$

7.5. Площадь односвязной области. В заключение рассмотрим важный случай, когда плоская фигура Φ ограничена гладкой замкнутой кривой γ, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ (кривая γ называется гладкой, если в каждой точке сегмента $[t_0, t_1]$ функции x и y непрерывно дифференцируемы и $x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0$ $\forall t \in [t_0, t_1]$). Вопрос о знаке площади такой фигуры Φ связан с геометрическим понятием направления обхода ее границы. Предположим, что фигура Φ является замкнутой односвязной областью в $\mathbb{R}^2$.

Будем говорить, что граница фигуры Φ обходится в *положительном направлении*, если при ее обходе внутренние точки фигуры остаются слева (рис. 23). Противоположное направление обхода называется *отрицательным*. Если фигуре Φ приписано определенное направление обхода, то ее называют *ориентированной*, а ее площадь считается положительной, при положительном направлении обхода и отрицательной, если направление обхода отрицательное.

Предположим, что Φ — ориентированная плоская выпуклая фигура, ограниченная гладкой простой замкнутой кривой, о которой упоминалось выше, пробегаемая против хода часовой стрелки при изменении параметра t от t_0 до t_1. При нашем предположении всякая прямая, параллельная одной из осей координат, пересекает границу фигуры не более чем в двух точках. Обозначим через A и B точки на кривой, в которых касательные к ее графику вертикальные (рис. 24).

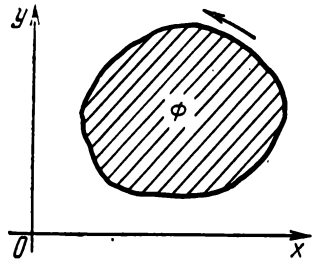


Рис. 23

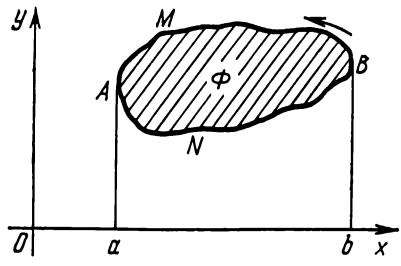


Рис. 24

Эти касательные называют *опорными прямыми* в точках A и B (в любой окрестности опорной точки A или точки B все точки кривой лежат по одну сторону от соответствующей касательной).

Искомая площадь P фигуры Ф равна разности площадей P_1 и P_2 криволинейных трапеций $aAMBb$ и $aANBb$. Предположим, что подвижная точка $(x(t), y(t))$ описывает верхнюю часть $y_в$ кривой BMA при изменении t от t_0 до τ и описывает ее нижнюю $y_н$ часть ANB, когда t изменяется от τ до t_1. Вычислим площадь P_1 трапеции $aAMBb$, приняв во внимание, что при возрастании t от t_0 до τ переменная x убывает от b до a:

$$P_1 = \int_a^b y_в dx = -\int_{t_0}^{\tau} y(t)\, x'(t)\, dt.$$

При возрастании параметра t от τ до t_1 переменная x возрастает от a до b, поэтому площадь P_2 трапеции $aANBb$ вычисляется по формуле

$$P_2 = \int_a^b y_н dx = \int_{\tau}^{t_1} y(t)\, x'(t)\, dt.$$

Таким образом,

$$P = P_1 - P_2 = -\int_{t_0}^{\tau} y(t)\, x'(t)\, dt - \int_{\tau}^{t_1} y(t)\, x'(t)\, dt = -\int_{t_0}^{t_1} y(t)\, x'(t)\, dt.$$

Интегрируя по частям полученный интеграл, можно получить еще одну формулу для вычисления площади фигуры Ф:

$$P = -\int_{t_0}^{t_1} y(t)\, x'(t)\, dt = -x(t)\, y(t)\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} x(t)\, y'(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} x(t)\, y'(t)\, dt$$

(внеинтегральный член обращается в нуль, так как кривая замкнута и $x(t_0) = x(t_1)$, $y(t_0) = y(t_1)$). Используя формулы, полученные выше, находим еще одну формулу для вычисления площади P фигуры Ф:

$$P = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (x(t)\, y'(t) - y(t)\, x'(t))\, dt. \qquad (1)$$

Чаще всего используют эту формулу.

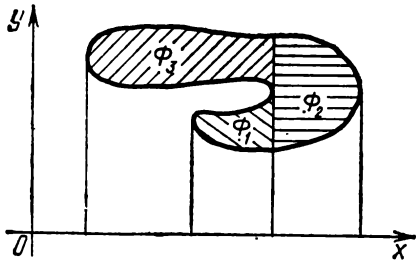


Рис. 25

С помощью опорных прямых плоская фигура разбита на три выпуклые фигуры, площади которых вычисляются по формулам пункта 7. 5.

При параллельном переносе фигуры Ф без вращения по формулам $x_1 = x$, $y_1 = y + a_1$ имеем

$$P = -\int_{t_0}^{t_1} (y(t) + a_1)\, x'(t)\, dt = -\int_{t_0}^{t_1} y(t)\, x'(t)\, dt - a_1 \int_{t_0}^{t_1} x'(t)\, dt =$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} y(t)\, x'(t)\, dt - a_1 x(t)\Big|_{t_0}^{t_1} = -\int_{t_0}^{t_1} y(t)\, x'(t)\, dt,$$

так как $x(t_1) - x(t_0) = 0$, т. е. площадь фигуры не изменилась.

Если фигура Ф не выпукла, и с помощью опорных прямых ее можно разбить на выпуклые части, то к каждой из них применим полученные выше формулы (рис. 25). Складывая полученные площади, найдем искомую площадь P фигуры, равную сумме интегралов, которая выразится одним интегралом

$$P = -\int_{t_0}^{t_1} y(t)\, x'(t)\, dt,$$

т. е. приходим к той же формуле.

Отметим, что выражение площади фигуры через интеграл не зависит от выбора параметра. Например, если перейти к новому параметру τ с помощью преобразования $\tau = \tau(t)$, то

$$x'(t) = x'_\tau \tau'_t, \quad y'(t) = y'_\tau \tau'_t,$$

$$P = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (x(t)\, y'(t) - y(t)\, x'(t))\, dt = \frac{1}{2}\int_{\tau_0}^{\tau_1} (x y'_\tau - y x'_\tau)\, d\tau,$$

где τ_0 и τ_1 — начальное и конечное значения параметра τ, соответствующие t_0 и t_1.

Пример. Вычислить площадь фигуры, граница которой задана параметрическими уравнениями $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$.

Кривая сама себя пересекает в начале координат ($x = 0$ при $t = 0$ и $t = 2$; $y = 0$ при $t = 0$ и $t = 2$). Для вычисления площади воспользуемся формулой (1)

$$P = \frac{1}{2}\int_0^2 (x(t)\, y'(t) - y(t)\, x'(t))\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 (t^4 - 4t^3 + 4t^2)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5} - t^4 + \frac{4}{3}t^3\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{15}$$

7.6. Объем тела. Рассмотрим произвольное тело T, т. е. ограниченную замкнутую область в трехмерном пространстве. Через S обозначим границу тела. *Элементарным телом* назовем произвольный многогранник (призма, параллелепипед и т. д.). Под объемом элементарного тела понимают неотрицательное число V, обладающее свойствами:

а) *монотонность:* если T_1 и T_2 — два элементарных тела и T_1 целиком содержится в T_2, а V_{T_1} и V_{T_2} соответственно их объемы, то

$$V_{T_1} \leqslant V_{T_2};$$

б) *аддитивность:* если T_1 и T_2 — два элементарных тела без общих внутренних точек, а $T = T_1 \cup T_2$, то

$$V_T = V_{T_1} + V_{T_2};$$

в) *инвариантность:* если элементарные тела T_1 и T_2 конгруэнтны, то

$$V_{T_1} = V_{T_2}.$$

Определение 1. *Элементарное тело $\overline{T}$ называется описанным вокруг тела T, если телу $\overline{T}$ и его границе принадлежат все точки тела T вместе с его границей.*

Определение 2. *Элементарное тело $\underline{T}$ называется вписанным в тело T, если телу T и его границе принадлежат все точки тела $\underline{T}$ вместе с его границей.*

Пусть T — некоторое тело, $\{V_{\overline{T}}\}$ — множество объемов всех описанных вокруг T элементарных тел, $\{V_{\underline{T}}\}$ — множество объемов всех вписанных в T элементарных тел. Множество $\{V_{\overline{T}}\}$ ограничено снизу нулем, а множество $\{V_{\underline{T}}\}$ ограничено сверху произвольным элементом множества $\{V_{\overline{T}}\}$, поэтому существуют конечные точные грани

$$\overline{V} = \inf_{\overline{T} \supset T} \{V_{\overline{T}}\}, \quad \underline{V} = \sup_{\underline{T} \subset T} \{V_{\underline{T}}\}.$$

Определение 3. *Числа $\overline{V}$ и $\underline{V}$ называют соответственно верхним и нижним объемами тела T.*

Определение 4. *Если $\underline{V} = \overline{V}$, то тело T называют кубируемым, а его объемом V называется общее значение нижнего и верхнего объемов.*

Теорема 1. *Тело T кубируемо тогда и только тогда, когда $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists \overline{T}$, $\underline{T}$ такие, что*

$$V_{\overline{T}} - V_{\underline{T}} < \varepsilon.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1, п. 7.2, поэтому его опускаем.

Следствие. *Если* $\forall\ \varepsilon > 0$ *существуют вписанное в тело* T *неэлементарное кубируемое тело* T_1 *и описанное вокруг* T *неэлементарное кубируемое тело* T_2 *такие, что* $V_{T_2} - V_{T_1} < \varepsilon$, *то тело* T *кубируемо.*

Пусть S — поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$ (см. определение 2, п. 16.5, гл. 4).

Определение 5. *Поверхность* S *имеет объем (меру) нуль, если ее можно заключить в элементарное тело* $\bar{T}$ *такое, что* $V_{\bar{T}} < \varepsilon$, *где* $\varepsilon > 0$ — *любое, наперед заданное.*

Сформулируем теорему 1 в эквивалентной форме.

Теорема 2 (критерий кубируемости). *Тело* T *кубируемо тогда и только тогда, когда его граница имеет объем нуль.*

Теорема 3. *Пусть* S — *поверхность в* $\mathbb{R}^3$, *заданная уравнением* $z = f(x, y)$, *где* $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$,— *непрерывная в замкнутой области* D *функция. Тогда* S *имеет объем нуль.*

◀ Рассмотрим описанный вокруг D прямоугольник Φ и пусть P — его площадь. В силу равномерной непрерывности f в D

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall M_1,\ M_2 \in D \wedge \rho(M_1, M_2) < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(M_1) - f(M_2)| < \frac{\varepsilon}{P}.$$

Разобъем теперь прямоугольник Φ на элементарные прямоугольники $\Phi^{(i)}$ (с помощью прямых, параллельных осям координат) так, чтобы расстояние между любой парой точек из каждого такого прямоугольника было меньше δ. Тогда колебание функции $\omega_i^{(i)}$ в каждой из областей $D^{(i)} = D \cap \Phi^{(i)}$ будет меньше чем $\frac{\varepsilon}{P}$. Таким образом, вся поверхность S содержится в многограннике $\bar{T}$, составленном из прямоугольных параллелепипедов с площадями оснований $P_{\Phi^{(i)}}$ и высотами $\omega_i^{(i)} = M_i - m_i$, где $M_i = \sup\limits_{M \in D^{(i)}} \{f(M)\}$, $m_i = \inf\limits_{M \in D^{(i)}} \{f(M)\}$. Объем такого многогранника

$$V_{\bar{T}} = \sum_i \omega_i^{(i)} P_{\Phi^{(i)}} < \frac{\varepsilon}{P} \sum_i P_{\Phi^{(i)}} = \frac{\varepsilon}{P} \cdot P = \varepsilon. \ \blacktriangleright$$

Следствие. *Если граница тела* T *состоит из поверхностей* S_j, $j = 1, 2, 3$, *заданных соответственно уравнениями* $z = f_1(x, y)$, $y = f_2(z, x)$, $x = f_3(y, z)$, где $f_j: D_j \to \mathbb{R}$, $D_j \subset \mathbb{R}^2$, $j = 1, 2, 3$,— *непрерывные в замкнутых областях* D_j *функции, то тело* T *кубируемо.*

Можно показать, как и в случае площадей плоских фигур, что введенное понятие объема тела T обладает свойствами монотонности, аддитивности и инвариантности. Доказать это предлагаем самостоятельно. Отметим также, что общая часть двух кубируемых тел T_1 и T_2 является кубируемым телом.

7.7. Объем цилиндра.

Определение. *Прямым цилиндром называется тело, ограниченное цилиндрической поверхностью, образующие которой*

параллельны некоторой фиксированной прямой, и двумя плоскостями, перпендикулярными к этой прямой.

При этом цилиндрическая поверхность вырезает из этих плоскостей плоские фигуры, называемые *основаниями цилиндра,* а расстояние H между основаниями цилиндра называется его *высотой.*

Теорема. *Прямой цилиндр высоты H, основанием которого служит квадрируемая плоская фигура Φ, является кубируемым телом, а его объем равен произведению площади основания на высоту:*

$$V = PH.$$

◀ Из квадрируемости фигуры Φ следует, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{\Phi} \supset \Phi \wedge \wedge \exists \underline{\Phi} \subset \Phi : P_{\overline{\Phi}} - P_{\underline{\Phi}} < \frac{\varepsilon}{H}$, где $\overline{\Phi}$ — описанная вокруг Φ, а $\underline{\Phi}$ — вписанная в Φ элементарные фигуры (многоугольники). Построенная на многоугольнике $\overline{\Phi}$ прямая призма $\overline{T}$ высоты H описана вокруг цилиндра, а прямая призма $\underline{T}$ высоты H, построенная на многоугольнике $\underline{\Phi}$, вписана в него. Так как

$$V_{\overline{T}} - V_{\underline{T}} = H\,(P_{\overline{\Phi}} - P_{\underline{\Phi}}) < \varepsilon,$$

то, согласно критерию кубируемости, рассматриваемый цилиндр является кубируемым телом. А из неравенств

$$P_{\underline{\Phi}} H \leqslant PH \leqslant P_{\overline{\Phi}} H$$

следует, что $V = PH$. ▶

7.8. Объем тела вращения.

Определение. *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и $f \in C\ [a, b]$. Тело T, образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции Φ, ограниченной графиком G функции f, отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox, называется т е л о м в р а щ е н и я.*

Теорема. *Тело вращения T кубируемо и его объем можно вычислить по формуле*

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{1}$$

◀ Пусть $\Pi = \{x_0 = a,\ x_1,\ \ldots,\ x_n = b\}$ — произвольное разбиение сегмента $[a, b]$, $m_i = \min\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$, $M_i = \max\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$, $i = \overline{0, n-1}$, $\underline{\Phi}_i$ — прямоугольник с высотой m_i, построенный на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$, $\overline{\Phi}_i$ — прямоугольник с высотой M_i, построенный на том же сегменте. Объединение всех прямоугольников $\underline{\Phi}_i$ есть ступенчатая плоская фигура $\underline{\Phi}$, вписанная в трапецию Φ, а объединение всех прямоугольников $\overline{\Phi}_i$ является плоской фигурой $\overline{\Phi}$, описанной вокруг Φ. При вращении трапеции Φ и фигур $\overline{\Phi}$, $\underline{\Phi}$ получим тело T и два ступенчатых тела $\overline{T}$ и $\underline{T}$, причем $\underline{T} \subset T \subset \overline{T}$. Тела $\underline{T}$ и $\overline{T}$ составлены

из прямых круговых цилиндров, радиусы оснований которых соответственно равны m_i и M_i, а их высоты равны Δx_i. Таким образом, тела $\underline{T}$ и $\overline{T}$ кубируемы, а их объемы

$$V_{\underline{T}} = \pi \sum_{i=0}^{n-1} m_i^2 \Delta x_i, \quad V_{\overline{T}} = \pi \sum_{i=0}^{n-1} M_i^2 \Delta x_i.$$

Эти объемы можно истолковать как нижнюю и верхнюю интегральные суммы для непрерывной функции $f_1 : x \mapsto \pi f^2(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. В силу ее интегрируемости $\forall \varepsilon > 0 \ \exists V_{\underline{T}} \wedge \exists V_{\overline{T}} : V_{\overline{T}} - V_{\underline{T}} < \varepsilon$. Таким образом, тело T кубируемо. Поскольку

$$\inf_{\overline{T} \supset T} \{V_{\overline{T}}\} = \overline{\int} \pi f^2 dx = \overline{V},$$

$$\sup_{\underline{T} \subset T} \{V_{\underline{T}}\} = \underline{\int} \pi f^2 dx = \underline{V},$$

$$\overline{\int} \pi f^2 dx = \underline{\int} \pi f^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx, \quad \underline{V} = \overline{V} = V,$$

то

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

7.9. Объем тела с известными площадями поперечных сечений. Рассмотрим тело T, содержащееся между плоскостями $x = a$ и $x = b$. Предположим, что всякое сечение $\Phi(x)$ тела T плоскостью, перпендикулярной к оси Ox в точке $x \in [a, b]$, есть квадрируемая плоская фигура, площадь которой $P(x)$ известна.

Теорема. *Если тело T кубируемо, а функция $P : x \mapsto P(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, интегрируема на $[a, b]$, то объем V тела T можно вычислить по формуле*

$$V = \int_a^b P(x)\, dx. \tag{1}$$

◀ Пусть T_1, T_2 — два тела, составленные из параллелепипедов и такие, что $T_1 \subset T \subset T_2$. Через точки произвольного разбиения $\Pi = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ проведем плоскости $x = x_i$, $i = \overline{0, n}$, и разобъем таким образом тела T, T_1 и T_2 на слои. Рассмотрим i-й слой, содержащийся между плоскостями $x = x_i$ и $x = x_{i+1}$, $i = \overline{0, n-1}$. Любое ортогональное сечение этого слоя $x = \xi_i$, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, вырезает из тел T, T_1, T_2 соответственно плоские фигуры Φ, Φ_1, Φ_2, причем $\Phi_1 \subset \Phi \subset \Phi_2$, в силу чего и для площадей этих фигур справедливы неравенства $P_{\Phi_1}(\xi_i) \leqslant P(\xi_i) \leqslant P_{\Phi_2}(\xi_i)$. Умножая все части этих неравенств на Δx_i и суммируя, получим

$$\sum_{i=0}^{n-1} P_{\Phi_1}(\xi_i)\, \Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} P(\xi_i)\, \Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} P_{\Phi_2}(\xi_i)\, \Delta x_i. \tag{2}$$

Поскольку функции P_{Φ_j}, $j = 1, 2$ кусочно-непрерывны на $[a, b]$, то $P_{\Phi_j} \in R[a, b]$. Суммы $\sum_{i=0}^{n-1} P_{\Phi_j}(\xi_i)\,\Delta x_i$, $i = 1, 2$, можно истолковать как объемы тел, составленных из прямых параллелепипедов с площадями оснований $P_{\Phi_j}(\xi_i)$ и высотами, равными Δx_i каждая; сумму $\sum_{i=0}^{n-1} P(\xi_i) \times$ $\times\, \Delta x_i$ в общем случае можно истолковать как объем тела, составленного из прямых цилиндров с площадями оснований $P(\xi_i)$ и высотами, равными Δx_i. Переходя в неравенствах (2) к пределу при $d(\Pi) \to 0$, получим неравенства

$$\int_a^b P_{\Phi_1}(x)\,dx \leqslant \int_a^b P(x)\,dx \leqslant \int_a^b P_{\Phi_2}(x)\,dx. \tag{3}$$

Покажем, что $V_{T_j} = \int_a^b P_{\Phi_j}(x)\,dx$, $j = 1, 2$. Пусть $M_i^{(j)} = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{P_{\Phi_j} \times$ $\times\,(x)\}$, $m_i^{(j)} = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{P_{\Phi_j}(x)\}$. Тогда параллелепипед с площадью основания $M_i^{(j)}$ и высотой, равной Δx_i, содержит в себе i-й слой тела T_j, а параллелепипед с площадью основания $m_i^{(j)}$ и высотой, равной Δx_i, содержится в этом слое. Из входящих параллелепипедов составится тело $\underline{T}_j$, а из выходящих — тело $\overline{T}_j$, причем их объемы соответственно равны $\sum_{i=0}^{n-1} m_i^{(j)} \Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n-1} M_i^{(j)} \Delta x_i$. Из условия $P_{\Phi_j} \in$ $\in R[a, b]$ следует, что

$$\inf_{T_j \subset \overline{T}_j} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} M_i^{(j)} \Delta x_i \right\} = \overline{V}_{T_j} = \int_a^b P_{\Phi_j}(x)\,dx,$$

$$\sup_{T_j \supset \underline{T}_j} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} m_i^{(j)} \Delta x_i \right\} = \underline{V}_{T_j} = \int_a^b P_{\Phi_j}(x)\,dx,$$

$$V_{T_j} = \int_a^b P_{\Phi_j}(x)\,dx, \quad j = 1, 2.$$

Поскольку тело T кубируемо, то $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists T_1 \wedge \exists T_2 : V_{T_2} -$ $- V_{T_1} < \varepsilon$. Тогда из неравенств (3) следует формула (1). ▶

В качестве примеров применения формулы (1) вычислим объемы шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant r^2$, прямого кругового конуса, радиус основания которого r и высота h, а также объем шарового сектора.

1) Из теоремы пункта 7.8 следует, что шар — кубируемое тело (его можно получить, вращая полукруг вокруг диаметра). В сечении шара плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, получим круг $y^2 +$ $+ z^2 \leqslant r^2 - x^2$, площадь которого $P(x) = \pi(r^2 - x^2)$. Применив формулу (1), получим

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\,dx =$$

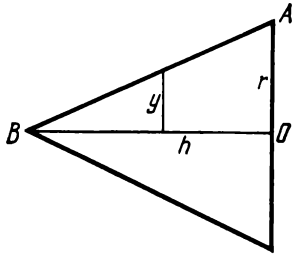


Рис. 26

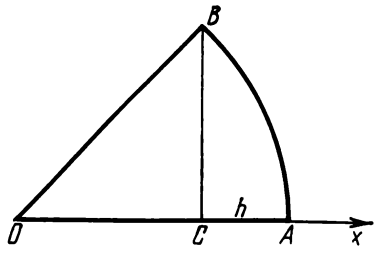


Рис. 27

$$= 2\pi \times$$

$$\times \left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^r = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

2) Рассмотрим осевое сечение прямого кругового конуса (рис. 26). На расстоянии x от вершины конуса B восстановим перпендикуляр до пересечения с образующей конуса. Тогда

$$\frac{y}{r} = \frac{h-x}{h}, \quad y = r\left(1 - \frac{x}{h}\right).$$

В ортогональном к высоте конуса сечении на расстоянии x от его вершины получим круг радиуса y, площадь которого $P(x) = \pi r^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2$. Согласно формуле (1), имеем

$$V = \pi r^2 \int_0^h \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx = \frac{\pi r^2 h}{3}\left(1 - \frac{x}{h}\right)^3\Big|_h^0 = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

3) Шаровой сектор получим, вращая сектор OAB круга $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ вокруг оси Ox (рис. 27). Пусть высота шарового сегмента (длина отрезка CA) равна h. Объем шарового сектора равен сумме объемов прямого кругового конуса с радиусом основания $r_1 = \sqrt{2rh - h^2}$ и высотой $h_1 = r - h$ и тела T, полученного в результате вращения вокруг оси Ox плоской фигуры BCA. На основании решения предыдущего примера находим объем конуса:

$$V_к = \frac{\pi h (2r - h)(r - h)}{3}.$$

По формуле (1) имеем

$$V_T = \pi \int_{r-h}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{r-h}^{r} = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right).$$

Складывая полученные результаты, находим объем шарового сектора:

$$V = V_к + V_T = \frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

7.10. Общая схема применения определенного интеграла. Большинство приложений определенного интеграла производятся по одной и той же схеме, характерные черты которой рассмотрим ниже.

Определение 1. *Если сегменту* $[\alpha, \beta]$, *содержащемуся в фиксированном сегменте* $[a, b]$, *поставлено в соответствие значение некоторой физической или геометрической величины* P, *то* P *называют функцией сегмента* $[\alpha, \beta]$ *и обозначают* $P([\alpha, \beta])$.

Например, если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C[a, b]$, $f \geqslant 0$, то с каждым сегментом $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ связываем величину $P([\alpha, \beta])$ площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции f, отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ с боков и отрезком оси Ox от точки a до точки b, или объем $V([\alpha, \beta])$ тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Ox.

Если на сегменте $[a, b]$ непрерывно распределена масса m, то ее количество $m([\alpha, \beta])$ на сегменте $[\alpha, \beta]$ есть функция этого сегмента.

Определение 2. *Функция* P *называется аддитивной, если при* $\alpha < \gamma < \beta$ *выполняется равенство*

$$P([\alpha, \beta]) = P([\alpha, \gamma]) + P([\gamma, \beta]).$$

Все приведенные выше в качестве примеров функции промежутков аддитивны.

Пусть задана аддитивная функция $P([\alpha, \beta])$, $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, а на сегменте $[a, b]$ определена непрерывная функция p, связанная с функцией P равенством

$$P([x, x + \Delta x]) = p(x\ \Delta x + \rho([x, x + \Delta x]), \tag{1}$$

где ρ — такая функция промежутка, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\rho([x, x + \Delta x])}{\Delta x} = 0$.

Следующая теорема устанавливает связь между функцией промежутка и функцией точки и лежит в основе практических применений определенного интеграла.

Теорема. *Если функция* $p : [a, b] \to \mathbb{R}$, $p \in C[a, b]$, *связанная с функцией промежутка* $P([\alpha, \beta])$ *равенством* (1), *существует, то значение* $P([a, b])$ *вычисляется по формуле*

$$P([a, b]) = \int_a^b p(x)\, dx. \tag{2}$$

◀ Произведя разбиение $\Pi = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ сегмента $[a, b]$ и пользуясь аддитивностью функции P, а также равенством (1), получим

$$P([a, b]) = \sum_{i=0}^{n-1} P([x_i, x_{i+1}]) = \sum_{i=0}^{n-1} p(x_i)\, \Delta x_i + \sum_{i=0}^{n-1} \rho([x_i, x_{i+1}]),$$

где $\dfrac{\rho([x_i, x_{i+1}])}{\Delta x_i} \to 0$ при $\Delta x_i \to 0$.

Поскольку $p \in C[a, b]$, то $p \in R[a, b]$, поэтому

$$\lim_{d(\Pi) \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} p(x_i)\, \Delta x_i = \int_a^b p(x)\, dx. \tag{3}$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \frac{\rho([x_i, x_{i+1}])}{\Delta x_i} = 0$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: для всякого разбиения Π такого, что $d(\Pi) < \delta$, выполняются неравенства $|\rho([x_i, x_{i+1}])| < \frac{\varepsilon \Delta x_i}{b-a}$, $i = \overline{0, n-1}$. Фиксируя такое разбиение Π, получим оценку

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} \rho([x_i, x_{i+1}])\right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a} = \varepsilon,$$

из которой следует, что $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \rho([x_i, x_{i+1}]) = 0$. Принимая во внимание последнее соотношение, а также соотношение (3), получаем формулу (2). ▶

Таким образом, общая схема применения определенного интеграла состоит в следующем: если при $\Delta x \to 0$ с точностью до бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx, удалось установить приближенное равенство $P([x, x + \Delta x]) \approx p(x)\,\Delta x$, то интересующее нас значение $P([a, b])$ вычисляется по формуле (2).

Обозначив $F(x) = P([x_0, x])$ и приняв во внимание равенство $F(x_0) = 0$ и равенство (1), получим

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = p(x_0) + \frac{\rho([x_0, x])}{x - x_0}, \tag{4}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = p(x_0) = F'(x_0).$$

Следовательно, соотношение $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{P([x_0, x])}{x - x_0} = p(x_0)$ между функцией промежутка P и функцией p является операцией дифференцирования в точке x_0. Подытоживая полученные результаты, приходим к выводу, что переход от функции точки p к функции сегмента P производится с помощью операции интегрирования по формуле (2), а обратный переход от функции сегмента к функции точки осуществляется с помощью операции дифференцирования по формуле (4). Здесь в общей форме выступает взаимно-обратный характер операций дифференцирования и интегрирования. Если какое-то явление в точке $x_0 \in]a, b[$ характеризуется некоторой функцией $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, то эта характеристика носит локальный характер, в то время как характеристика явления с помощью функции сегмента носит глобальный характер.

Таким образом, задачу практического применения интеграла Римана можно сформулировать как задачу установления свойств различных явлений в целом, используя его локальные свойства, а задачей дифференцирования можно считать установление локальной характеристики явления на основании его глобальных свойств.

7.11. Задачи на вычисление статических моментов инерции, координат центра тяжести кривых, плоских фигур и тел.

Определение. *Статическим моментом* M_γ *системы материальных точек* $\{M_i\}$ *относительно некоторой прямой* γ *и*

лежащих в одной плоскости с γ *называется величина* $M_\gamma = \sum_{j=1}^{n} m_j y_j$, *где* m_j, $j = \overline{1, n}$, — *массы точек* M_j. *Величина* $I_\gamma = \sum_{j=1}^{n} m_j y_j^2$, *где* y_j — *расстояния со знаком от точек* M_j *до прямой* γ, *называется м о м е н т о м и н е р ц и и этой системы относительно прямой* γ.

Выражение «расстояния со знаком ...» означает, что расстояния y_j точек, лежащих по разные стороны прямой γ, берутся с противоположными знаками.

Исходя из данного определения, получим формулы для вычисления статических моментов и моментов инерции весомой плоской кривой, а также плоской фигуры при сплошном распределении масс.

Пусть AB — кривая, параметрические уравнения которой $x = x(l)$, $y = y(l)$, $0 \leqslant l \leqslant L$, где l — длина кривой, отсчитываемая от точки A. Предположим, что плотность μ вещества кривой AB является непрерывной функцией на сегменте $[0, L]$

Пусть $\Pi = \{M_0 = A, M_1, \ldots, M_n = B\}$ — произвольное разбиение кривой AB на кривые M_iM_{i+1}, $i = \overline{0, n-1}$, причем длина кривой M_iM_{i+1} равна $\Delta l_i = l_{i+1} - l_i$. Если $\mu_i = \mu(x(l_i), y(l_i))$ — плотность вещества кривой в точке M_i, а Δm_i — масса кривой M_iM_{i+1}, то $\mu_i = \lim\limits_{M_{i+1} \to M_i} \frac{\Delta m_i}{\Delta l_i}$. Следовательно, $\Delta m_i = \mu_i \Delta l_i + \alpha(\Delta l_i)\, \Delta l_i$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta l_i \to 0$.

Считая кривую M_iM_{i+1} материальной точкой, масса которой Δm_i, находящейся на расстоянии $y(l_i)$ от оси Ox и на расстоянии $x(l_i)$ от оси Oy, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем Δl_i при $\Delta l_i \to 0$, получим значения статических моментов этой кривой dM_x и dM_y относительно координатных осей:

$$dM_x = \mu_i y(l_i)\, \Delta l_i, \quad dM_y = \mu_i x(l_i)\, \Delta l_i.$$

Применив формулу (2), п. 7.10, получим статические моменты M_x и M_y кривой AB относительно координатных осей:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^L \mu(x(l), y(l))\, y(l)\, dl, \\ M_y &= \int_0^L \mu(x(l), y(l))\, x(l)\, dl. \end{aligned} \tag{1}$$

Если кривая AB однородна и $\mu(x(l), y(l)) = 1$, то соответствующие статические моменты M_x и M_y называют *геометрическими*. В этом случае имеем

$$M_x = \int_0^L y(l)\, dl, \quad M_y = \int_0^L x(l)\, dl. \tag{2}$$

Массу m весомой кривой AB можем вычислить по формуле

$$m = \int_0^L \mu(x(l),\ y(l))\, dl, \tag{3}$$

если μ — непрерывная или кусочно-непрерывная функция.

Если кривая однородна и $\mu \equiv 1$, то численные значения ее массы и длины совпадают, т. е. $m = L$.

Для моментов инерции I_x и I_y путем рассуждений, аналогичных проведенным выше, получаем формулы

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^L \mu(x(l),\ y(l))\, y^2(l)\, dl, \\ I_y &= \int_0^L \mu(x(l),\ y(l))\, x^2(l)\, dl. \end{aligned} \tag{4}$$

Формулы для вычисления геометрических моментов инерции имеют вид

$$I_x = \int_0^L y^2(l)\, dl, \quad I_y = \int_0^L x^2(l)\, dl. \tag{5}$$

В механике часто приходится вычислять координаты центра тяжести кривой, плоской фигуры или тела. Остановимся на вопросе вычисления координат центра тяжести плоской кривой AB. Напомним, что если в точке $C(\xi, \eta)$ (центре тяжести кривой AB) сосредоточить всю массу m кривой AB, то статические моменты этой массы относительно осей координат совпадают с соответствующими статическими моментами кривой AB. Таким образом,

$$m\xi = M_y, \quad m\eta = M_x,$$

откуда

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{m} \int_0^L \mu(x(l),\ y(l))\, x(l)\, dl, \\ \eta &= \frac{1}{m} \int_0^L \mu(x(l),\ y(l))\, y(l)\, dl, \end{aligned} \tag{6}$$

где m вычисляется по формуле (3). Если кривая однородна и $\mu \equiv 1$, то

$$\xi = \frac{1}{L} \int_0^L x(l)\, dl, \quad \eta = \frac{1}{L} \int_0^L y(l)\, dl. \tag{7}$$

Отметим случай, когда кривая AB однородна и симметрична относительно некоторой прямой. Тогда центр тяжести кривой лежит на этой прямой.

Для доказательства этого утверждения достаточно указанную прямую выбрать в качестве оси Oy, а начало отсчета длин кривых

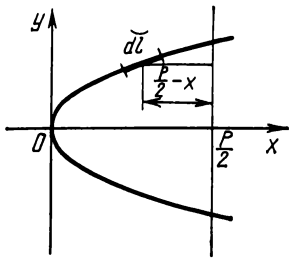


Рис. 28

При вычислении статического момента однородной кривой dl ее рассматривают как материальную точку, масса которой численно равна ее длине.

вести от точки пересечения этой прямой с кривой. Тогда функция $x = x(l)$, $-0{,}5L \leqslant l \leqslant 0{,}5L$ является нечетной, в силу чего $M_y = \int\limits_{-0.5L}^{0,5L} x\,dl = 0$, $\xi = 0$.

Если кривая AB задана в явном виде, или параметрически, или, в частности, задана в полярной системе координат (последний случай равносилен заданию кривой параметрическими уравнениями $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho(\varphi)\sin\varphi$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$), то в формулах (1) — (7) следует произвести замену переменной. Например, если в качестве параметра взять переменную x, т. е. задать кривую AB в виде $\{x = x,\ y = f(x),\ a \leqslant x \leqslant b,\ f \in C^{(1)}[a, b]\}$, то формулы (1) примут вид

$$M_x = \int\limits_a^b \mu(x, f(x))\, f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx,$$

$$M_y = \int\limits_a^b \mu(x, f(x))\, x \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

В качестве примера вычислим статический момент параболы $\gamma = \left\{y^2 = 2px,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{p}{2},\ p > 0\right\}$ относительно прямой $x = \frac{p}{2}$ (рис. 28).

Пусть x — абсцисса точки $M(x, y)$, лежащей на кривой M_iM_{i+1}, длина которой dl. Тогда с точностью до бесконечно малой более высокого порядка, чем dx, при $dx \to 0$ имеем

$$dM_{\frac{p}{2}} = \left(\frac{p}{2} - x\right) dl = \left(\frac{p}{2} - x\right) \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$$

Применив общую схему, о которой говорилось выше, и приняв во внимание симметрию кривой относительно оси Ox, получим

$$M_{\frac{p}{2}} = 2\int\limits_0^{\frac{p}{2}} \left(\frac{p}{2} - x\right) \sqrt{1 + \frac{q}{2x}}\, dx = \int\limits_0^{\frac{p}{2}} (p - (\sqrt{2x})^2) \times$$

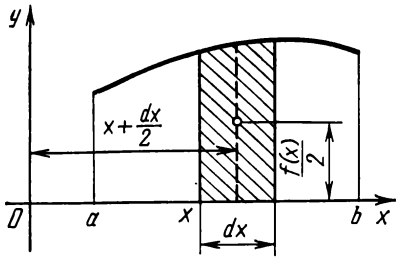


Рис. 29

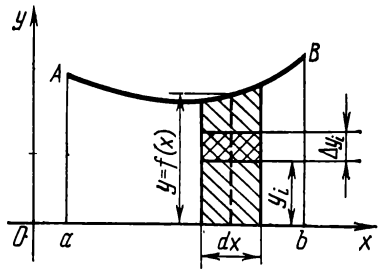


Рис. 30

$$\times \sqrt{p+(\sqrt{2x})^2}\; d(\sqrt{2x}) = \int_0^{\sqrt{p}} (p-z^2)\sqrt{p+z^2}\, dz =$$

$$= \left(\frac{z}{4}\sqrt{p+z^2}\left(\frac{5p}{2} - (p+z^2)\right) + \frac{5}{8}p^2 \ln\left(z+\sqrt{p+z^2}\right)\right)\Big|_0^{\sqrt{p}} =$$

$$= \frac{p^2}{8}\left(\sqrt{2} + 5\ln(1+\sqrt{2})\right).$$

Перейдем к вопросу о вычислении статических моментов и центра тяжести плоской фигуры Ф — криволинейной трапеции, ограниченной графиком G непрерывной функции $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \geqslant 0$, отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox. Предположим, что трапеция Ф однородна, т. е. поверхностная плотность μ вещества фигуры постоянная и равна 1. Тогда масса любой части трапеции изменяется площадью этой части. Чтобы получить формулы для вычисления статических моментов фигуры Ф относительно осей координат, выделим элемент этой фигуры — вертикальную полоску, ширина которой Δx (рис. 29). Считая эту полоску прямоугольником, видим, что ее масса приближенно равна $f(x)\,\Delta x$. Предположив, что масса сосредоточена в центре прямоугольника — точке $\left(x + \frac{\Delta x}{2}, \frac{f(x)}{2}\right)$, для статических моментов пластинки dM_x и dM_y получим приближенные значения

$$dM_x = \frac{1}{2} f^2(x)\,\Delta x, \quad dM_y = f(x)\,\Delta x\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \approx x f(x)\,\Delta x.$$

На основании общей схемы применения интеграла сразу можем написать формулы для вычисления статических моментов фигуры относительно осей координат:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx, \quad M_y = \int_a^b x f(x)\,dx. \tag{8}$$

Для наиболее общего случая, когда фигура Ф находится по одну

сторону оси Ox, формулы (8) имеют вид

$$M_x = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} f(x) \int_a^b f^2(x)\, dx,$$
$$M_y = \operatorname{sgn} f(x) \int_a^b x f(x)\, dx. \tag{9}$$

С помощью статических моментов, по аналогии с рассмотренным случаем кривой AB, можем написать формулы для вычисления координат центра тяжести $C(\xi, \eta)$ однородной плоской фигуры Ф:

$$\xi = \frac{M_y}{P} = \frac{\operatorname{sgn} f(x)}{P} \int_a^b x f(x) dx,$$
$$\eta = \frac{M_x}{P} = \frac{\operatorname{sgn} f(x)}{2P} \int_a^b f^2(x)\, dx, \tag{10}$$

где P — площадь трапеции Ф.

Предположим теперь, что ось Ox не пересекает фигуру Ф. Умножая левую и правую части равенства $|\eta| P = |M_x|$ на 2π, получим теорему Гульдина: *объем тела, образованного вращением плоской однородной фигуры* Ф *вокруг не пересекающей ее прямой, расположенной в плоскости фигуры, равен произведению площади* P *этой фигуры на длину окружности, описываемой центром тяжести этой фигуры.*

Отметим, что в случае, когда однородная плоская фигура имеет ось симметрии, то центр тяжести фигуры лежит на этой прямой.

Выведем формулы для вычисления моментов инерции I_x и I_y плоской однородной фигуры. Как и в случае вывода формул для вычисления статических моментов криволинейной трапеции, выделим ее элемент — вертикальную полоску, ширина которой Δx (рис. 30).

Возьмем произвольную точку x, принадлежащую основанию полоски, и разделим отрезок $[0, f(x)]$ на n частей точками $y_0 = 0 < y_1 < \ldots < y_n = f(x)$. Отрезки прямых $y = y_i$, $i = \overline{1, n}$, разделяют полоску на элементарные части — прямоугольники и, возможно, на несколько криволинейных четырехугольников. Масса элементарного прямоугольника численно равна его площади, т. е. $\Delta m_i = \Delta x \Delta y_i$, а его моменты инерции

$$dI_x^{(i)} \approx \Delta x y_i^2 \Delta y_i, \quad dI_y^{(i)} \approx \Delta x \Delta y_i x^2.$$

Суммируя по всем i, получим приближенные значения моментов инерции dI_x и dI_y выделенной полоски:

$$dI_x = \Delta x \sum_{i=0}^{n-1} y_i^2 \Delta y_i, \quad dI_y = x^2 \Delta x \sum_{i=0}^{n-1} \Delta y_i = x^2 f(x)\, \Delta x.$$

Совершив предельный переход в выражении для dI_x при $\Delta y_i \to 0$, получим

$$dI_x = \Delta x \int_0^{f(x)} y^2 dy = \frac{f^3(x)}{3} \Delta x.$$

На основании общей схемы применения интеграла можем сразу написать формулы для вычисления моментов инерции трапеции относительно осей координат:

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b f^3(x)\,dx, \qquad I_y = \int_a^b x^2 f(x)\,dx. \tag{11}$$

Рассмотрен случай, когда трапеция лежит выше оси Ox. В общем случае, когда криволинейная трапеция Ф лежит по одну сторону оси Ox, формулы (11) имеют вид

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b f^2(x)\,|f(x)|\,dx, \quad I_y = \int_a^b x^2\,|f(x)|\,dx. \tag{12}$$

Обращаем внимание на существенно различный подход к задачам о вычислении статических моментов и моментов инерции плоской фигуры. В случае вычисления величины I_x с помощью схемы, применяемой для вычисления M_x, получается ошибочный результат.

7.12. Работа сил векторного поля. Пусть A_1B_1 — часть гладкой плоской кривой γ, параметрические уравнения которой $x = x(l)$, $y = y(l)$, $l_0 \leqslant l \leqslant l_1$, где l — длина кривой, отсчитываемая от некоторой точки на кривой γ, причем $A_1 = (x(l_0),\ y(l_0))$, $B_1 = (x(l_1),\ y(l_1))$. Если в каждой точке $M(x(l),\ y(l))$ кривой A_1B_1 задан вектор $\boldsymbol{F}(M)$, то скажем, что на A_1B_1 задано векторное поле. Предположим, что поле непрерывно, т. е. $\boldsymbol{F} \in C[l_0, l_1]$. Если $\boldsymbol{F}$ имеет физический смысл силы, то скажем, что на A_1B_1 задано силовое поле $\boldsymbol{F}$. Поставим себе задачей вычислить работу A силы $\boldsymbol{F}$, приложенной к материальной точке M на пути по кривой A_1B_1 из точки A_1 в точку B_1.

Если сила $\boldsymbol{F}$ постоянна в каждой точке M кривой A_1B_1 и образует с направлением перемещения $\boldsymbol{\tau}$ (единичным касательным вектором $\boldsymbol{\tau}$ к кривой в точке M) постоянный угол α, то в этом случае

$$A = |\boldsymbol{F}|\cos\alpha\ (l_1 - l_0).$$

Как правило, и сила $\boldsymbol{F}(M)$ и угол $\alpha(M)$ являются функциями точки M. Для вычисления работы A в общем случае разобъем кривую A_1B_1 на элементарные кривые M_iM_{i+1}, $i = \overline{0, n-1}$, $M_0 = A_1$, $M_n = B_1$ и будем считать силу $\boldsymbol{F}$ постоянной в каждой точке на этой кривой, равной $\boldsymbol{F}(M_i)$, а работу $dA_{\smile M_iM_{i+1}}$ равной выражению $(\boldsymbol{F}(M_i),\ \boldsymbol{\tau}(M_i))\,dl_i$, где $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\tau})$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{\tau}$ (рис. 31), dl_i — длина кривой M_iM_{i+1}. На основании общей схемы применения интеграла для вычисления всей искомой работы A получим формулу

$$A = \int_{l_0}^{l_1} (\boldsymbol{F}(x(l),\ y(l)),\ \boldsymbol{\tau}(x(l),\ y(l)))\,dl. \tag{1}$$

Пример 1. Какую работу необходимо затратить, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли, радиус которой r, на высоту h? Чему равна работа, если тело удаляется на бесконечность?

На тело массы m действует сила притяжения Земли F, обратно пропорциональная квадрату расстояния тела от центра Земли и направлена к центру Земли

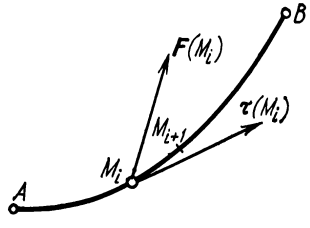


Рис. 31

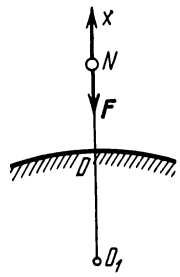


Рис. 32

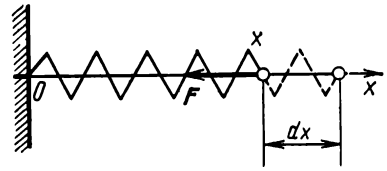


Рис. 33

$O_1 : F = \dfrac{ce\,(N,\ O_1)}{(r+x)^2}$ (рис. 32). Здесь c — постоянная, определяемая из условия, что на поверхности Земли ($x = 0$) сила F равна весу mg, $|F| = mg = \dfrac{c}{r^2}$, откуда $c = mgr^2$, r — радиус Земли, $e\,(N,\ O_1)$ — единичный вектор, направленный из точки N к центру Земли O_1.

Элементарная работа центральной силы определяется по формуле $dA = F_x dx$, где F_x — проекция силы F на направление Ox, dx — элементарное перемещение. Для выражения полной работы A, согласно формуле (1), имеем

$$A = -mgr^2 \int_0^h \frac{dx}{(r+x)^2} = mgr^2 \frac{1}{r+x}\Big|_0^h = -\frac{mgrh}{r+h}.$$

Знак «—» обусловлен тем, что проекция силы F на направление Ox отрицательна ($\alpha = \pi$). Искомая работа равна $|A| = \dfrac{mgrh}{r+h}$. Переходя к пределу при $h \to +\infty$, находим $A_\infty = -mgr$, $|A_\infty| = mgr$.

Пример 2. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть упругую пружину на 0,1 м, если сила в 1 Н растягивает эту пружину на 0,01 м?

Реакция F упругой пружины, один конец которой закреплен, выражается, согласно закону Гука, формулой $F = cx$, где c — коэффициент жесткости пружины, x — деформация (рис. 33). Поскольку для деформации пружины на 0,01 м требуется приложить силу в 1 Н, постоянную c находим из условия

$$1\text{Н} = c \cdot 0{,}01\ \text{м},\quad c = \frac{1}{0{,}01}\ \text{Н/м} = 100\ \text{Н/м}.$$

Элементарная работа упругой силы (реакции пружины) приближенно (с точностью до бесконечно малой более высокого порядка, чем dx) определяется выражением

$$A([x,\ x+dx]) = -cxdx,$$

где dx — элементарное перемещение, направленное в сторону, противоположную силе F. Полную работу найдем, проинтегрировав в пределах $[0;\ 0{,}1]$ полученное выражение:

$$A = -c\int_0^{0,1} xdx = -100\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,1} = -50 \cdot 0{,}01 = -0{,}5\ \text{Дж}.$$

Таким образом, работа упругой силы отрицательна. Искомая работа равна $|A| = 0{,}5$ Дж.

§ 8. ИНТЕГРАЛ СТИЛТЬЕСА

В 1894 г. голландский математик Стилтьес при исследовании непрерывных дробей ввел новый интеграл, который в математике называют его именем. Интеграл Стилтьеса является обобщением интеграла Римана и широко применяется при рассмотрении многих важных вопросов теории и практики.

8.1. Верхний и нижний интегралы Стилтьеса. Критерий интегрируемости.

Пусть $f : \bar{\mathcal{J}} \to \mathbb{R}$, $\bar{\mathcal{J}} = [a, b]$,— ограниченная на сегменте $\bar{\mathcal{J}}$ функция, $\alpha : \bar{\mathcal{J}} \to \mathbb{R}$ — возрастающая или неубывающая на этом сегменте функция, $\Pi = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ — произвольное разбиение сегмента $\bar{\mathcal{J}}$. Образуем верхнюю и нижнюю интегральные суммы

$$\bar{S}_\Pi(f, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta\alpha_i, \quad \underline{S}_\Pi(f, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta\alpha_i,$$

где $M_i = \sup\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{f(x)\}$, $m_i = \inf\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{f(x)\}$, $\Delta\alpha_i = \alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)$.

Введем в рассмотрение числа

$$\overline{\int} f d\alpha = \inf_{\{\Pi\}} \{\bar{S}_\Pi(f, \alpha)\}, \quad \underline{\int} f d\alpha = \sup_{\{\Pi\}} \{\underline{S}_\Pi(f, \alpha)\},$$

где точные грани берутся по всем возможным разбиениям сегмента $\bar{\mathcal{J}}$ и называются соответственно *верхним* и *нижним интегралами*.

Определение. *Если* $\overline{\int} f d\alpha = \underline{\int} f d\alpha$, *то общее значение верхнего и нижнего интегралов назовем интегралом Стилтьеса функции* f *относительно функции* α *(или по функции* α*) на сегменте* $\bar{\mathcal{J}}$ *и обозначим его*

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x).$$

Множество всех функций f, интегрируемых по Стилтьесу относительно функции α на сегменте $[a, b]$, обозначим символом $f \in S(\alpha)[a, b]$.

Из данного определения следует, что при $\alpha(x) = x$, $x \in \bar{\mathcal{J}}$, интеграл Стилтьеса совпадает с интегралом Римана функции f на сегменте $[a, b]$. Следовательно, интеграл Римана — частный случай интеграла Стилтьеса.

Заметим, что в общем случае функция α может быть разрывной на $\bar{\mathcal{J}}$.

Функция α называется интегрирующей функцией. В дальнейшем класс интегрирующих функций α не будет ограничиваться лишь возрастающими функциями. Несколько позже введем понятие интеграла Стилтьеса по функции ограниченной вариации, а пока предполагаем, что интегрирующая функция α возрастает на $\bar{\mathcal{J}}$.

Лемма 1. *Если* Π_1 — *продолжение разбиения* Π *сегмента* $\overline{\mathcal{J}}$, *то* $\underline{S}_{\Pi}(f, \alpha) \leqslant \underline{S}_{\Pi_1}(f, \alpha)$, $\overline{S}_{\Pi_1}(f, \alpha) \leqslant \overline{S}_{\Pi}(f, \alpha)$.

◀ Доказательство совпадает с доказательством леммы 1, п. 1.1, где вместо Δx_i следует взять $\Delta\alpha_i$. ▶

Лемма 2. *Справедливо неравенство* $\underline{\int} f d\alpha \leqslant \overline{\int} f d\alpha$.

◀ Доказательство полностью совпадает с доказательством леммы 2, п. 1.1. ▶

Теорема (критерий интегрируемости). *Для того чтобы* $f \in S(\alpha)[a, b]$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \Pi$ *такое, что*

$$\overline{S}_{\Pi}(f, \alpha) - \underline{S}_{\Pi}(f, \alpha) < \varepsilon. \tag{1}$$

◀ Доказательство повторяет все рассуждения, проводившиеся при доказательстве теоремы пункта 1.1. ▶

Неравенством (1) полезно пользоваться в форме $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta\alpha_i < \varepsilon$, где ω_i — колебание функции f на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$.

8.2. Интеграл Стилтьеса как предел интегральной суммы. Пусть Π — какое-нибудь разбиение сегмента $\overline{\mathcal{J}}$ и $d(\Pi) = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \Delta x_i$. В каждом сегменте $[x_i, x_{i+1}]$ возьмем произвольную точку ξ_i, $i = \overline{0, n-1}$, и образуем сумму

$$S_{\Pi}(f, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta\alpha_i,$$

которую назовем *интегральной суммой Стилтьеса.*

Положим, по определению, $\lim\limits_{d(\Pi) \to 0} S_{\Pi}(f, \alpha) = I$, если $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall \Pi \wedge d(\Pi) < \delta \Rightarrow |S_{\Pi}(f, \alpha) - I| < \varepsilon$.

Теорема. *Если при* $d(\Pi) \to 0$ $\exists \lim S_{\Pi}(f, \alpha)$, *то* $f \in S(\alpha)[a, b]$ *и*

$$\lim_{d(\Pi) \to 0} S_{\Pi}(f, \alpha) = \int_a^b f(x) \, d\alpha(x).$$

◀ Доказательство совпадает с доказательством теоремы пункта 1.2. ▶

8.3. Основные свойства интеграла Стилтьеса.

Теорема 1. *Если:* 1) $f \in S(\alpha)[a, b]$, $g \in S(\alpha)[a, b]$, *то* $(f + g) \in S(\alpha)[a, b]$, $cf \in S(\alpha)[a, b]$, *и при этом*

$$\int_a^b (f + g)(x) \, d\alpha(x) = \int_a^b f(x) \, d\alpha(x) + \int_a^b g(x) \, d\alpha(x),$$

$$\int_a^b cf(x) \, d\alpha(x) = c \int_a^b f(x) \, d\alpha(x), \quad c = \text{const};$$

2) $f, g \in S(\alpha)[a, b]$, $f(x) \leqslant g(x)\ \forall x \in \overline{\mathcal{I}}$, *то*

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \leqslant \int_a^b g(x)\, d\alpha(x);$$

3) $f \in S(\alpha)[a, b]$ *и если* $a < c < b$, *то* $f \in S(\alpha)[a, c]$, $f \in S(\alpha)[c, b]$, *и при этом*

$$\int_a^c f(x)\, d\alpha(x) + \int_c^b f(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x);$$

4) $f \in S(\alpha)[a, b]$ *и если* $|f(x)| \leqslant M\ \forall x \in \overline{\mathcal{I}}$, *то*

$$\left| \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \right| \leqslant M(\alpha(b) - \alpha(a));$$

5) $f \in S(\alpha_1)[a, b]$ *и* $f \in S(\alpha_2)[a, b]$, *то* $f \in S(\alpha_1 + \alpha_2)[a, b]$ *и*

$$\int_a^b f(x)\, d(\alpha_1(x) + \alpha_2(x)) = \int_a^b f(x)\, d\alpha_1(x) + \int_a^b f(x)\, d\alpha_2(x);$$

6) $f \in S(\alpha)[a, b]$ *и* c — *положительное число, то* $f \in S(c\alpha)[a, b]$ и

$$\int_a^b f(x)\, d(c\alpha(x)) = c \int_a^b f(x)\, d\alpha(x).$$

◀ Доказательство ничем не отличается от доказательства соответствующих свойств интеграла Римана. При этом удобнее всего пользоваться определением интеграла Стилтьеса как предела интегральных сумм. ▶

Следует отметить, что в случае интеграла Римана справедливо и обратное свойству 3) утверждение: *если* $f \in R[a, c]$ *и* $f \in R[c, b]$, *то* $f \in R[a, b]$. Для интеграла Стилтьеса из существования $\int_a^c f(x)\, d\alpha(x)$ и $\int_c^b f(x)\, d\alpha(x)$, вообще говоря, не следует существование $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$.

Пусть, например,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1, & \text{если } 0 < x \leqslant 1; \end{cases} \qquad \alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -1 \leqslant x < 0, \\ 1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Имеем

$$\int_{-1}^0 f(x)\, d\alpha(x) = 0, \quad \int_0^1 f(x)\, d\alpha(x) = 0,$$

так как соответствующие этим интегралам суммы Стилтьеса равны нулю. Вместе с тем, $\int_{-1}^1 f(x)\, d\alpha(x)$ не существует.

Действительно, рассмотрим разбиение Π сегмента $[-1, 1]$, в которое не входит точка $x=0$. Пусть $0 \in]x_k, x_{k+1}[$, тогда $S_\Pi(f, \alpha) = f(\xi_k)$ $\forall \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, так как $\Delta\alpha_i = 0$, если $i \neq k$, $\Delta\alpha_k = 1$. Если $\xi_k < 0$, то $f(\xi_k) = 0$, $S_\Pi(f, \alpha) = 0$, $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f, \alpha) = 0$. Если $\xi_k > 0$, то $f(\xi_k) = 1$, $S_\Pi(f, \alpha) = 1$, $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f, \alpha) = 1$. Результат зависит от способа разбиения сегмента $[-1, 1]$ и выбора точек ξ_i, следовательно,

$$f \notin S(\alpha)[-1, 1].$$

Теорема 2. *Пусть* $f \in S(\alpha)[a, b]$, $A \leqslant f(x) \leqslant B$, $\varphi \in C[A, B]$ *и* $g = \varphi \circ f : [a, b] \to R$. *Тогда* $g \in S(\alpha)[a, b]$.

Доказательство теоремы предлагаем провести читателю самостоятельно.

Теорема 3. *Если* $f \in S(\alpha)[a, b]$ *и* $g \in S(\alpha)[a, b]$, *то*:

1) $fg \in S(\alpha)[a, b]$;

2) $|f| \in S(\alpha)[a, b]$ *и* $\left|\int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,d\alpha(x)$.

Доказательство теоремы предлагаем провести читателю в качестве упражнения. При доказательстве использовать теорему 2.

8.4. Классы функций, интегрируемых по Стилтьесу.

Теорема 1. *Если функция* f *непрерывна на сегменте* $[a, b]$, *то* $f \in S(\alpha)[a, b]$.

◀ По заданному $\varepsilon > 0$ выберем $\delta_1 > 0$ такое, чтобы выполнялось неравенство

$$(\alpha(b) - \alpha(a))\,\delta_1 < \varepsilon.$$

Так как $f \in C[a, b]$, то f равномерно-непрерывна на сегменте $\bar{\mathcal{T}} = [a, b]$, в силу чего для выбранного $\delta_1 > 0$ $\exists \delta > 0$:

$$\forall x_1,\ x_2 \in \bar{\mathcal{T}} \wedge |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \delta_1.$$

Взяв произвольное разбиение Π сегмента $\bar{\mathcal{T}}$, которое бы удовлетворяло условию $d(\Pi) < \delta$, получим неравенства

$$\omega_i = M_i - m_i < \delta_1, \quad i = \overline{0,\ n-1}.$$

Тогда $\bar{S}_\Pi(f, \alpha) - \underline{S}_\Pi(f, \alpha) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \omega_i \Delta\alpha_i < \delta_1(\alpha(b) - \alpha(a)) < \varepsilon$.

Для функции f выполнен критерий интегрируемости по Стилтьесу. ▶

Теорема 2. *Если функция* f *монотонна на сегменте* $[a, b]$, *а* $\alpha \in C[a, b]$, *то* $f \in S(\alpha)[a, b]$.

◀ Пусть, например, f монотонно возрастает. Из непрерывности и возрастания функции α на сегменте $[a, b]$ следует, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 : \forall \Pi \wedge d(\Pi) < \delta \Rightarrow 0 < \Delta\alpha_i < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Фиксируя такое разбиение Π и принимая во внимание равенства

$$\sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{f(x)\} = f(x_{i+1}), \qquad \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{f(x)\} = f(x_i),$$

получаем неравенство

$$\overline{S}_{\Pi}(f, \alpha) - \underline{S}_{\Pi}(f, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i))\,\Delta\alpha_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) = \varepsilon.$$

Для функции f выполнен критерий интегрируемости по Стилтьесу на сегменте $[a, b]$. ▶

Определение. *Функция* $g : \overline{\mathcal{I}} \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условию Липшица на сегменте* $\overline{\mathcal{I}} = [a, b]$, *если* $\exists L \in \mathbb{R}^+$, $L = \text{const}$, *такое, что*

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leqslant L\,|x_1 - x_2| \quad \forall\, x_1, x_2 \in \overline{\mathcal{I}}. \tag{1}$$

Теорема 3. *Если* $f \in R[a, b]$, *а* α *удовлетворяет условию Липшица на* $\overline{\mathcal{I}}$, *то* $f \in S(\alpha)[a, b]$.

◀ При любом разбиении Π сегмента $\overline{\mathcal{I}}$ имеем $\Delta\alpha_i \leqslant L\Delta x_i$, $i = \overline{0, n-1}$. Из условия $f \in R[a, b]$ следует, что

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \Pi : \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{L}.$$

Тогда для этого разбиения Π получим

$$\overline{S}_{\Pi}(f, \alpha) - \underline{S}_{\Pi}(f, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta\alpha_i \leqslant L \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

Для функции f выполнен критерий интегрируемости по Стилтьесу. ▶

Расширим класс интегрирующих функций.

Пусть $g : \overline{\mathcal{I}} \to \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая условию Липшица (1), не обязательно монотонная на сегменте $\overline{\mathcal{I}}$. Представим g в виде $g(x) = Lx - (Lx - g(x)) = g_1(x) - g_2(x)$, $x \in \overline{\mathcal{I}}$. Функция g_1 удовлетворяет условию Липшица на $\overline{\mathcal{I}}$ и возрастает. Если x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ — произвольные две точки сегмента $\overline{\mathcal{I}}$, то в силу (1), получаем неравенство

$$g_2(x_2) - g_2(x_1) = L(x_2 - x_1) - (g(x_2) - g(x_1)) \geqslant L(x_2 - x_1) - L(x_2 - x_1) = 0,$$

из которого следует, что g_2 монотонно возрастает на $\overline{\mathcal{I}}$. Она также удовлетворяет условию Липшица на этом сегменте, поскольку

$$|g_2(x_1) - g_2(x_2)| \leqslant L\,|x_1 - x_2| + L\,|x_1 - x_2| = 2L\,|x_1 - x_2| \quad \forall\, x_1, x_2 \in \overline{\mathcal{I}}.$$

Согласно теореме 3, для $\forall f \in R[a, b]$ $\exists \int_a^b f(x)\, dg_1(x)$ и $\exists \int_a^b f(x)\, dg_2(x)$, следовательно, по теореме 1, п. 8.3,

$$\exists \int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x)\, dg_1(x) - \int_a^b f(x)\, dg_2(x).$$

Пусть $h : \bar{\mathcal{T}} \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации на сегменте $\bar{\mathcal{T}}$, $f : \bar{\mathcal{T}} \to \mathbb{R}$ — произвольная функция. Согласно теореме 4, § 6, функция h представима на $\bar{\mathcal{T}}$ в виде

$$h = \alpha - \beta,$$

где α и β — возрастающие на этом сегменте функции.

Тогда, согласно определению, полагаем

$$\int_a^b f(x)\, dh(x) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) - \int_a^b f(x)\, d\beta(x), \tag{2}$$

если $f \in S(\alpha)[a, b]$, $f \in S(\beta)[a, b]$, и при этом будем писать $f \in S(h)[a, b]$.

Так как представление функции ограниченной вариации в виде разности двух ограниченных функций не единственно, то может показаться, что определение интеграла функции f по функции ограниченной вариации h не единственно. На самом деле это не так. Если $h = \alpha_1 - \beta_1$, где α_1, β_1 — возрастающие на сегменте $\bar{\mathcal{T}}$ функции, то

$$\alpha + \beta_1 = \alpha_1 + \beta,$$

и поэтому, согласно теореме 1, п. 8.3, имеем

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) + \int_a^b f(x)\, d\beta_1(x) = \int_a^b f(x)\, d\alpha_1(x) + \int_a^b f(x)\, d\beta(x).$$

Отсюда следует, что интеграл Стилтьеса, определенный равенством (2), не зависит от выбора разложения функции h, если f интегрируема на $\bar{\mathcal{T}}$ по функциям α, α_1, β, β_1.

Теорема 4. *Если* $f \in R[a, b]$, $\varphi \in R[a, b]$, $g(x) = y_0 + \int_a^x \varphi(t)\, dt$, $a \leqslant x \leqslant b$, $y_0 = \text{const}$, *то* $f \in S(g)[a, b]$, *и при этом*

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx. \tag{3}$$

◀ Поскольку $\varphi \in R[a, b]$, то $\exists M > 0 : |\varphi(x)| \leqslant M$ $\forall x \in [a, b]$. Тогда $|g(x_1) - g(x_2)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t)\, dt \right| \leqslant M |x_1 - x_2|$, т. е. функция g удов-

летворяет условию Липшица на $\overline{\mathcal{T}} = [a, b]$ с константой M. Поэтому $f \in S(g)[a, b]$.

Так как $f,\ \varphi \in R[a, b]$, то $f\varphi \in R[a, b]$ и $\forall \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$

$$\exists \lim_{d(\Pi)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\varphi(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Рассмотрим $\forall \Pi$ интегральную сумму Стилтьеса функции f по функции g. Она имеет вид

$$S_\Pi(f, g) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta g_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\mu_i \Delta x_i,$$

где $m_i \leqslant \mu_i \leqslant M_i$, $m_i = \inf\limits_{x\in[x_i, x_{i+1}]} \{\varphi(x)\}$, $M_i = \sup\limits_{x\in[x_i, x_{i+1}]} \{\varphi(x)\}$, $\xi_i \in$

$\in [x_i, x_{i+1}]$, так как $\Delta g_i = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\,dx = \mu_i \Delta x_i$, согласно теореме о среднем.

Представим $S_\Pi(f, g)$ в виде

$$S_\Pi(f, g) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\varphi(\xi_i)\,\Delta x_i + \gamma_n,$$

где $\gamma_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (\mu_i - \varphi(\xi_i))\, f(\xi_i)\,\Delta x_i$.

Оценим γ_n, принимая во внимание ограниченность функции f и интегрируемость по Риману функции φ. Поскольку $|\mu_i - \varphi(\xi_i)| \leqslant$ $\leqslant \omega_i$, где ω_i — колебание функции φ на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$, а $|f(x)| \leqslant$ $\leqslant M_1\ \forall x \in \overline{\mathcal{T}}$, $M_1 = \text{const}$, то

$$|\gamma_n| \leqslant M_1 \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i.$$

Из условия $\varphi \in R[a, b]$ получаем, что $\gamma_n \to 0$ при $d(\Pi) \to 0$, откуда следует, что

$$\exists \lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f, g) = \int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx. \blacktriangleright$$

Следствие. *Если функция g имеет ограниченную, интегрируемую по Риману на сегменте $[a, b]$ производную g', то*

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx.$$

8.5. Вычисление интеграла Стилтьеса. Частный случай вычисления интеграла Стилтьеса доказан в теореме 4 (формула 3). Рассмотрим

формулу для вычисления интеграла Стилтьеса

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)$$

в случае, когда $f \in C[a, b]$, а функция g кусочно-непрерывна на $[a, b]$ и имеет интегрируемую на этом сегменте производную g', которая существует в каждой точке непрерывности функции g.

Пусть $x_0 = a, x_1, \ldots, x_m = b$ — точки разрыва функции g и ее производной g'. Рассмотрим функцию

$$G(x) = \begin{cases} g(x) + (g(x_k) - (g(x_k - 0)), & x_{k-1} < x \leqslant x_k, \quad k = \overline{1, m}, \\ g(x) - (g(x_k + 0) - g(x_k)), & x_k \leqslant x < x_{k+1}, \quad k = \overline{0, m-1}, \end{cases}$$
$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Функция G непрерывна на сегменте $[a, b]$, так как $G(x_k - 0) = G(x_k + 0) = g(x_k)$. Кроме того, $G'(x) = g'(x)$ в каждой точке существования g'. Поскольку $g' \in R[a, b]$, то и $G' \in R[a, b]$, поэтому, согласно следствию из теоремы 4, п. 8.4, имеем

$$\int_a^b f(x)\,dG(x) = \int_a^b f(x)\,G'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx. \tag{1}$$

Пусть $\Pi = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ — произвольное разбиение сегмента $[a, b]$ на n частей, причем каждый интервал $[x_i, x_{i+1}[$ либо вовсе не содержит, либо содержит не больше одной точки x_k, в которой функция g терпит разрыв первого рода. Составим интегральную сумму $S_\Pi(f, G)$, приняв во внимание равенства

$$G(x_1) - G(x_0) = \Delta G_0 = g(x_1) - g(x_0) - (g(a + 0) - g(a)) =$$
$$= \Delta g_0 - (g(a + 0) - g(a)),$$
$$G(x_n) - G(x_{n-1}) = \Delta G_{n-1} = g(b) - (g(b) - g(b - 0)) - g(x_{n-1}) =$$
$$= \Delta g_{n-1} - (g(b) - g(b - 0)),$$
$$G(x_{i+1}) - G(x_i) = \Delta g_i - (g(x_k + 0) - g(x_k - 0)), \text{ если } x_k \in]x_i, x_{i+1}[$$
$$G(x_{i+1}) - G(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i) = \Delta g_i, \text{ если } x_k \notin]x_i, x_{i+1}[.$$

При любом выборе точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$S_\Pi(f, G) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta g_i - f(\xi_0)(g(a + 0) - g(a)) -$$
$$- f(\xi_{n-1})(g(b) - g(b - 0)) - \sum_{k=1}^{m-1} f(\xi_k)(g(x_k + 0) - g(x_k - 0)). \tag{2}$$

Если $d(\Pi) \to 0$, то $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta g_i \to \int_a^b f(x)\,dg(x)$. Записав $\xi_k = x_k + \theta_k \Delta x_k$, $0 < \theta_k < 1$, $k = \overline{0, m-1}$, $\xi_{n-1} = b - \theta_n \Delta x_{n-1}$, $0 < \theta_n < 1$, при $d(\Pi) \to 0$, получим

$$- f(\xi_0)(g(a + 0) - g(a)) - f(\xi_{n-1})(g(b) - g(b - 0)) -$$

$$- \sum_{k=1}^{m-1} f(\xi_k)(g(x_k+0) - g(x_k-0)) \to -f(a)(g(a+0) - g(a)) -$$

$$- f(b)(g(b) - g(b-0)) - \sum_{k=1}^{m-1} f(x_k)(g(x_k+0) - g(x_k-0)).$$

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f, G) = \int_a^b f(x)\,dg(x) -$$

$$- f(a)(g(a+0) - g(a)) - f(b)(g(b) - g(b-0)) -$$

$$- \sum_{k=1}^{m-1} f(x_k)(g(x_k+0) - g(x_k-0)).$$

Окончательно имеем

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx + f(a)(g(a+0) - g(a)) +$$

$$+ f(b)(g(b) - g(b-0)) + \sum_{k=1}^{m-1} f(x_k)(g(x_k+0) - g(x_k-0)). \qquad (3)$$

В правую часть этой формулы входят интеграл Римана функции fg' и сумма произведений значений функции f в точках разрыва функции g на скачки этой функции в точках x_k, $k = \overline{0, m}$.

Отметим, что в силу интегрируемости функции f по функции G, можно брать любое разбиение Π сегмента $[a, b]$.

Например, пусть на сегменте $[a, b]$ оси Ox имеется точечно и непрерывно распределенное вещество. Через $g(x)$ обозначим количество массы, содержащееся на сегменте $[a, x]$, причем предположим, что $g(a) = 0$, т. е. в точке $x = a$ массы нет. Функция g монотонно возрастает на $[a, b]$. Вычислим статический момент всей массы, находящейся на сегменте $[a, b]$, относительно начала координат. Для этого рассмотрим разбиение $\Pi = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$. На сегменте $[x_i, x_{i+1}]$ содержится масса $g(x_{i+1}) - g(x_i) = \Delta g_i$. Считая ее сосредоточенной в точке $\frac{x_i + x_{i+1}}{2} = \xi_i$, получим для статического момента M приближенное значение $M \approx \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \Delta g_i$. Тогда

$$M = \lim_{d(\Pi)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \Delta g_i = \int_a^b x\,dg(x).$$

Статический момент выражается интегралом Стилтьеса.

Пусть $\mu(x)$ — линейная плотность равномерно распределенной массы, а в точках x_k, $k = \overline{1, m}$, сосредоточены массы m_k. Функция g дифференцируема в каждой точке $x \neq x_k$ сегмента $[a, b]$, причем $g'(x) = \mu(x)$. В точках x_k скачок функции g равен m_k. Применяя

формулу (3), получаем

$$M = \int_a^b x dg(x) = \int_a^b x\mu(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m} x_k m_k.$$

Первое слагаемое полученной формулы является статическим моментом непрерывно распределенных масс, а второе слагаемое — статическим моментом сосредоточенных масс. Интеграл Стилтьеса позволяет объединить одной формулой разнородные случаи непрерывно распределенных и сосредоточенных масс.

8.6. Формула интегрирования по частям. Пусть $f:[a, b]\to\mathbb{R}$, $g:[a, b]\to\mathbb{R}$ и существует какой-либо из интегралов Стилтьеса $\int_a^b f(x)\,dg(x)$, $\int_a^b g(x)\,df(x)$. Тогда обязательно существует и другой интеграл, причем справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,df(x). \tag{1}$$

◀ Предположим, что существует $\int_a^b g(x)\,df(x)$. Рассмотрим для произвольного разбиения $\Pi = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ интегральную сумму $S_\Pi(f, g)$, которую с помощью преобразования Абеля в теории рядов можно записать в виде

$$S_\Pi(f, g) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i)) = f(\xi_0)(g(x_1) - g(a)) +$$
$$+ f(\xi_1)(g(x_2) - g(x_1)) + \cdots + f(\xi_{n-1})(g(b) - g(x_{n-1})) =$$
$$= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) + g(a)(f(a) - f(\xi_0)) +$$
$$+ g(x_1)(f(\xi_0) - f(\xi_1)) + \cdots + g(x_{n-1})(f(\xi_{n-2}) - f(\xi_{n-1})) +$$
$$+ g(b)(f(\xi_{n-1}) - f(b)) = f(x)\,g(x)\Big|_a^b -$$
$$- \sum_{i=0}^{n-1} g_i(f(\xi_{i+1}) - f(\xi_i)) = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - S_{\Pi_1}(g, f),$$

где $\Pi_1 = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ — некоторое разбиение сегмента $[a, b]$, в которое точки a и b могут входить или не входить, так как выбор точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ произвольный. Поскольку, по предположению, существует $\int_a^b g(x)\,df(x)$, то

$$\exists \lim_{d(\Pi_1)\to 0} S_{\Pi_1}(g, f) = \int_a^b g(x)\,df(x).$$

Так как $\xi_{i+1} - \xi_i \leqslant x_{i+2} - x_i \leqslant 2d(\Pi)$, то $d(\Pi_1)\to 0$ при $d(\Pi)\to 0$. Тог-

да при $d(\Pi) \to 0$ будет $S_{\Pi}(g, f) \to \int_a^b g(x)\, df(x)$, следовательно,

$\exists \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_{\Pi}(f, g) = \int_a^b f(x)\, dg(x)$, а значит, справедлива формула (1). ▶

Пример. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, d\sin x$.

Имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, d\sin x = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

8.7. Теорема о среднем и оценка интеграла Стилтьеса. Эту теорему применяют для получения оценок при использовании интегралов Стилтьеса.

Теорема 1. *Пусть* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ $\forall x \in [a, b]$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, *g монотонно возрастает на* $[a, b]$ *и* $f \in S(g)$ $[a, b]$. *Тогда справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \mu (g(b) - g(a)), \tag{1}$$

где $m \leqslant \mu \leqslant M$.

◀ При выполнении условий теоремы $\forall \Pi$ имеем

$$m(g(b) - g(a)) \leqslant S_{\Pi}(f, g) \leqslant M(g(b) - g(a)),$$

откуда

$$m(g(b) - g(a)) \leqslant \lim_{d(\Pi)\to 0} S_{\Pi}(f, g) = \int_a^b f(x)\, dg(x) \leqslant M(g(b) - g(a)).$$

Обозначив $\frac{1}{g(b) - g(a)} \int_a^b f(x)\, dg(x) = \mu$, получим формулу (1). ▶

Следствие. *Если* $f \in C[a, b]$, *то* $\exists \xi \in [a, b]$ *такое, что*

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = f(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Теорема 2. *Если* $f \in C[a, b]$ и $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ — *функция ограниченной вариации на* $[a, b]$, *то справедлива оценка интеграла Стилтьеса*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dg(x) \right| \leqslant MV(g; a, b), \tag{2}$$

где $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$, $V(g; a, b)$ — *полная вариации функции g.*

◀ При произвольном разбиении Π сегмента $[a, b]$ на n частей получим оценку

$$|S_\Pi(f, g)| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta g(x_i)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)|\,|\Delta g(x_i)| \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leqslant MV(g;\ a,\ b).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $d(\Pi) \to 0$, получаем неравенство (2). ▶

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. В 2-х ч. Ч. 1. М., Наука, 1971. 600 с.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. В 2-х ч. Ч. 2. М., Наука, 1973. 448 с.
3. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. М., Наука, 1979. 720 с.
4. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М., Мир, 1971. 392 с.
5. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. В 2-х т. Т. 1. М., Высшая школа, 1981. 688 с.
6. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. В 2-х т. Т. 2. М., Высшая школа, 1981. 584 с.
7. Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А. Курс математического анализа. В 2-х т. Т. 1. М., Гостехиздат, 1957. 488 с.
8. Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А. Курс математического анализа. В 2-х т. Т. 2. М., Гостехиздат, 1957. 500 с.
9. Никольский С. М. Курс математического анализа. В 2-х т. Т. 1. М., Наука, 1973. 432 с.
10. Никольский С. М. Курс математического анализа. В 2-х т. Т. 2. Наука, 1973. 392 с.
11. Пизо Ш., Заманский М. Курс математики. М., Наука, 1971. 656 с.
12. Рудин У. Основы математического анализа. М., Мир, 1966. 320 с.
13. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х т. Т. 1. М., Гостехиздат, 1951. 696 с.
14. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х т. Т. 2. М., Гостехиздат, 1951. 864 с.
15. Шварц Л. Анализ. М., Мир, 1972. 824 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аксиома о верхней грани 20
Аксиомы порядка 20
— сложения 19
— умножения 19
— числового поля 24
Алгебра булева 9
Антисимметричность 13, 14
Аргумент 37
Ареакосинус гиперболический 168
Ареасинус гиперболический 168
Ареатангенс гиперболический 169
Арккосинус 166
Арккотангенс 166
Арксинус 166
Арктангенс 166
Асимптоты графика функции 287

Базис пространства 67
— стандартный 67
B-пространство 106

Вектор 52
Вектор-функция дифференцируема 295, 296
Величина абсолютная 29
Внешность множества 111
Внутренность множества 111
Возрастание функции в точке 272

Гомеоморфизм метрического пространства 346
Граница множества 111
Грань верхняя 20
— точная верхняя 20, 26
— — нижняя 25, 26
График отображения 13
Группа 17
— абелева 18, 51
— аддитивная 18
— — абелева 19
— мультипликативная 18
— — абелева 20

Делители нуля 18, 58
Δ-окрестность точки 84
δ-окрестность точки 63
Диаметр множества 162
Дифференциал биномиальный 385
— второго порядка 241
— длины кривой 447
— *n*-го порядка 241
— полный 313, 319, 324
Дифференциалы высших порядков 318
Дополнение множества 8, 109
Дуга 157, 447

Закон композиции внешний 15
— — внутренний 14
Замена переменной в неопределенном интеграле 366
— — — несобственном интеграле 434
— — — определенном интеграле 424
— переменных в выражении 356
Замыкание множества 112
Запись числа десятичная 40
— — *p*-ичная 40
— — позиционная 40
Знаки числа десятичные 40
— — *p*-ичные 40
Значение абсолютное 29, 39
— главное в смысле Коши 441
— предельное отображения 139
— — функции 119, 135, 136
— — — левое 121
— — — правое 121
— произведения 214

Изоморфизм 17
Импликация 7
Инвариантность формы дифференциала 237, 313
Интеграл неопределенный 360
— несобственный 429
— — абсолютно сходящийся 431
— — условно сходящийся 432
— определенный 426, 427, 428
— Стилтьеса 475
— эллиптический 399
Интегрирование правильной рациональной дроби 378
— иррациональных функций 384, 385, 387
— по частям 367, 434
— тригонометрических выражений 393

Интервал 27

Кванторы 7
Класс эквивалентности 14
Колебание функции в области 151
— — — точке 153, 408
Кольцо 18, 58
— коммутативное 18, 59
— унитарное 18, 58
Композиция отображений 12
Координаты упорядоченной системы 10
Корень степени n 33
Кривая простая замкнутая 447
— спрямляемая 447
Критерий Бэра 152
— выпуклости функции 285
— дифференцируемости функции 230
— интегрируемости функции 403, 476
— — по Стилтьесу 476
— квадрируемости 451
— кубируемости 461
— Коши 137, 216, 430
— — для последовательности из R^m 100
— — равномерной сходимости 174
— — сходимости ряда 180
— — — числовой последовательности 97
— Сильвестра 350
— сходимости несобственного интеграла 430
— — последовательности матриц 104

Лемма о вложенных сегментах 79
Логарифмы натуральные 82

Максимум глобальный 277
— краевой 277
— локальный 244
— условный 352
Матрица непрерывная 151
— Остроградского—Якоби 326
Матрицы квадратные 57
— размера $m \times n$ 55
Мера нуль Жордана 408
— — Лебега 407
Метод математической индукции 30
— Остроградского 381
— суммирования линейный 219
— — Пуассона—Абеля 222
— — регулярный 219
— средних арифметических (Чезаро) 220
Методы суммирования рядов 218
Метрика пространства 61
— естественная 62, 75
— индуцированная 61
Метрики эквивалентные 141
Минимум глобальный 277
— краевой 277
— локальный 244
— условный 352
Минус бесконечность 27
Многообразие 346
Многочлен асимптотический 289
— Тейлора 263
Множества изоморфные 17
— равномощные 47
— равные 8
— эквивалентные 47
Множество 7
— бесконечное 47
— вполне упорядоченное 14
— всюду плотное 113
— выпуклое 64
— действительных чисел 7, 19
— замкнутое 63, 108, 109
— измеримое по Жордану 412
— компактное 114
— комплексных чисел 7
— конечное 47
— мощности континуума 50
— натуральных чисел 7
— не более чем счетное 48
— несчетное 48
— ограниченное 27, 64
— — сверху 20
— — снизу 25
— — с обеих сторон 27
— открытое 63, 108, 109, 110
— плотное 113
— производное 108
— пустое 8
— рациональных чисел 7
— совершенное 113
— счетное 48
— целых чисел 7
Множители Лагранжа 353
Модуль числа 29, 37
Момент инерции 468
— статический 467

Неравенства дифференциальные 273
Неравенство 24
— Бернулли 32
— Гельдера 293
— Иенсена 281
— Коши—Буняковского 54, 60
— Минковского 294
— строгое 24
— треугольника 53
— Юнга 293
Норма 29, 52
— вектора кубическая 54
— — октаэдрическая 54
— — сферическая 53
— оператора 68
Нормы эквивалентные 141

Область 118
— замкнутая 118
Образ множества 11
Объединение множеств 8
— семейств 8

Объем тела 460, 461
Оператор линейный 67, 68
— обратный 67
— ограниченный 68
— производной 231
— сжимающий 331
Операция внешняя бинарная 14
— внутренняя бинарная 14
— — — ассоциативная 15
— — — коммутативная 15
— дистрибутивная 17
Основание логарифмической функции 167
Ось действительная 37
— мнимая 37
Отношение бинарное 13
— порядка 13
— эквивалентности 13, 14
Отображение множества 11
— биективное 11
— взаимно-однозначное 11
— дифференцируемое 324, 328
— инъективное 11
— линейное 67, 232
— непрерывное в E 142
— — — замкнутой области 154
— — — точке 142, 155
— неявное 12
— обратное 12, 341
— параметрическое 12
— равномерно-непрерывное 162, 163
— сложное 12
— сюръективное 11
Отображения взаимно-обратные 12, 341

Пара упорядоченная 10
Параллелепипед вложенный 101
— замкнутый m-мерный 101
— открытый m-мерный 101
Параметр 12
— рационализирующий 384
Первообразная вектор-функции 359
— матрицы 360
— функции 358, 359
Пересечение множеств 8
— семейств 8
Перестановка ряда 195
Плоскость комплексная координатная 37
Площадь криволинейного сектора 455
— криволинейной трапеции 453
— плоской фигуры 449
Плюс бесконечность 27
Подмножество 8
— компактное 114
Подпоследовательность 73
Подпространство векторное 52
— метрическое 61
Подстановка универсальная 394
Подстановки Эйлера 387
Покрытие открытое 114
Поле 18
— упорядоченное 18, 34
— — числовое 20
Полуинтервал 27
— бесконечный 27
Полусегмент 27
— бесконечный 27
Полюс функции 149
Порядок роста 129
Последовательности равные 72
Последовательность 72
— возрастающая 79
— двойная числовая 205
— Коши 7
— монотонная 79
— невозрастающая 79
— неубывающая 79
— обратная 73
— ограниченная 74
— отображений локально равномерно сходящаяся 175
— — равномерно сходящаяся 172, 174
— p-кратная числовая 213
— противоположная 73
— расходящаяся 74
— сходящаяся 74, 98, 106
— убывающая 79
— фундаментальная 96, 97
— частичная 73
— частичных сумм ряда 179
— числовая 75
Постоянная Эйлера 83
Правила дифференцирования 232
— интегрирования 363
Правило Лопиталя 256, 258
Предел матрицы 140
— отображения 139
— последовательности 74
— — бесконечный 136
— — верхний 92
— — нижний 92
— — частичный 91
— функции 119, 135, 136
— — верхний 153
— — нижний 153
— — слева 121
— — справа 121
Пределы замечательные 123, 124
Преобразование Абеля 197, 224
Признаки сходимости несобственных интегралов 438, 439
Принцип двойственности 10
Произведение абсолютно сходящееся 217
— бесконечное 214
— комплексных чисел 35
— матриц 56
— множеств 10
— отображений 68
— последовательности на скаляр 73
— расходящееся 214
— скалярное 60, 99
— сходящееся 214

Произведения частичные 214
Производная функции 228, 230, 296, 298, 307
— бесконечная 229
— векторного произведения 301
— вектор-функции 295, 296
— — высшего порядка 298
— вторая 239, 298
— полная 324
— по направлению 307
— порядка n 239, 315
— произведения матриц 302
— — — на вектор 301
— скалярного произведения 301
— функции заданной параметрически 242
— функциональной матрицы 300
— частная 305, 315
Производные смешанные 315
— частные второго порядка 315
Промежуток компактный 429
Прообраз множества 11
Пространство Банаха 106, 172, 177
— векторное 51
— — действительное 52
— — комплексное 52
— — полное 105
— — сопряженное 70
— евклидово 60
— линейно связное 157
— метрическое 61
— — локально компактное 175
— — полное 105
— — связное 117
— — сепарабельное 113
— функциональное 169
Процесс рекуррентный 373
Пять основных разложений 265

Работа 473
Равенство асимптотическое 130, 131
— комплексных чисел 35
Разбиение сегмента 401, 405
Разложение в ряд Тейлора 266
— на простейшие дроби 378
Разность множеств 8
— симметрическая 10
— чисел 22
Расстояние между точками 61
Рационализация интеграла 384
Рефлексивность 13, 14
Ряд двойной абсолютно сходящийся 211
— — расходящийся 206
— — сходящийся 206
— знакочередующийся 199
— числовой 179
— — абсолютно сходящийся 194
— — бесконечный 179
— — гармонический 180
— — p-кратный 213
— — сходящийся 179, 213
— — условно сходящийся 195
Ряды повторные 207

Сегмент 27
— m-мерный 116
Сектор криволинейный 455
Семейство множеств 8
Символы Ландау 129
— логические 7
Система векторов линейно-зависимая 65
— — линейно-независимая 65
— действительных чисел расширенная 27
— упорядоченная 10
Скаляр 52
Скорость движения средняя 229
— точки мгновенная 229
След дуги 447
Среднее арифметическое 32
— гармоническое 31
— геометрическое 32
Структура математическая 17
Сужение отображения 13
Сумма двойного ряда 206
— интегральная Стилтьеса 476
— комплексных чисел 35
— p-кратного ряда 213
— последовательностей 73
— ряда обобщенная 219
— частичная 213
— — n-я 179
— элементов 19
Суммы частичные 206
Суперпозиция отображений 12
Сходимость по норме 106
— поточечная 172
— простая 172

Таблица интегралов 362
— производных 234
Тело 18
— вращения 462
— кубируемое 460
— нормированное 29
— элементарное 460
Теорема Архимеда 28
— Больцано—Вейерштрасса 91
— Вейерштрасса 158
— Гейне—Бореля 117
— Гульдина 472
— Дарбу 245
— Кантора 161
— Каччиополли—Пикара—Банаха 331
— Коши 156, 248
— Лагранжа 247
— Лебега 409
— об изоморфизме полных упорядоченных полей 45
— — устойчивости знака непрерывной функции 156
— о дифференцируемости сложной

функции 310
— — изоморфизме рациональных полей 44
— — конечных приращениях 297, 330
— — неявной функции 334, 336, 337
— — плотности множества рациональных чисел 43
— — постоянном ранге 342
— — производной обратной функции 233
— — — сложной вектор-функции 297
— — — — — функции 234
— — среднем для интегралов 417, 485
— — — обобщенная 270
— Римана 196
— Ролля 246
— Теплица 86, 219
— Ферма 245
— Фробениуса 224
— Шварца 315
— Штольца 87
— Эйлера об однородных функциях 312
Теоремы о среднем 244
Точка внутренняя 108
— изолированная 108
— критическая 285, 333
— локального максимума 346
— — минимума 346
— неподвижная 331
— особая устранимая 149
— — функции 148, 149
— перегиба 285, 362
— предельная множества 89, 90
— — числовой последовательности 90
— разрыва второго рода 148
— — первого рода 148
— — производной 249
— — существенного 148
— — типа полюса 148
— — устранимого 148
— — функции 148
Точки локального экстремума 346
— пространства 61
— стационарные 274, 347
Транзитивность 13, 14
Трапеция криволинейная 453

Убывание функции в точке 272
Упорядоченная пара 10
— система 10
Упорядоченное числовое поле 20, 24, 34
Условие Гельдера 163
— дифференцируемости отображения достаточное 327
— линейной зависимости необходимое 66
— — независимости достаточное 66
— Липшица 163
— сходимости произведения необходимое 215
— — ряда необходимое 180
— точки перегиба достаточное 285, 286
— — — необходимое 285
— экстремума достаточное 274, 275, 348
Условия интегрируемости 385

Фактор-множество 14
Фигура вписанная 450
— квадрируемая 450
— описанная 450
— ориентированная 457
Форма билинейная 70
— — антисимметричная 70
— — симметричная 70
— квадратичная 71
— — квазизнакоопределенная 349
— отрицательно определенная 349
— — положительно определенная 348
— комплексного числа тригонометрическая 38
— линейная 69
— полилинейная 71
— — антисимметричная 72
— — симметричная 71
Формула замены переменной 366, 434
— интегрирования по частям 367, 369, 425, 435, 484
— конечных приращений 247, 308
— Коши 271
— Лагранжа 271
— Лейбница 241
— Маклорена 262, 264
— Муавра 38
Ньютона—Лейбница 419
— Тейлора 261, 262, 271, 299, 321, 322
Формулы Эйлера 135
Функции алгебраические 165
— гиперболические 167
— зависимые 345
— иррациональные 165
— независимые 345
— неявные 332
— трансцендентные 165
— тригонометрические 164
— элементарные 165
Функция аддитивная 446
— бесконечно большая 128
— — малая 128
— — — более высокого порядка 129
— вогнута 282
— возрастающая 126
— выпуклая 279
— — строго 281
— дифференцируемая 227, 303, 304
— — слева 230, 296
— — справа 230, 296
— дробно-рациональная 165
— интегрируемая по Риману 402, 405, 409, 426
— — — Стилтьесу 475
— кусочно-непрерывная 148
— Лагранжа 354

— логарифмическая 167
— монотонная 126
— невозрастающая 126
— непрерывная в точке 143, 144, 145
— — на интервале 144
— — — сегменте 147
— неубывающая 126
— ограниченная 125
— — сверху 125
— — снизу 125
— ограниченной вариации 442
— однородная 312
— отрицательной вариации 447
— показательная 164
— положительной вариации 447
— постоянная 164
— равномерно-непрерывная 159
— сегмента 466
— степенная 164
— строго монотонно возрастающая 126
— — — убывающая 126
— убывающая 126

Цилиндр прямой 461

Частное комплексных чисел 36
— последовательностей 73
— чисел 22
Часть главная бесконечно малой 131
— комплексного числа действительная 35
— — — мнимая 35
— множества 8
Числа иррациональные 19, 34
— комплексные 35
— натуральные 42
— рациональные 14, 18
— чисто мнимые 37
Число *e* 80, 82
Член общий двойного ряда 206
— — ряда 179, 206
— остаточный в форме Пеано 262
Члены бесконечного произведения 214
— последовательности 72, 213
— — двойной 205
— ряда 179, 206

Шар замкнутый 63, 108
— открытый 63

Экстремум абсолютный 277, 355
— краевой 277
— локальный 244, 346
— условный 352
— функции, заданной неявно 351
Элемент единичный 18
— нейтральный 16, 73
— — левый 16
— — правый 16
— неотрицательный 25
— неположительный 25
— нулевой 18
— обратный 16
— отрицательный 25
— положительный 25
— регулярный 15, 22
— — левый 15
— — правый 15
— симметричный 16

Якобиан отображения 326

Иван Иванович Ляшко,
Алексей Климентьевич Боярчук
Яков Гаврилович Гай,
Алексей Феофилович Калайда

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ЧАСТЬ 1

Редактор *Л. П. Онищенко*
Литредактор *Л. П. Никитина*
Художественное редактирование
и оформление *Е. В. Чурия*
Технический редактор *И. И. Каткова*
Корректор *Ф. И. Слободская*

Информ. бланк № 6078

Сдано в набор 30.11.81. Подп. в печать 07.02.83. Формат 60×90¹/₁₆ Бумага типогр. № 1. Лит. гарн. Выс. печать. 31 печ. л. 31 кр.-отт. 32,78 уч.-изд. л. Тираж 15 000 экз. Изд. № 5146. Зак. № 2—313. Цена 1 р. 40 к.

Головное издательство издательского объединения «Вища школа», 252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7.

Головное предприятие республиканского производственного объединения «Полиграфкнига», 252057, Киев, ул. Довженко, 3.